

# Examen M2 Transfert Radiatif

6 Février 2020

*Durée : 3 heures*

*Tous documents autorisés*

*Téléphones portables et ordinateurs interdits*

---

Les différents exercices de cet examen sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

## 1 Fonction source

On note  $S_\nu$  la fonction source et  $I_\nu$  l'intensité spécifique. Les cas suivants sont-ils possibles? Si oui, donnez l'interprétation physique.

- (a)  $S_\nu/I_\nu = 1$
- (b)  $S_\nu > I_\nu$
- (c)  $S_\nu < 0$

## 2 Flux et intensité

On considère deux fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  pour lesquelles le coefficient d'extinction  $\alpha_{\nu_1} = 10 \alpha_{\nu_2}$ , mais la fonction source  $S$  est la même aux deux fréquences. Quel est le rapport entre les intensités émergentes aux deux fréquences (i.e.  $I_{\nu_1}/I_{\nu_2}$ ) dans les cas suivants :

- (a) nuage sphérique, non éclairé, homogène, optiquement mince
- (b) demi-espace homogène
- (c) étoile sphérique avec  $S(\tau_{\nu_1}) = S(\tau_{\nu_1} = 0) + \tau_{\nu_1}$ . Dans ce cas, on pourra utiliser la relation d'Eddington-Barbier.

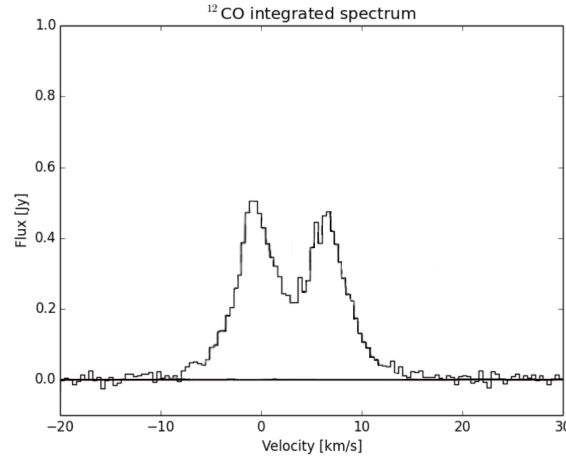
Calculez également le rapport de flux  $F_{\nu_1}/F_{\nu_2}$  dans les trois cas.

## 3 Profil de raie dans un disque képlérien

Louvet et al. (2018) ont observé l'émission de la transition rotationnelle  $^{12}\text{CO}(3-2)$  avec l'interféromètre ALMA vers un disque protoplanétaire en rotation képlérienne autour de l'étoile T Tauri Th 28. Le spectre de l'émission intégrée sur tout le disque est présenté Fig. 1. L'inclinaison du disque est de 73 degrés par rapport à la ligne de visée.

- (a) Quelle est la vitesse systémique (de l'étoile) ?
- (b) À quelle(s) région(s) du disque correspondent les ailes de raie à haute vitesse ? À quelle(s) région(s) du disque correspondent les deux pics ? On pourra faire un schéma.
- (c) À quoi est dû le déficit d'émission vers  $v = 3$  km/s ?
- (d) Aurait-on le même spectre pour une raie optiquement mince ? Justifiez votre réponse.
- (e) Quelle allure aurait le spectre si le disque était vu de face ("face-on") ?

FIGURE 1 – Spectre de CO(3–2) adapté de Louvet et al. (2018) observé par l'interféromètre ALMA vers le disque protoplanétaire de l'étoile Th 28.



## 4 Température d'un grain de poussière près d'une étoile

On cherche à exprimer la température d'un grain de poussière à l'équilibre radiatif, soumis au rayonnement d'une étoile. Le grain de poussière est situé à une distance  $r$  du centre de l'étoile. On note  $R^*$  le rayon de l'étoile. Le grain de poussière peut être suffisamment proche de l'étoile pour qu'on ne puisse pas considérer que  $R^*$  est négligeable devant  $r$ . En d'autres termes, on doit considérer la dépendance angulaire du rayonnement de l'étoile vu de la poussière. L'opacité massique de la poussière sera notée  $\kappa_\nu$ .

- (a) Que signifie l'équilibre radiatif pour le grain ?
- (b) En quelle unité s'exprime généralement l'opacité massique ?
- (c) Donnez l'expression de l'intensité moyenne du rayonnement de l'étoile  $J_\nu^*$  à la position du grain de poussière, en fonction de  $r$ ,  $R^*$ , et de l'intensité du rayonnement stellaire  $I_\nu^*(\mu)$ , avec  $\mu = \cos \theta$  qui a la signification usuelle.
- (d) En supposant que  $I_\nu^*$  ne dépend pas de la direction (source isotrope), calculez littéralement  $J_\nu^*$ .
- (e) Que vaut le flux de l'étoile  $F_\nu^*$  en  $r$  ?
- (f) Donnez l'expression du taux de chauffage du grain d'abord en fonction de  $J_\nu^*$ , puis en fonction de  $I_\nu^*$  et finalement en fonction de  $F_\nu^*$ .
- (g) Comment l'expression précédente est-elle modifiée dans le cas particulier où  $r \gg R^*$  ?
- (h) En déduire que dans le cas général, le taux de chauffage est égal au produit du taux de chauffage dans le cas où  $r \gg R^*$  multiplié par un facteur de correction que l'on exprimera.
- (i) Donnez l'expression du taux de refroidissement du grain. On notera  $T_d$  la température du grain.

- (j) Déduisez de ce qui précède l'expression de la température du grain  $T_d$  en fonction de la température de l'étoile  $T^*$ , de son rayon  $R^*$ , de la distance  $r$ , du facteur de correction précédemment déterminé et du facteur d'efficacité de refroidissement thermique  $\epsilon$ . On rappelle que  $\epsilon$  est le rapport entre les opacités moyennes de Planck à  $T_d$  et  $T^*$ .
- (k) Tracez l'allure de  $T_d$  en fonction de  $r/R^*$  pour une particule de poussière grise proche d'une naine brune pour laquelle  $T^* = 1000$  K. Quelle erreur fait-on sur  $T_d$  en  $r = 1.2 R^*$  si on utilise l'expression valable pour  $r \gg R^*$ ? Surestime-t-on ou sousstime-t-on la température de la poussière ?

## 5 Probabilité d'échappement

Dans de nombreux cas, l'approximation de l'équilibre thermodynamique local (ETL) est trop grossière lorsque l'on cherche à déterminer la quantité de matière le long de la ligne de visée à partir d'observations spectrales. Sans toutefois résoudre le problème du transfert dans toute sa complexité, on peut utiliser d'autres techniques simples, peu coûteuses en temps de calcul, et qui s'affranchissent de l'hypothèse de l'ETL.

Une des difficultés du transfert dans les raies est le couplage entre l'équation d'équilibre statistique locale et l'intensité moyenne, c'est à dire le champ de rayonnement moyenné sur toutes les directions. Une approche consiste à découpler l'équation d'équilibre statistique de l'équation de transfert en introduisant une probabilité qu'un photon s'échappe du milieu après avoir été émis. Cette méthode a été proposée par Sobolev (1958).

Pour simplifier, nous considérerons un système à deux niveaux dans ce qui suit.

- (a) Ecrivez les équations d'équilibre statistique pour un système à deux niveaux.
- (b) Si la source était complètement opaque à son propre rayonnement, vers quelle grandeur se rapprocherait l'intensité moyenne  $J$  ?
- (c) On note  $\beta$  la probabilité d'échappement des photons de la source. L'approximation de la probabilité d'échappement suppose que  $J$  peut être écrit, en fonction de  $\beta$  et de la fonction source  $S$  :

$$J = S(1 - \beta)$$

Quelle est l'interprétation physique de  $J/S$  ?

- (d) Ré-écrivez les équations d'équilibre statistique en introduisant  $\beta$ . Ces équations sont-elles découplées de l'équation de transfert ? Pourquoi ?
- (e) Dans l'approximation de Sobolev (approximation dite "Large Velocity Gradient"), on peut montrer que  $\beta$  peut s'écrire :

$$\beta = \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}$$

avec  $\tau$  qui est la profondeur optique.

Justifiez pourquoi les milieux avec des gradients de vitesse importants se prêtent bien à un traitement de type probabilité d'échappement.

- (f) Indiquez qualitativement comment vous détermineriez numériquement l'intensité des raies spectrales en utilisant le formalisme de la probabilité d'échappement, sachant que les conditions physiques (température cinétique, densité des collisionneurs, densité de colonne de l'espèce considérée) sont données. Dans le cas d'une méthode itérative, on prendra soin de préciser comment déterminer les valeurs initiales des grandeurs sur lesquelles on itère.

- (g) Déduisez de la question (d) l'expression de la densité critique dans le cas où le milieu n'est pas optiquement mince.
- (h) Quel est l'effet de la profondeur optique sur la valeur de la densité critique? Comment interpréter cela physiquement?
- 
- 

Grandeurs utiles :

Unité astronomique :  $1 \text{ A.U.} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$

Parsec :  $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$

Constante de Planck :  $h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

Constante de Boltzmann :  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

vitesse de la lumière :  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Energie :  $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$

Electron-volt :  $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$

Constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$