Examen M2 Transfert Radiatif

14 Février 2018

Durée : 3 heures
Tous documents autorisés
Téléphones portables et ordinateurs interdits

Les différents exercices de cet examen sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

1 Rayonnement reçu par les planètes

Comparez quantitativement le rayonnement solaire reçu par la Terre et par Saturne. On considérera les grandeurs suivantes :

(a) l'intensité

(b) le flux

(c) l'énergie

On donne :
− distance Terre - Soleil = 1 A.U.
− distance Saturne - Soleil = 10 A.U.
On supposera que le rayon de Saturne est 10 fois celui de la Terre.

2 Rayonnement du Soleil

La température effective du Soleil est $\mathrm{T}_\odot = 5770\,\mathrm{K}$. Déterminez :

(a) la longueur d'onde λ_{max} pour laquelle le spectre continu du Soleil a son maximum

(b) le flux $F_\odot$ à la surface du Soleil

(c) la luminosité du Soleil $L_\odot$, sachant que le flux solaire reçu sur Terre au-dessus de son atmosphère est $F_{\mathrm{sc}} = 1.36 \times 10^6\,\mathrm{erg\ s^{-1}cm^{-2}}$.

(d) le rayon du Soleil $R_\odot$ en km.

3 Largeurs et profils de raies

(a) On dispose d'un spectre d'un nuage diffus contenant des raies de plusieurs espèces (atomiques ou moléculaires) différentes. Proposez une méthode simple pour déterminer la température du milieu ainsi que la vitesse turbulente. Quelles hypothèses doit-on faire ?

(b) On considère une enveloppe de protoétoile en effondrement subsonique. Tracez le profil de raie attendu pour une raie optiquement épaisse et pour une raie optiquement mince, en fonction de la vitesse. On rappelle que la vitesse est comptée positivement vers l'observateur.

4 Diffusion simple isotrope : étoile entourée d'un nuage sphérique

On considère une étoile de rayon R_*, de température T_*, de luminosité L_ν et qui rayonne comme un corps noir parfait. Un nuage sphérique de poussières entoure l'étoile, sa densité est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \quad &&\text{pour} \quad r \geq r_0 \\ \rho(r) &= 0 &&\text{pour} \quad r < r_0 \end{aligned}$$

On suppose que l'opacité due à la diffusion est indépendante de la fréquence, de la densité et de la température et on néglige l'absorption : $\kappa = \kappa_\nu^{\rm sca}$ où κ est le coefficient d'extinction massique. On suppose aussi que l'épaisseur optique entre l'étoile et un point distant de r est suffisamment petite pour utiliser l'approximation de diffusion simple (i.e. les photons ne peuvent être diffusés qu'une seule fois). La diffusion est isotrope. On traitera l'étoile comme une source ponctuelle, c'est-à-dire $r_0 \gg R_*$.

(a) Donner l'expression du flux de l'étoile F_ν à la distance r en fonction de L_ν.

(b) Exprimez la luminosité de l'étoile en fonction de son rayon et de sa température

(c) Montrez que l'intensité moyenne J_ν s'écrit : $J_\nu = \frac{F_\nu(r)}{4\pi}$. On pourra s'appuyer sur les définitions du flux et de l'intensité moyenne et appliquer l'approximation de diffusion simple.

(d) En déduire l'expression de l'émissivité $j_\nu(r)$ en fonction de κ, L_ν, ρ_0, r_0 et r.

(e) En déduire l'intensité observée en fonction du paramètre d'impact b, dans le cas où il n'y a pas d'intensité d'arrière plan. On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

5 Diagrammes rotationnels

Parise et al. (2002) ont détecté le méthanol doublement deutéré (CHD_2OH) à partir de ses transitions rotationnelles millimétriques dans une enveloppe de protoétoile. On propose ici d'utiliser la méthode des diagrammes rotationnels, employée par Parise et al. (2002), pour calculer le rapport des densités de colonne de CHD_2OH et CH_3OH.

5.1 Théorie

Le but de la méthode consiste à dériver une relation simple entre les populations des niveaux et leurs énergies, qui permet ensuite de déterminer graphiquement la densité de colonne totale de l'espèce considérée. Cette méthode est employée en radioastronomie, et de ce fait les intensités des spectres seront exprimées en température, que l'approximation de Rayleigh-Jeans soit vérifiée ou non. Les hypothèse faites par la suite sont :

— équilibre thermodynamique local

— transitions optiquement minces

— milieu relativement chaud, c'est-à-dire que $T_{\mathrm{ex}} \gg T_{\mathrm{bg}}$, où T_{bg} est la température d'arrière-plan, typiquement la température du fond cosmologique à $2.7\,\mathrm{K}$, et T_{ex} la température d'excitation.

(a) Donnez la solution de l'équation de transtert exprimée en température en fonction de l'épaisseur optique τ et de la température d'excitation des transitions T_{ex}. Le milieu est considéré homogène. On se souviendra que l'intensité mesurée correspond à la différence du signal "on-source" et "off-source".

(b) En déduire l'expression de l'aire sous la raie (intensité intégrée en vitesse) $\int T dv$.

(c) En explicitant $\int \tau dv$ en fonction de A_{ji} (coefficient d'émission spontanée du niveau j vers le niveau i), ν la fréquence de la transition, et N_j la densité de colonne dans le niveau j, exprimez la densité de colonne dans le niveau haut N_j en fonction de $\int T dv$. Cette expression dépend-elle de T_{ex} ?

(d) Donnez l'expression de N_j en fonction de la fonction de partition et de la densité de colonne totale N de l'espèce considérée. En déduire $\mathrm{Log}(N_j)$ en fonction de E_j l'énergie du niveau et T_{ex}.

(e) Cette relation est linéaire avec l'énergie du niveau. Comment peut-on obtenir graphiquement la température d'excitation et la densité de colonne totale ?

5.2 Application

La table 1 donne les valeurs des fréquences de transition, nombres quantiques, forces de raie $S\mu^2$, 'energies du niveau haut E_j, intensités intégrées $\int T dv$, intensités pic T et largeurs de raie Δv de l'article de Parise et al. (2002) pour le méthanol doublement deutéré. Les nombres quantiques sont de la forme $J_{K_{-1}K_{+1}}$. Le coefficient d'Einstein A_{ji} peut être déduit de la force de raie $S\mu^2$ grâce à la relation :

$$A_{ji} = 1.16395 \times 10^{-20} \nu^3 (S\mu^2)/g_j \tag{1}$$

où ν est la fréquence de la transition exprimée en MHz. La fonction de partition peut être approximée par $Z = 2.64\, T^{3/2}$.

(a) Tracez le diagramme rotationnel pour le méthanol doublement deutéré.

(b) En déduire une estimation de T_{ex} et N, la densité de colonne totale.

(c) Sachant que la densité de colonne du méthanol CH_3OH vaut 3×10^{15} cm^{-2}, calculez le rapport des densités de colonne de CHD_2OH et CH_3OH. On rappelle que le rapport D/H cosmique vaut environ 10^{-5}.

Grandeurs utiles :

Unité astronomique : 1 A.U. = 1.5×10^{11} m.
Constante de Planck : $h = 6.62\ 10^{-34}$ J.s
Constante de Boltzmann : $k = 1.38\ 10^{-23}$ J/K
vitesse de la lumière : $c = 3\ 10^8$ m/s
Energie : 1 erg = 10^{-7} J
Constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$

Table 1 – Paramètres des transitions observées de CHD_2OH, d'après Parise et al. (2002).

Frequency GHz	Transition	μ^2S	E_{up} cm^{-1}	$\int$ Tdv K.km.s^{-1}	T K	Δv km.s^{-1}
83.1292	2_0-1_0 e_1	1.4	16.98	0.07±0.02	0.02	3.1±0.7
83.2895	2_0-1_0 e_0	1.4	4.17	0.09±0.02	0.03	3.2±0.6
83.3036	2_0-1_0 o_1	1.4	10.33	0.07±0.01	0.03	2.5±0.5
166.234	4_0-3_0 e_1	2.8	26.69	0.39±0.08		
166.271	4_{2-}-3_{2-} e_1	2.1	35.65	0.22±0.07	0.04	5.1±1.8
166.297	4_{3+}-3_{3-} e_1	1.2	46.54	0.10±0.08	0.03	3.2±2.2
166.298	4_{3-}-3_{3-} e_1	1.2	46.54	0.10±0.08	0.03	3.2±2.2
166.304	4_{2+}-3_{2+} e_1	2.1	35.65	0.22±0.06	0.06	3.4±0.9
166.327	4_0-3_0 o_1	2.8	20.04	0.17±0.10		
166.435	4_0-3_0 e_0	2.8	13.89	0.48±0.13	0.05	8.7±2.8
207.771	5_0-4_0 e_1	3.5	33.63	0.44±0.11	0.09	4.4±1.1
207.827	5_{2-}-4_{2-} e_1	2.9	42.59	0.19±0.11	0.07	2.5±1.3
207.864	5_{4-}-4_{4-} e_1	1.3	68.41	0.43±0.13	0.07	5.6±1.8
207.868	5_{3-}-4_{3-} e_1	2.2	53.48	0.17±0.10	0.05	3.4±1.1
207.869	5_{3+}-4_{3+} e_1	2.2	53.48	0.17±0.10	0.05	3.4±1.1