Assombrissement centre-bord

6.1 Moments de l'intensité

ⓐ $$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu(\vec{n})\,d\Omega$$
$$\vec{H}_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu(\vec{n})\,\vec{n}\,d\Omega$$
$$\mathcal{K}_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu(\vec{n})\vec{n}.\vec{n}\,d\Omega$$

ⓑ equation de transfert
$$\vec{n}.\vec{\nabla} I_\nu(\vec{n}) = j_\nu(\vec{n}) - \alpha_\nu I_\nu(\vec{n}) = \alpha_\nu\left(S_\nu(\vec{n}) - I_\nu(\vec{n})\right)$$

1er moment $\nabla\vec{H}_\nu = \alpha_\nu\left(S_\nu(\vec{x}) - J_\nu(\vec{x})\right)$

2e moment $\vec{\nabla}\mathcal{K}_\nu = -\alpha_\nu \vec{H}_\nu(\vec{x})$

$\Longrightarrow \nabla.\left(\frac{\nabla\mathcal{K}_\nu}{\alpha_\nu}\right) = \alpha_\nu(J_\nu - S_\nu)$

on a supposé la fonction source isotrope.

ⓒ Plus d'inconnues que d'équations, même si on utilise les moments d'ordre supérieur $\rightarrow$ relation supplémentaire de clôture

ⓓ en géométrie plan parallèle, le tenseur d'Eddington n'a qu'une seule "composante" et $P_\nu = \frac{4\pi}{3c}J_\nu$ avec $P_\nu = \frac{4\pi}{c}\mathcal{K}_\nu$ qui est la pression de radiation.
En milieu isotrope $P_\nu = \frac{u_\nu}{3}$ et $u_\nu = \frac{4\pi}{c}J_\nu \Rightarrow P_\nu = \frac{4\pi}{3c}J_\nu$
$$\Longrightarrow \mathcal{K}_\nu = \frac{1}{3}J_c$$

ⓔ OK si le milieu est presque isotrope.
La plupart du temps valable dans les couches profondes des atmosphères stellaires.

ⓕ $$\frac{1}{\alpha_\nu}\vec{\nabla}.\left(\frac{\nabla K_\nu}{\alpha_\nu}\right) = J_\nu - S_\nu \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_\nu}\vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{\nabla}J_\nu}{3\alpha_\nu}\right) = J_\nu - S_\nu$$

avec $K_{\nu,ij} = \frac{1}{3}J_\nu\delta_{ij}$

6.2 Geométrie plan parallèle

ⓐ
$$\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - S_\nu$$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu$$

ⓑ Integré sur la fréquence

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S \qquad \frac{dK}{d\tau} = H$$

ⓒ ETL $\quad S_\nu = B_\nu \qquad S = \int B_\nu \, d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

ⓓ $\frac{dH}{d\tau} = 0 \quad \Longrightarrow \quad J = S = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

ⓔ Approximation d'Eddington

$$c\frac{dP_\nu}{d\tau_\nu} = F_\nu \qquad \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu \qquad K_\nu = \frac{1}{3}J_c$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\frac{dJ}{d\tau} = H$$

$$J = 3\tau H + 2H = 2H\left(\frac{3}{2}\tau + 1\right)$$

ⓕ
$$J = \frac{\sigma T^4}{\pi} = 2H\left(\frac{3}{2}\tau + 1\right)$$

$$T^4 = \frac{\pi}{\sigma} \times 2H\left(\frac{3}{2}\tau + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2}\tau + 1\right)$$

ⓖ La température diminue vers ~~le centre~~ l'extérieur de l'étoile

⟹ raies d'absorption (cf Eddington Barbier)

→ assombrissement centre-bord

Transfert de raies par nuage sphérique

ⓐ $\lambda_0 = \dfrac{hc}{E_u - E_\ell} = 4.1\ 10^{-4}\ m = 410\ \mu m \qquad \nu_0 = 725\ GHz$

ⓑ $\dfrac{n_u}{n_\ell} = \dfrac{g_u}{g_\ell} \exp\left(-\dfrac{h\nu_0}{kT}\right) = 1.26$

$n_u + n_\ell = 1 \quad \Longrightarrow \quad n_u = 0.56 \qquad n_\ell = 0.44$

ⓒ Densité volumique de Mo

$$N_{Mo} = 10^{-5} \times \frac{\rho}{2 m_p} = 30\ cm^{-3} \quad \Longrightarrow \quad N_u = 17\ cm^{-3}$$

Ligne de visée dans un nuage pour un paramètre d'impact p : $\Delta s = 2 \times \sqrt{R^2 - p^2}$

Largeur de raie : $\Delta\nu_D = \dfrac{\nu_0}{c}\sqrt{\dfrac{2kT}{M}} = 0.44\ MHz$

$FWHM = 0.7\ MHz$

$$\tau_\nu = \frac{A_{ul}}{4\pi \nu_0^2} c^2 \left(\exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) - 1\right) \phi(\nu_0)\ N_u \sqrt{R^2 - p^2}$$

$$\phi(\nu_0) = \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}}\ \frac{1}{FWHM} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \times \Delta\nu_D}$$

au centre du nuage l'opacité vaut $\tau = 0.41$

ⓓ $N_{cr} = \dfrac{A_{ul}}{K_{ul}} = 3.3\ 10^3\ cm^{-3} \ll N_{H_2} \qquad$ ETL OK.