Gravitation

Partie II : Cosmologie

Hervé Beust

Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble

Gravitation : Cosmologie

1. Cosmologie : Observation de l'Univers
2. Univers Newtonien
3. Univers et Relativité Restreinte
4. Gravitation et Relativité Générale
5. Univers relativiste en expansion
6. Modèles cosmologiques et observations

Gravitation – Cosmologie

1. Cosmologie : Observation de l'Univers
   - Introduction : La cosmologie
   - La structuration de l'Univers
   - L'expansion de l'Univers
   - Le paradoxe d'Olbers
   - Le modèle standard de Big Bang

La cosmologie

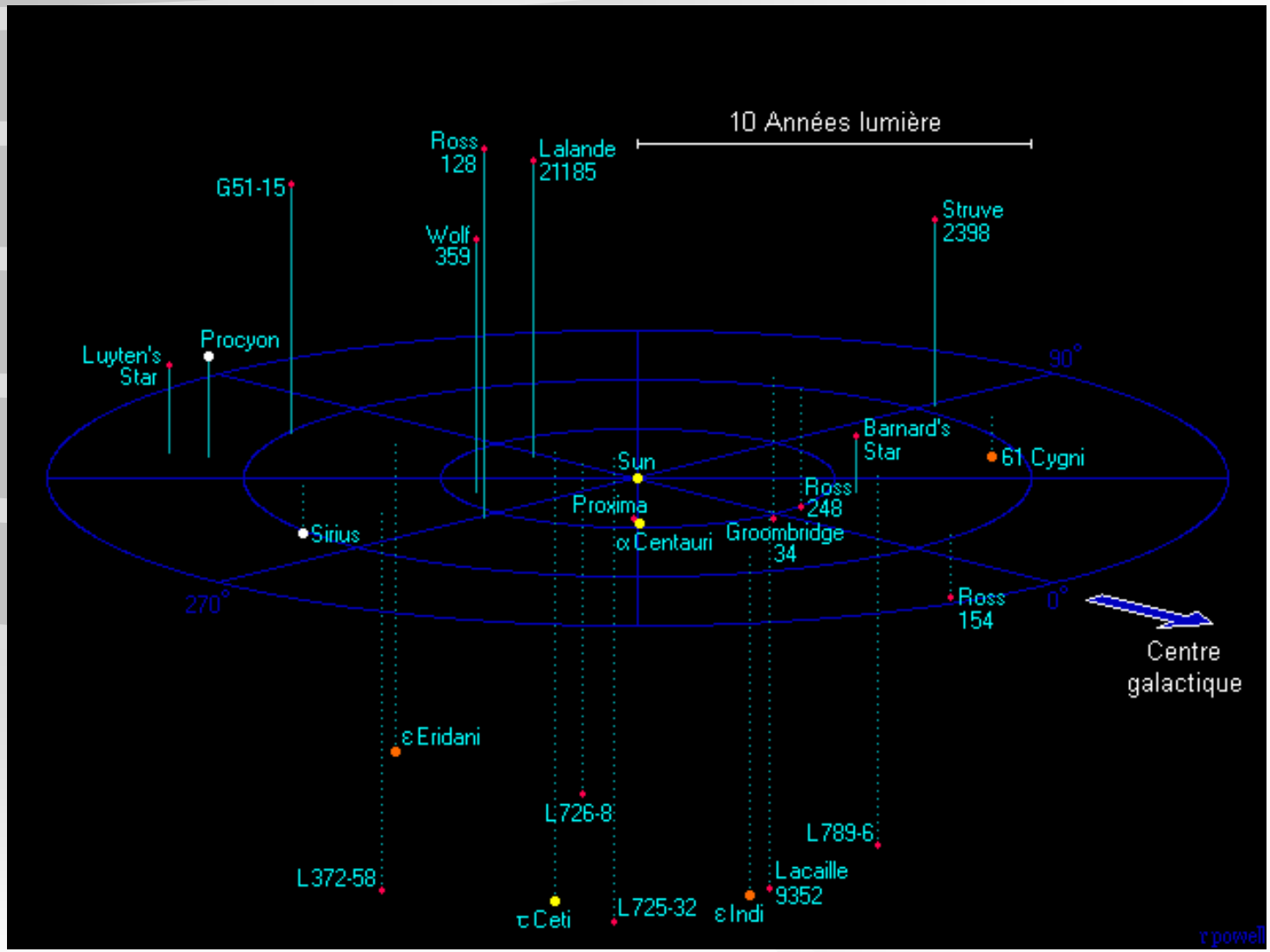
- Cosmologie = Science de l'univers pris dans son ensemble, et à très grande échelle

- A cette échelle, la gravitation domine les interactions et gouverne l'évolution globale.
- Aspect observationnel : structuration de l'Univers, expansion de l'Univers, fond cosmologique et irrégularités (Planck)
- Aspect théorique : Big Bang, inflation, nucléosynthèse primordiale, formation des galaxies, matière noire, énergie noire

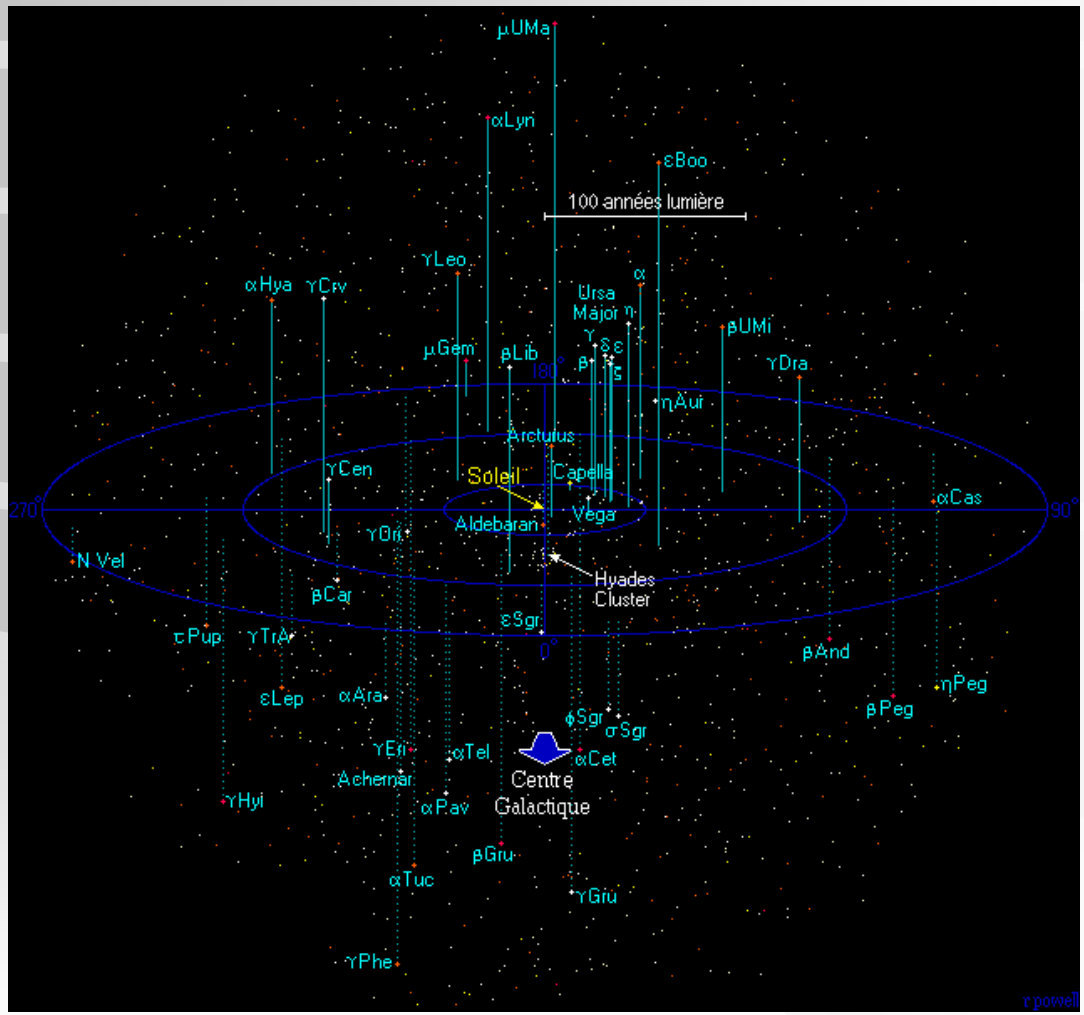
Structuration de l'Univers

- Unités pratiques :
  - 1 Unité Astronomique (AU) = 1.496×10^{11} m
  - 1 Année-Lumière (AL) = 9.46×10^{15} m ; 1 Parsec (pc) = 3.085×10^{16} m ≈ 3.25 AL
- Echelle du Système solaire
  - Terre-Lune = 3.84×10^{8} m; Diamètre solaire = 1.492×10^{9} m
  - Terre-Soleil = 1 AU ; Système Solaire ≈ 50 AU
- Echelle des étoiles de la galaxie
  - Etoile la plus proche : Proxima Centauri 4.3 AL
  - Diamètre de la galaxie ≈ 30 kpc
- Echelles des galaxies et de l'Univers
  - Paires = deux galaxies en interaction proche.
    Taille typique : 0. 1 Mpc Exemple : Nuages de Magellan / Galaxie
  - Groupes = quelques dizaines de galaxies liées gravitationnellement.
    Taille typique : 1 – 2 Mpc. Exemple : Le groupe local
  - Amas = quelques milliers de galaxies. Amas réguliers et irréguliers.
    Taille typique : 10 Mpc. Exemple : Virgo, Coma
  - Superamas = associations de groupes et d'amas.
    Taille typique ≃ 100 Mpc. Exemple : Le Superamas local
  - Univers observable ≈ 3000 Mpc ⇒ **ISOTROPIE !**

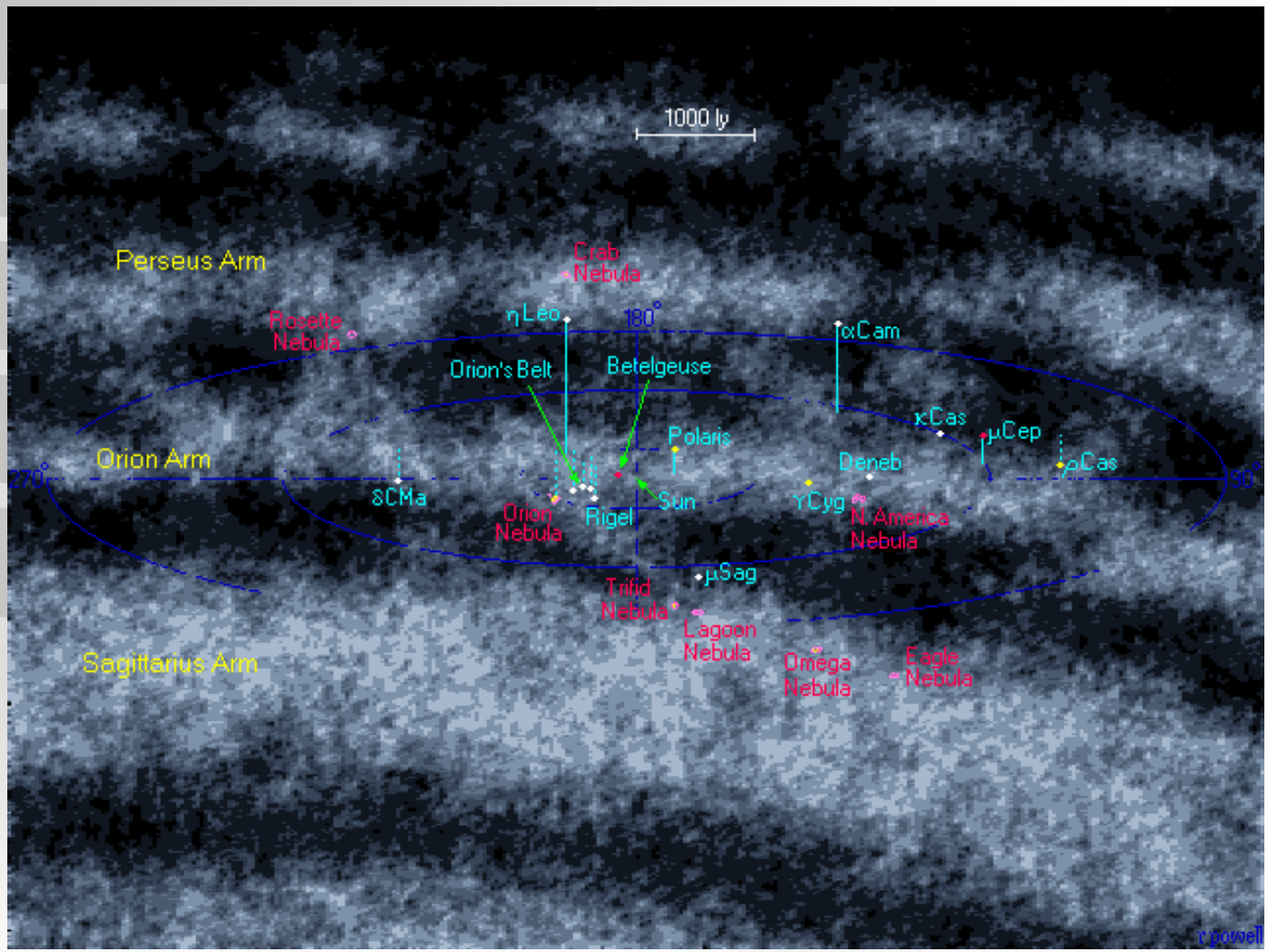
Le voisinage solaire



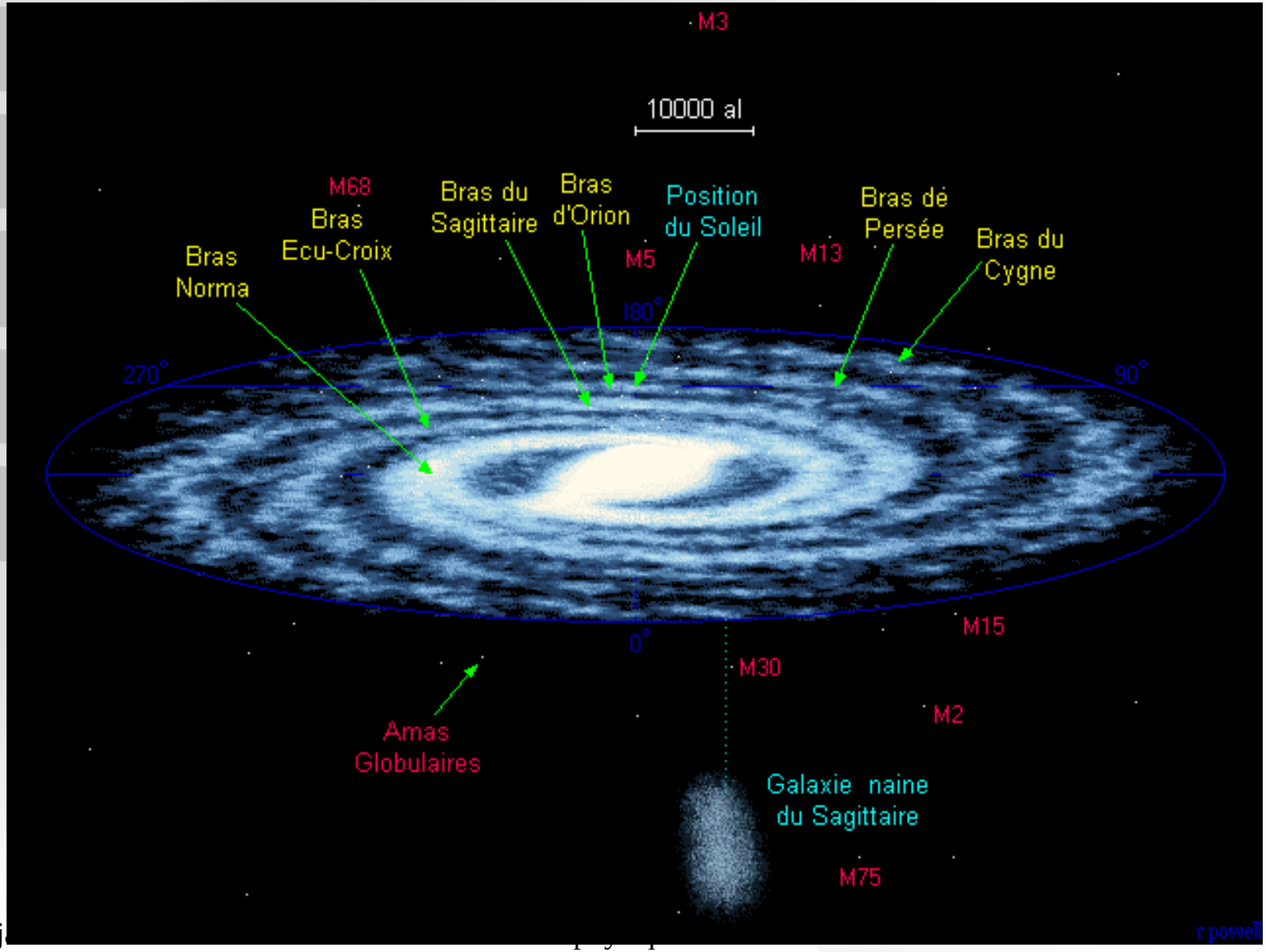
Le voisinage solaire (2)



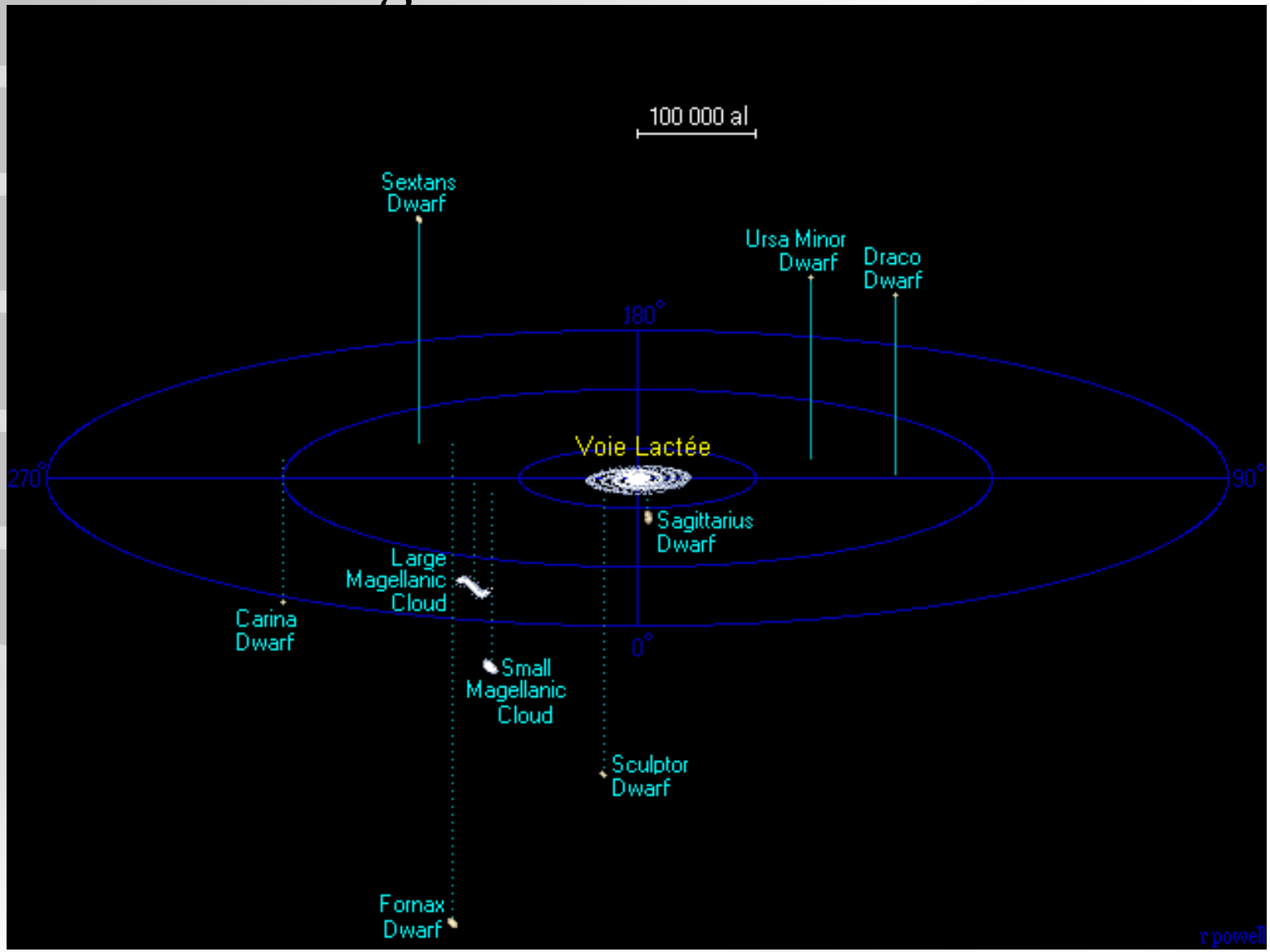
Le voisinage solaire (3)



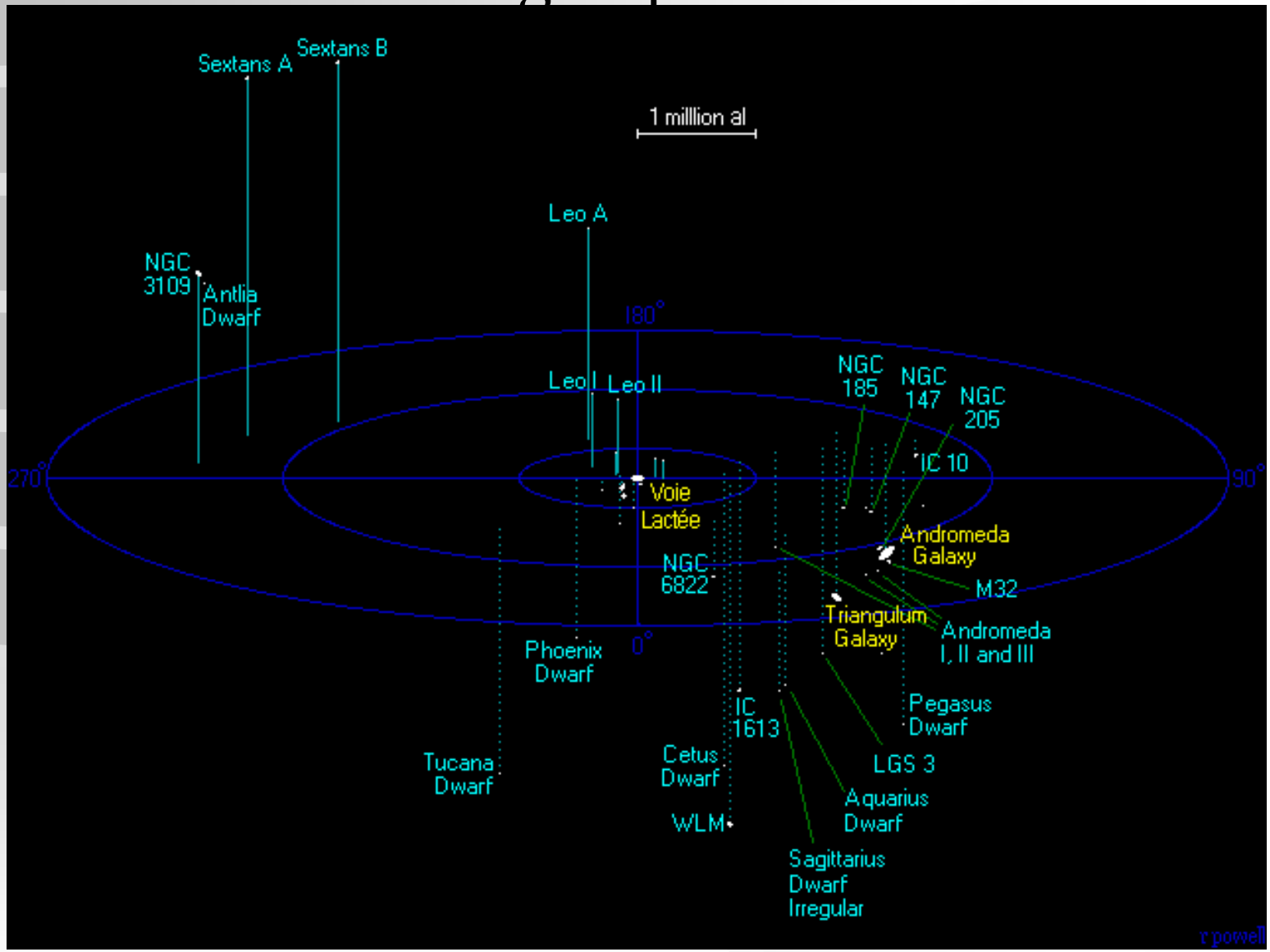
La Galaxie


M3
10000 al
M68
Bras
Ecu-Croix
Bras du
Sagittaire
Bras
d'Orion
Position
du Soleil
Bras de
Persée
Bras du
Cygne
Bras
Norma
M5
M13
180°
270°
90°
0°
M15
M30
M2
Amas
Globulaires
Galaxie naine
du Sagittaire
M75
r powell

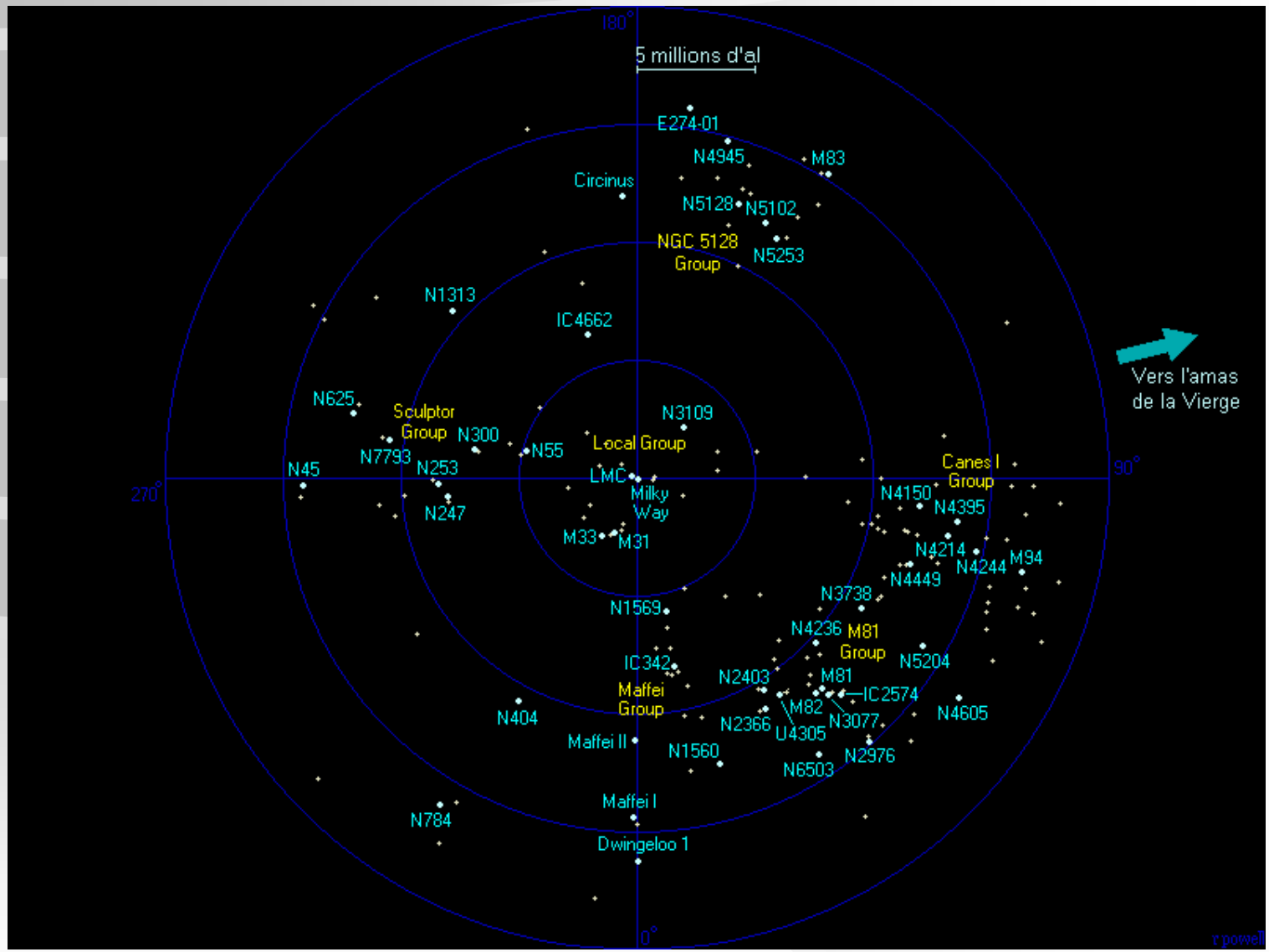
Les galaxies liées à la nôtre



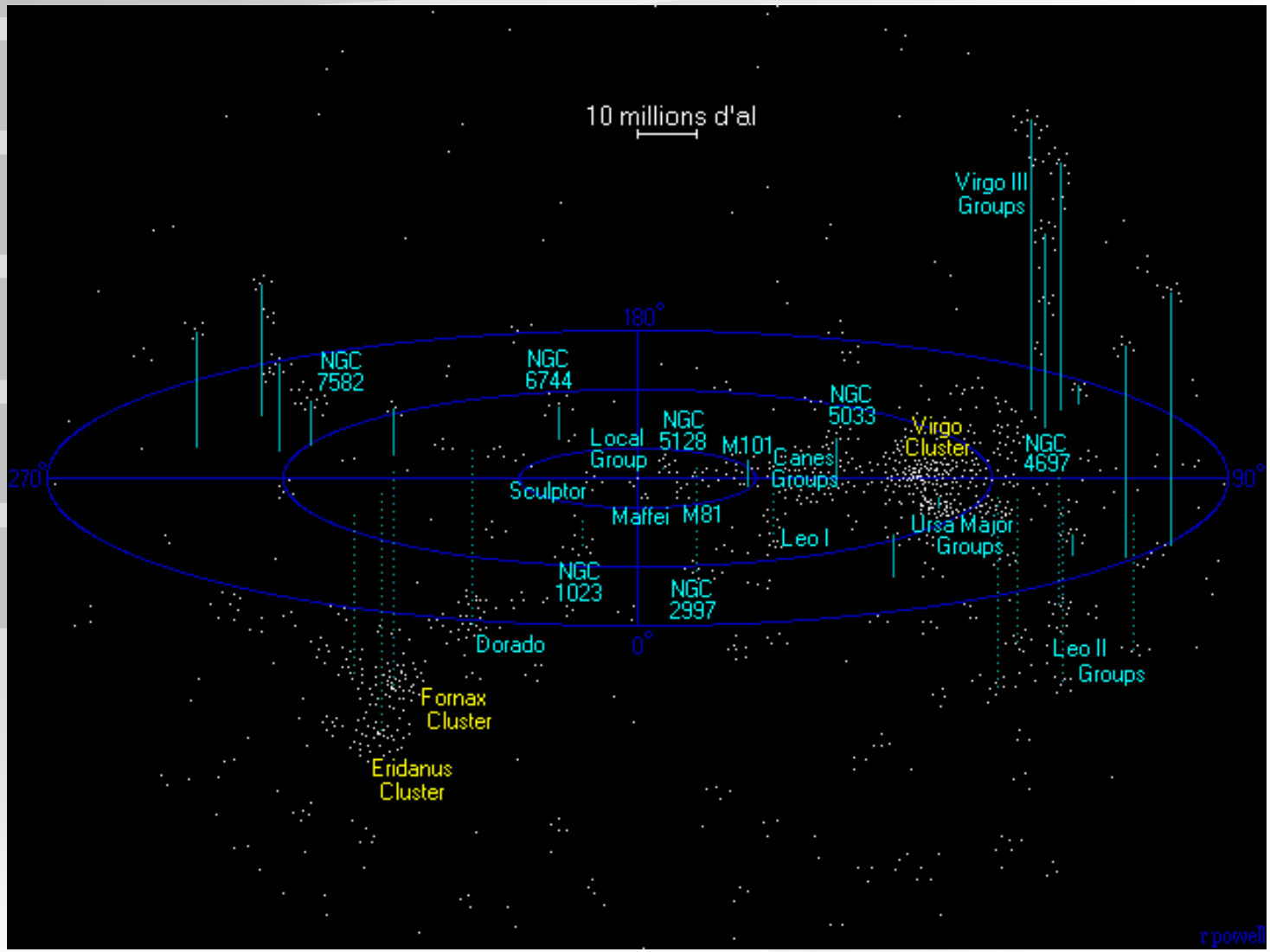
Le groupe local



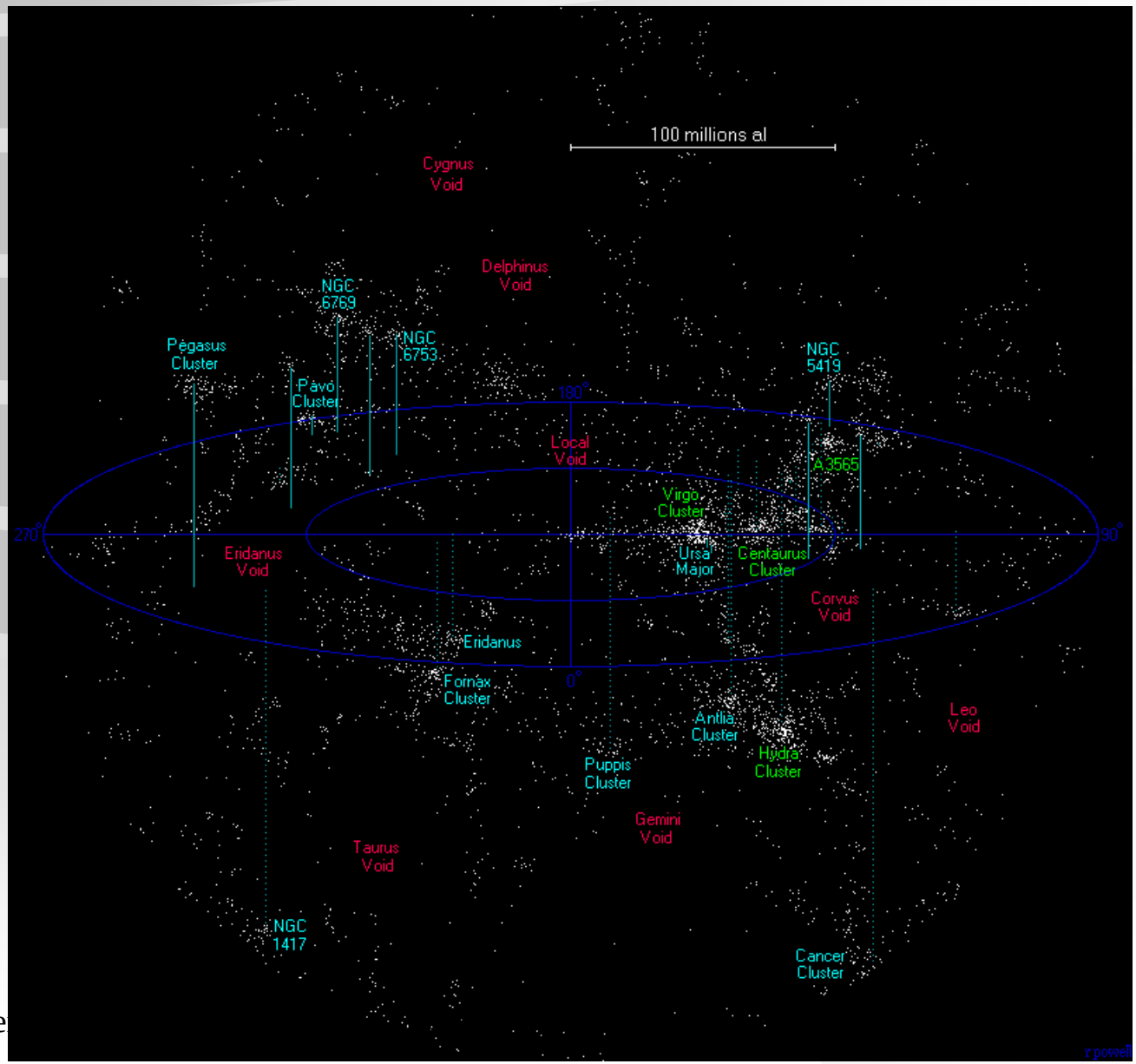
Les groupes de galaxies proches



Les groupes de galaxies proches (2)

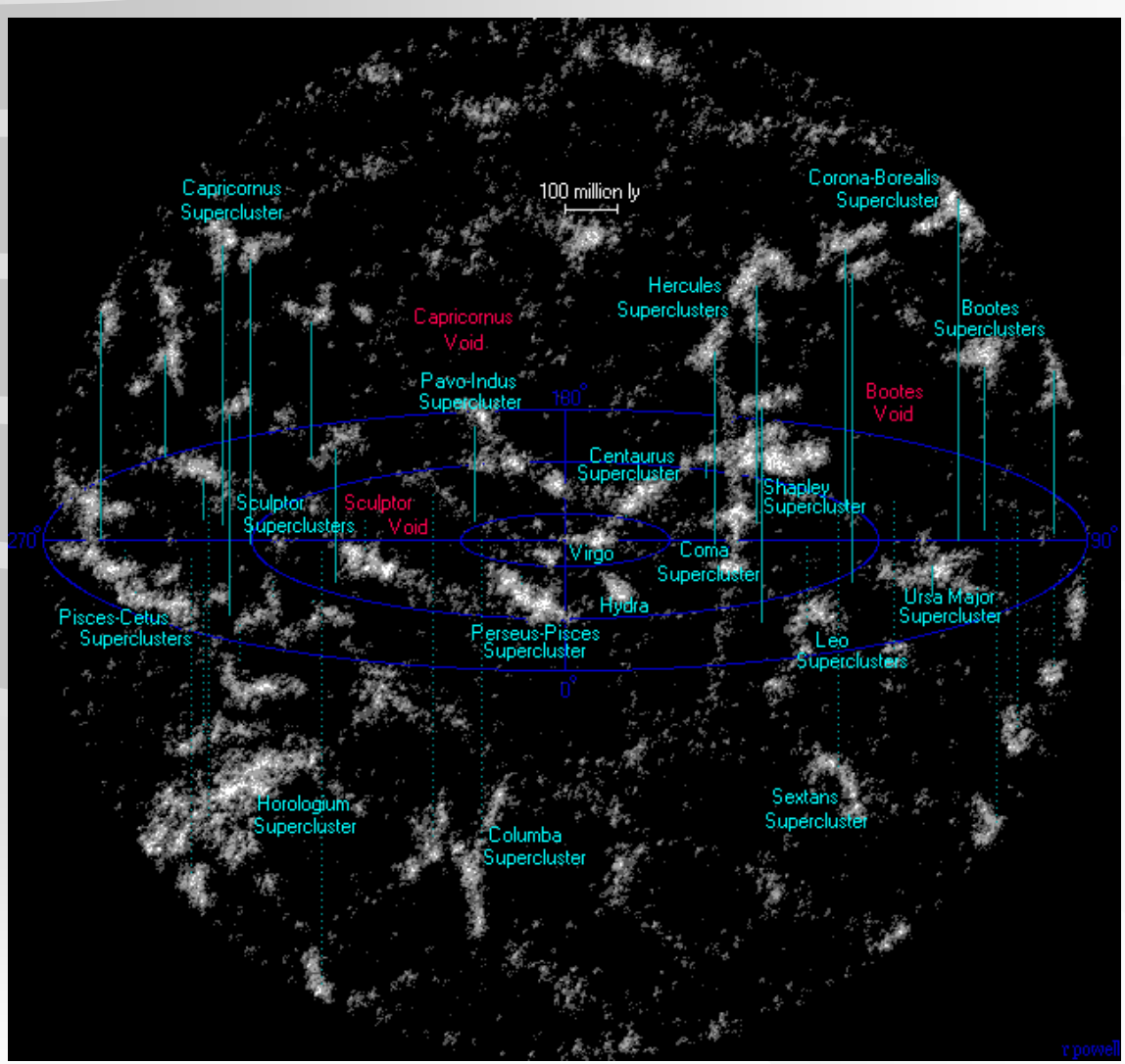


Le superamas local



janvie

Les superamas voisins



Expansion de l'Univers

- Fait observationnel : Les galaxies s'éloignent toutes les unes des autres (décalage Doppler)
- Vitesse $v \propto d \Rightarrow v = H \times d$ (Loi de Hubble; 1920)
- Plus précisément, si R est une distance caractéristique dans l'Univers

$$H_0 = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \approx 75 \ \mathrm{km} \ \mathrm{s}^{-1} \ \mathrm{Mpc}^{-1}$$

- Décalage spectral z : une raie spectrale de longueur d'onde théorique λ est observée à la longueur d'onde λ_0

$$\lambda_0 = \lambda(1+z) \qquad z \approx v/c \quad \Rightarrow \quad cz = H_0 d$$

- Valeurs typiques : galaxie « proche » : $z \approx 0.1$;
galaxie « éloignée » : $z > 0.5$; quasar : $z < 5\text{-}10$;
Fond diffus cosmologique : $z = 1500$
- $1/H_0$ = temps de Hubble ≈ 13.1×10^9 années

  = limite supérieure de l'âge de l'Univers, si l'expansion a été freinée par la gravitation
- Age du système solaire ≈ 4.65×10^9 années $< 1/H_0$

Le paradoxe d'Olbers

- Fait observationnel : La nuit, le ciel est… noir ! Paradoxal ?
- Supposons l'Univers infini et uniformément rempli d'étoiles de luminosité L. Le flux reçu sur Terre s'écrit

$$F = \int_0^{+\infty} 4\pi r^2 \times n \times \frac{L}{r^2}\,\mathrm{d}r \to +\infty$$

- Oui, mais les étoiles se cachent les unes les autres. Considérons un cylindre droit de surface S et de longueur l, et que chaque étoile cache une surface a. On « bouche » S avec S/a étoiles, c'est-à-dire avec une longueur l telle qu'il y ait exactement ce nombre d'étoiles dans le cylindre

$$nlS = \frac{S}{a} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{an}$$

- Numériquement, en prenant des paramètres solaires : $l \approx 10^{23}$ AL
- En fait, la durée de vie des étoiles est limitée (10—20 × 10^9 ans). Donc on ne peut pas voir au-delà de $\sim 10^{10}$ AL $\Rightarrow$ Le ciel est $10^{10}/10^{23} = 10^{-13}$ fois moins brillant que la surface solaire. Cela correspond à peu près à l'observation.

Le modèle standard de Big Bang

- C'est le modèle de base de la cosmologie qui explique beaucoup de choses.
- L'Univers est parti d'une « singularité » il y a ~15 milliard d'années, où la température T et la densité ρ étaient « infinies ».
- A partir de là, on a de manière régulière

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} < 0$$

- Et si R désigne une dimension caractéristique, on a aussi $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} > 0$
- L'Univers est en expansion. L'espace et le temps se dilatent avec lui. La variation dans le temps de cette expansion décrit le modèle

Gravitation – Cosmologie

2. Univers Newtonien
   - Introduction
   - Equation de Friedmann
   - Paramètres cosmologiques
   - Solutions de l'équation de Friedmann
   - Univers plat, ouvert, fermé, stationnaire

Univers Newtonien

- C'est un modèle d'expansion où le temps et l'espace sont fixes et où la gravité est décrite par la loi de Newton.
- C'est une approximation pas trop mauvaise…
- C'est un modèle à symétrie sphérique où la seule variable importante est le rayon *r(t)*.

$$r(t) = a(t)\, r_0 \quad ; \quad v(t) = H(t)\, r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} r_0$$

- *a(t)* est le facteur d'échelle, et les grandeurs « 0 » correspondent aux quantités « aujourd'hui » (à t_0)

$$H(t)\, a(t)\, r_0 = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} r_0 \quad \Rightarrow \quad H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}}{a}$$

- La masse se conserve au cours de l'expansion ⇒ la densité moyenne diminue

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\rho(t_0) r_0^3 = \tfrac{4}{3}\pi\rho(t) r(t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\rho(t) a(t)^3 r_0^3$$

$$\Rightarrow \quad \rho(t) = \rho(t_0) a(t)^{-3} = \rho_0 a(t)^{-3}$$

Equation de Friedmann

- C'est l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'Univers Newtonien
- Considérons une particule en mouvement radial la distance *r* dans l'Univers à symétrie sphérique; *M(r)* est la masse à l'intérieur de la sphère de rayon *r*

$$\ddot{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{G}{r^2} \times \frac{4\pi}{3}\rho r^3$$

$$\ddot{a} r_0 = -\frac{4\pi G}{3} a r_0 \rho_0 a^{-3} \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} + \frac{4\pi G \rho_0}{3a^2} = 0$$

- On multiplie par d*a*/d*t* et on intègre

$$\ddot{a}\dot{a} + \frac{4\pi G \rho_0}{3a^2}\dot{a} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G \rho_0}{3a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G \rho_0}{3a} = cst = -\frac{k}{2}$$

$$\boxed{\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho_0}{3a} = -k}$$

- C'est équivalent à une conservation de l'énergie mécanique

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 r_0^2 \qquad E_P = -\frac{GmM(r)}{r} = -\frac{4\pi Gm}{3ar_0}\rho a^3 r_0^3 = -\frac{4\pi Gm}{3}\rho_0 a^{-3} a^2 r_0^2$$

$$E = E_P + E_C = mr_0^2 k$$

Equation de Friedmann (2)

- k est proportionnel à l'énergie du système (facteur négatif)
  1. $k>0$ (énergie négative). Univers fermé = Univers de Friedman sphérique
  2. $k<0$ (énergie positive). Univers ouvert = Univers de Friedman hyperbolique
  3. $k=0$ (énergie nulle). Univers plat = Univers d'Einstein – de Sitter

- Moyennant un choix correct d'unités, on peut se ramener à $k=0,+1$ ou -1

- Ces solutions sont intéressantes car très analogues à ce qu'on trouve avec la Relativité (l'Univers est très plat!)
- Analogies
  - Newton : k = constante (énergie) $\leftrightarrow$ Einstein : k = courbure de l'Espace-temps
  - Newton : ρ = densité de matière $\leftrightarrow$ Einstein : ρ = densité d'énergie totale

Paramètres cosmologiques

- Ce sont des grandeurs caractéristiques accessibles à l'observation
- *La « constante » de Hubble H* (qui dépend en fait du temps) :

$$H = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

- *Le facteur de décélération q* :

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$$

C'est une quantité sans dimension qui vaut 0 si d*a*/d*t* = cst.

- *La densité critique* ρ_c :

Celle qui correspond à *k=0* dans l'équation de Friedmann

$$0 = -k = \dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3a} = \dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_c = \frac{3\dot{a}^2}{8\pi G a^2} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

- *Le facteur de densité Ω* : $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$

Si $\Omega=1$, $\rho=\rho_c$, $k=0$. L'Univers est plat.

Si $\Omega<1$, $\rho<\rho_c$, $k<0$. L'Univers est ouvert.

Si $\Omega>1$, $\rho>\rho_c$, $k>0$. L'Univers est fermé.

Solutions de l'équation de Friedmann

- On réécrit d'abord l'équation en fonction des paramètres cosmologiques.

$$\ddot{a} + \frac{4\pi G \rho_0}{3a^2} = \ddot{a} + \frac{4\pi G \rho a}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G \rho a}{3} = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -qH^2$$

$$-k = \dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{a^2} = H^2 - 2qH^2$$

- Ceci reste vrai à l'époque « 0 » (actuelle, *a=1*) : $-k = H_0^2 - 2q_0 H_0^2$
- Donc l'équation générale se récrit

$$-\frac{k}{a^2} = \frac{H_0^2(1-2q_0)}{a^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi G \rho_0}{3a^3} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2q_0 H_0^2}{a^3}$$

$$\boxed{\dot{a}^2 = H_0^2\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}\right)}$$

- Remarques :
  - Univers plat : *k=0* ⇒ *q=1/2*
  - Univers ouvert : *k<0* ⇒ *q<1/2*
  - Univers fermé : *k>0* ⇒ *q>1/2*

Solution pour Univers plat

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{H_0^2}{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = \frac{H_0}{\sqrt{a}}$$

- Solution : $\frac{2}{3} a^{3/2} = H_0 t + Cte$

- On fixe l'origine des temps ($t=0$) quand $a=0$, donc la constante est nulle

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}$$

- L'époque actuelle « 0 » correspond à $a=1$, donc $t_0 = \frac{2}{3H_0}$
  C'est l'« âge » de l'Univers

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} H_0 \right)^{2/3} t^{-1/3} \quad \Rightarrow \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

- En calculant, on trouve bien $q(t)=1/2$ pour tout t.
- Application numérique : H_0=75 km.s^{-1}.Mpc^{-1} $\Rightarrow$ t_0=8.7 milliards d'années

Entre 6.5 et 13 milliards d'années pour H_0 variant de 50 à 100 km.s^{-1}.Mpc^{-1}

Solution pour Univers fermé

$$\dot{a} = H_0\sqrt{1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}} \quad \Rightarrow \quad H_0 \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}}}$$

- Pour intégrer on change de variable. On a nécessairement $a < a_m = \frac{2q_0}{2q_0 - 1}$
- On pose donc $x=a/a_m$. x varie entre 0 et 1. L'équation devient

$$H_0 \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}}} = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

- On change encore de variable en posant $x=(1-\cos\theta)/2$. θ varie entre 0 et π

$$H_0 \mathrm{d}t = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\,\frac{\sin\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$H_0 \mathrm{d}t = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos^2\theta)}{1+\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{H_0 t = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}(\theta - \sin\theta) \quad \text{et} \quad a = \frac{q_0}{2q_0 - 1}(1-\cos\theta)}$$

Solution pour Univers fermé (2)

$$H_0 t = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}(\theta - \sin\theta) \quad \text{et} \quad a = \frac{q_0}{2q_0 - 1}(1 - \cos\theta)$$

- L'époque actuelle correspond à $a=1$. Donc $\cos\theta_0 = \frac{1}{q_0} - 1$
- On a alors l'âge de l'Univers :

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\left[\arccos\left(\frac{1}{q_0} - 1\right) - \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0}\right]$$

- Application numérique avec H_0=75 km.s^{-1}.Mpc^{-1} et $q_0=1$
  On trouve t_0=7.44 milliards d'années
- L'Univers est plus jeune que dans le cas plat (l'expansion a ralenti)
- On retrouve la valeur de l'Univers plat pour $q_0 \to 1/2$
- L'expansion se poursuit jusqu'à $a=a_m$ ($\theta=\pi$), soit $t_m = \frac{1}{H_0}\frac{\pi q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}$
  et se recontracte après jusqu'à $2t_m$.
- Numériquement t_m=41 millards d'années, tend vers $+\infty$ pour $q_0 \to 1/2$

Solution pour Univers ouvert

$$\dot{a} = H_0\sqrt{1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}} \quad \Rightarrow \quad H_0 \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}}}$$

- Pour intégrer on change de variable.

$$a = \frac{2q_0}{1 - 2q_0}x \quad \Rightarrow \quad H_0 \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{a}}} = \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

- On change encore de variable en posant $x=(\cosh\psi-1)/2$.

$$H_0 \mathrm{d}t = \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}\sqrt{\frac{\cosh\psi - 1}{\cosh\psi + 1}}\,\frac{\sinh\psi}{2}\,\mathrm{d}\psi$$

$$H_0 \mathrm{d}t = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}\sqrt{\frac{(\cosh\psi - 1)(\cosh^2\psi - 1)}{\cosh\psi + 1}}\,\mathrm{d}\psi = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}(\cosh\psi - 1)\,\mathrm{d}\psi$$

$$\boxed{H_0 t = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}(\sinh\psi - \psi) \quad \text{et} \quad a = \frac{q_0}{1 - 2q_0}(\cosh\psi - 1)}$$

Solution pour Univers ouvert (2)

$$H_0 t = \frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}(\sinh\psi - \psi) \quad \text{et} \quad a = \frac{q_0}{1-2q_0}(\cosh\psi - 1)$$

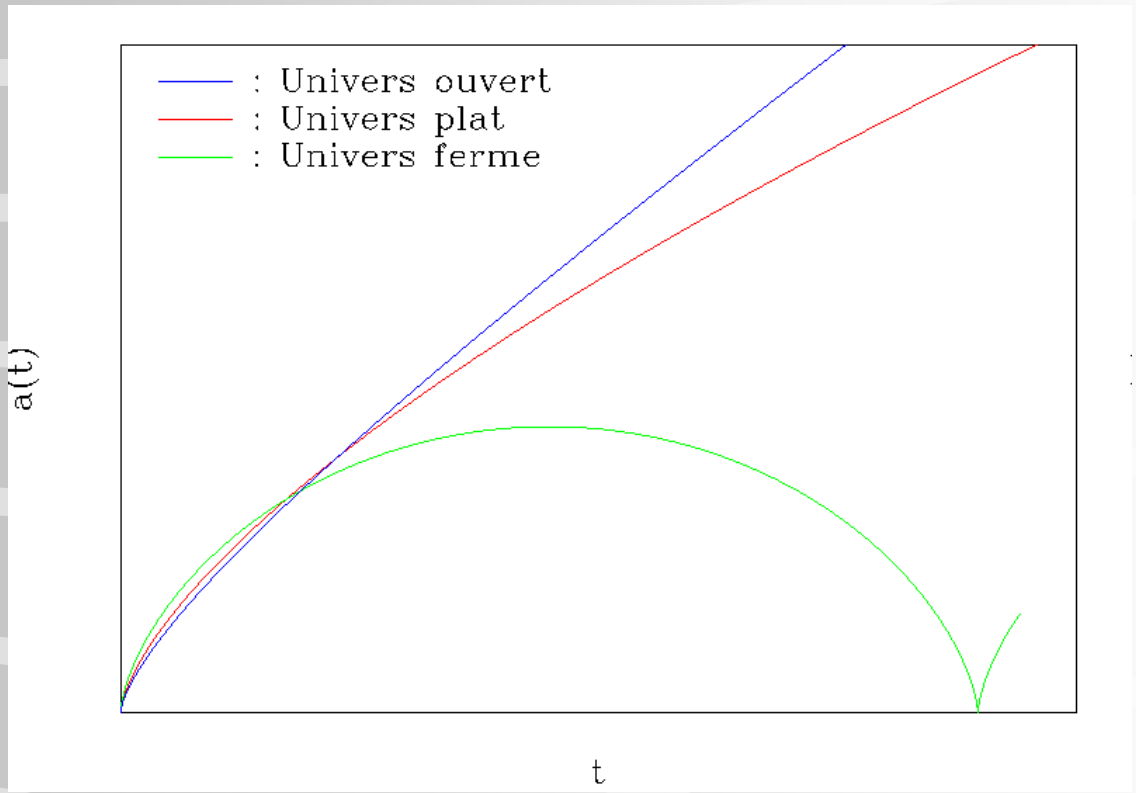
- L'époque actuelle correspond à a=1. Donc $\cosh\psi_0 = \frac{1}{q_0} - 1$
- On a alors l'âge de l'Univers :

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0} - \arg\cosh\left(\frac{1}{q_0} - 1\right)\right]$$

- da/dt est toujours positif : l'expansion se poursuit indéfiniment
- Remarque : quand $q_0 \to 0$, $t_0 \to 1/H_0$ (temps de Hubble = limite supérieure)
- On retrouve aussi la valeur de l'Univers plat pour $q_0 \to 1/2$
- On a pour toute valeur de $q_0 < 1/2$

$$\frac{2}{3H_0} < t_0 < \frac{1}{H_0}$$

Allure des solutions



- Avec les paramètres actuels, on trouve $\rho_c \approx 1.9\times10^{-26}$ kg.m^{-3}.
- Or la densité de matière (visible) dans l'Univers serait de l'ordre de $\rho_0 \approx 10^{-28}$--10^{-27} kg.m$^{-3} < \rho_c$
- On serait donc dans la situation d'Univers ouvert avec expansion infinie.
- *Du moins si on ne considère que la matière…*

Univers stationnaire

- Bondi, Gold & Hoyle (1948) : Modèle d'Univers en expansion, mais en état stationnaire grâce à une création permanente de matière ⇒ la densité de l'Univers reste constante.
- On suppose la constante de Hubble universelle. L'Univers s'étend de $dr = Hr \times dt$ en un temps dt. Pour garder la densité ρ constante, il faut créer une masse dM

$$dM = \rho dV = 4\pi r^2 \rho\, dr = 4\pi r^3 \rho H\, dt \Rightarrow \alpha = \frac{1}{V}\frac{dM}{dt} = \frac{3}{4\pi r^3} 4\pi r^3 \rho H = 3\rho H$$

- Numériquement avec $H=H_0$, $\rho=\rho_0$, $\alpha \approx 10^{-10}$ proton/m^3/an ≈1 galaxie/an. Indétectable !
- Mais ce modèle n'explique pas le rayonnement cosmologique ⇒ abandon.

$$H = H_0 = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt}(\ln a) \Rightarrow a(t) = a_0 \exp(H_0 t)$$

- Age de l'Univers :

$$t_0 = \int_{t=0}^{t=t_0} dt = \frac{1}{H_0}\int_{a=0}^{a=1} \frac{da}{a} = \frac{1}{H_0}[\ln a]_{a=0}^{a=1} \to +\infty$$

- *Univers éternel !*

Gravitation – Cosmologie

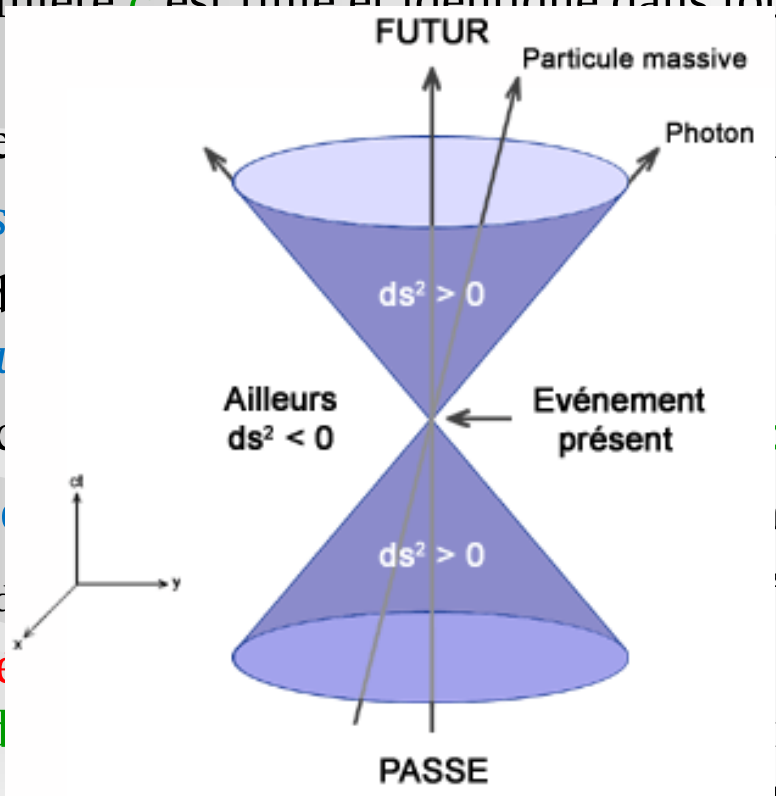
3. Univers et Relativité restreinte
   - Postulats. Notion de métrique
   - Relativité restreinte : Transformation de Lorentz
   - Applications : Composition des vitesses, paradoxe des jumeaux, décalage Doppler

Postulats de la Relativité restreinte
Notion de métrique

- Le temps et l'espace sont indissociables ⇒ Espace-temps à 4 dimensions
- La vitesse de la lumière c est finie et identique dans tous les référentiels.
- Toute information lumière ⇒ Certaines parties de l'Espace les (cône de lumière)
- Conséquence : la s st pas aisée à définir.
- Les coordonnées d s sont représentées par le *quadrivecteu*
- L'intervalle entre c dx,dy,dz,cdt)=(d**r**,cdt)
- En géométrie plan ements s'écrit

$$ds^2 = d\mathbf{M}.d\mathbf{M} = c^2 d \quad {}^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

- C'est le tenseur me end de la courbure de l'Espace-Temps. d référentiel.
- $ds^2>0$ = Intervalle du genre « temps »; $ds^2<0$ = Intervalle du genre « espace »; $ds^2=0$ = Intervalle du genre « lumière » (événements qui se voient)



Transformations de Galilée et de Lorentz

- On considère un référentiel $\mathcal{R}$ fixe et un autre $\mathcal{R}'$ en mouvement uniforme à vitesse v dans la direction Ox.
- Un même événement sera repéré par le quadrivecteur (x,y,z,ct) dans $\mathcal{R}$ et par (x',y',z',ct') dans $\mathcal{R}'$.
- En mécanique classique on a la transformation de Galilée (temps universel)

$$x' = x - vt \qquad t' = t$$

- Problème : Ceci ne laisse pas le ds^2 invariant (ni les équations de Maxwell)
- On cherche une transformation linéaire qui préserve le ds^2 (y et z restent inchangés)

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- Ceci impose les équations

$$c^2C^2 - A^2 = -1\,, \quad c^2CD - AB = 0\,, \quad c^2D^2 - B^2 = c^2$$

- Solution : Il existe un réel χ tel que

$$A = \cosh\chi\,, \quad C = \frac{\sinh\chi}{c}\,, \quad D = \cosh\chi\,, \quad B = c\sinh\chi\,.$$

Transformation de Lorentz (2)

- Signification de χ : L'origine de $\mathcal{R}'$ est en $x'=0$. Or

$$x' = x\cosh\chi + ct\sinh\chi = 0 = vt\cosh\chi + ct\sinh\chi \quad \Rightarrow \quad v = -c\tanh\chi$$

- Donc $$\cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad \sinh\chi = -\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(x - vt\right) \quad , \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - vx/c^2\right) \quad .}$$

- C'est la transformation de Lorentz. Elle se ramène à la transformation de Galilée pour $v \ll c$.
- Conséquence : les longueurs et le temps ne sont plus universels !
- Dans un référentiel en mouvement, les longueurs se contractent et le temps s'écoule plus lentement.

Application 1 : Composition des vitesses

- On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement à la vitesse v_1 dans la direction Ox par rapport à $\mathcal{R}$, et un autre $\mathcal{R}''$ en mouvement à vitesse v_2 par rapport à $\mathcal{R}'$. On a nécessairement

$$x' = \frac{x - v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad , \quad t' = \frac{t - v_1 x / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{x' - v_2 t'}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad , \quad t'' = \frac{t' - v_2 x' / c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad .$$

- On cherche à exprimer (x″,t″) directement en fonction de (x,t).

$$x'' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \quad , \quad t'' = \frac{t - wx / c^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \quad \text{avec} \quad w = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- Classiquement on aurait $w=v_1+v_2$. Ici on peut vérifier que $w=c$ dès que $v_1=c$ ou $v_2=c$ $\Rightarrow$ La vitesse de la lumière est indépendante du référentiel !
- Aspect mathématique : Les transformations de Lorentz forment un groupe pour la composition avec comme formule de composition

$$\text{Lorentz}\,(v_1) \circ \text{Lorentz}\,(v_2) = \text{Lorentz}\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}\right)$$

Application 2 : Le paradoxe des jumeaux

- Deux jumeaux, l'un (1) reste sur Terre; l'autre (2) effectue un voyage interstellaire aller-retour à vitesse v, et est à l'arrivée plus jeune que le premier.

1. Calcul dans le référentiel du jumeau 1 resté sur Terre. Temps passé pour le jumeau 1 : t_1
   - Phase 1 : voyage aller du jumeau 2; temps pour le jumeau 1 : $t_1/2$
     Pour le jumeau 2
     $$t' = \frac{t_1/2 - vx/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1/2 - v^2 t_1/2c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
   - Phase 2 : Voyage retour du jumeau 2 = situation symétrique. Au bout du voyage, le temps passé pour le jumeau 2 vaut
     $$t_2 = t_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
     Il est effectivement plus jeune !

- Oui, mais si on se place du point de vue du jumeau 2 (dans son référentiel), c'est son frère qui s'est éloigné de lui à vitesse –v et est revenu ensuite. C'est lui qui devrait donc être plus jeune. Paraxode ?

Application 2 : Le paradoxe des jumeaux

- Le paradoxe n'est qu'apparent…

2. Calcul dans le référentiel *initial* $\mathcal{R}'$ du jumeau 2, se déplaçant à vitesse v par rapport au jumeau 1. On appelle t_3 le temps dans $\mathcal{R}'$ où les deux jumeaux se retrouvent
   - Pendant tout le voyage, le jumeau 1 se déplace à vitesse v par rapport à $\mathcal{R}'$. Le temps écoulé dans son référentiel vaut

$$t_1 = t_3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

   - Phase 1 : voyage aller du jumeau 2, qui reste immobile par rapport à $\mathcal{R}'$ Temps pour le jumeau 2 : t''
   - Phase 2 : Voyage retour du jumeau 2. Il se déplace par rapport à $\mathcal{R}'$ à une vitesse v' jusqu'à rejoindre son frère. Temps pour le jumeau 2

$$t_2'' = t'' + (t_3 - t'')\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$$

   - Les jumeaux se rejoignent lorsque

$$x = vt_3 = v'(t_3 - t'') \quad \Rightarrow \quad t'' = t_3\frac{v'-v}{v'} \quad \Rightarrow \quad t_2'' = t_3\left(\frac{v'-v}{v'} + \sqrt{\frac{v^2}{v'^2} - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Application 2 : Le paradoxe des jumeaux

Mais, par composition des vitesses :

$$v' = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

On remplace

$$\Rightarrow \frac{v' - v}{v'} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad , \quad \frac{v^2}{v'^2} - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad t_2'' = t_3\left(\frac{v' - v}{v'} + \sqrt{\frac{v^2}{v'^2} - \frac{v^2}{c^2}}\right) = t_3\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

En définitive

$$t_2'' = t_1\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

C'est-à-dire la même chose que compté dans le référentiel du jumeau 1 !

Explication : Le référentiel lié au jumeau 2 n'est pas toujours inertiel (il fait demi-tour !). La situation n'est pas symétrique.

Application numérique : voyage aller-retour à $v=0.2c$ vers Proxima Centauri (4.3 AL). Le jumeau 1 vieillit de 43 ans, le jumeau 2 de 42.13 ans (–10.4 mois)

Application 3 : Décalage Doppler

- On considère une source lumineuse (étoile…) s'éloignant à la vitesse v par rapport à l'observateur.
- On raisonne dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de l'étoile. Un front d'onde arrive à l'observateur à $t=0$. Le front d'onde suivant est à une longueur d'onde λ' en arrière. Il rejoindra l'observateur à t' :

$$-\lambda' + ct' = vt' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{c-v}$$

- Dans le référentiel $\mathcal{R}$ de l'observateur, le temps correspondant vaut

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\lambda'}{c-v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

- La longueur d'onde vue depuis l'observateur vaut

$$\lambda = ct = \frac{c\lambda'}{c-v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \lambda'\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

- Et le décalage spectral (*redshift*) z

$$z = \frac{\lambda-\lambda'}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1 \qquad \approx \frac{v}{c} \quad \text{si } v \ll c$$

Application 3 : Décalage Doppler

- Une autre façon de le voir…
- On raisonne toujours dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de l'étoile. L'onde lumineuse émise est de la forme

$$\Phi(x',t') = \Re\left(A \exp\left(k'x' - \omega' t'\right)\right) \quad \text{avec} \quad \omega' = k'c$$

- L'observateur se déplace à la vitesse v par rapport à l'étoile. Dans son repère, on aura par transformation de Lorentz

$$x = \gamma(x' - vt'),\ t = \gamma\left(t' - vx'/c^2\right) \quad \Rightarrow \quad x' = \gamma(x + vt),\ t' = \gamma\left(t' + vx'/c^2\right) \quad .$$

- La phase de l'onde est indépendante du référentiel

$$k'x' - \omega' t' = k'\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)(x - ct) = k'\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}(x - ct)$$

- Ceci correspond à une onde de vecteur d'onde k avec

$$k = k'\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\lambda'$$

Gravitation – Cosmologie

4. Gravitation et Relativité Générale
   - Métrique et gravitation
   - Métrique de Schwarzschild, décalage gravitationnel
   - Métrique de Robertson-Walker, décalage cosmologique
   - Les trois redshifts
   - Mesure des distances dans un Univers courbe

Métrique et gravitation

- En présence de gravitation, la métrique de l'Espace-temps (le ds^2) est modifiée. On écrit dans le cas général $$ds^2 = \sum_{a,b} g_{ab}\, dx^a dx^b$$
- Le lien entre les g_{ab} (le Tenseur Métrique) et les sources de gravitation (= toute forme d'énergie = Tenseur Energie-Impulsion) se fait via ***l'Equation d'Einstein*** (équivalent relativiste de l'équation de Poisson)
- Exemple : Dans un potentiel gravitationnel faible U, on montre *qu'au premier ordre*, la métrique est modifiée en

$$ds^2_{\text{mod}} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dy^2$$

- En mécanique classique, les mouvements se font en suivant le principe de moindre action. Le mouvement minimise l'action $$A = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \dot{Q}, t\right) dt$$
- En relativité générale, les mouvements se font en minimisant la distance dans l'Espace-temps $$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{ds^2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\sum_{a,b} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda}}\, d\lambda$$
- Les mouvements se font en suivant les géodésiques de l'Espace-temps

Exemple : Métrique de Schwarzschild et *redshift* gravitationnel

- Dans le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle M, on montre que la métrique s'écrit en coordonnées sphériques

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/rc^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

- On introduit $R_s = 2GM/c^2$ (Rayon de Schwarzschild). La métrique s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - R_s/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

- On considère un photon émis en r_1 et reçu en r_2, avec $R_s < r_1 < r_2$. Le trajet est radial ($d\theta = d\phi = 0$). Le trajet du photon vérifie $ds^2 = 0$. On considère deux signaux successifs (période de l'onde) émis à intervalle Δt_1 et reçus à intervalle Δt_2. On a

$$c\,dt = \frac{dr}{1 - R_s/r} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_1 = \Delta t_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - R_s/r}$$

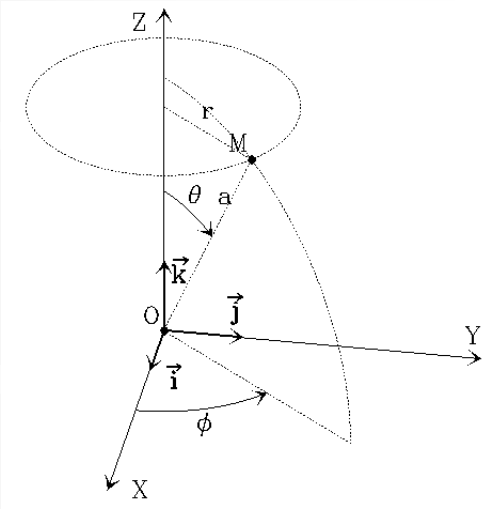
- Le temps propre dans le référentiel du photon vérifie

$$\Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r_1}}\,\Delta t_1 \quad \text{et} \quad \Delta\tau_2 = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r_2}}\,\Delta t_2$$

Exemple : Métrique de Schwarzschild et *redshift* gravitationnel

- On en déduit $$\frac{\Delta\tau_1}{\sqrt{1-R_s/r_1}} = \frac{\Delta\tau_2}{\sqrt{1-R_s/r_2}}$$
- Si $\Delta\tau_1 = c\lambda_1$ est la période de l'onde on en déduit
$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sqrt{1-R_s/r_2}}{\sqrt{1-R_s/r_1}} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{1-R_s/r_2}}{\sqrt{1-R_s/r_1}} - 1$$
- En particulier si $r_2 \to \infty$ (réception sur Terre), on a
$$z = \left(1-\frac{R_s}{r_1}\right)^{-1/2} - 1 \approx \frac{R_s}{2r_1} = \frac{GM}{r_1 c^2} \quad \text{si} \quad r_1 << R_s$$
- Interprétation : La différence $h\nu_1 - h\nu_2 > 0$ correspond à la différence d'énergie gravitationnelle $\Delta(GMm/r)$ gagnée par le photon pour remonter depuis r_1, à condition de donner une « masse » au photon de $m = h\nu/c^2$.
- Lorsque $r_1 \to R_s$, $z \to \infty$, $\Delta\tau_2 \to \infty$ même si $\Delta\tau_1$ est fini. Une chute libre sur l'horizon du trou noir durera un temps infini depuis un observateur extérieur.

Courbure de l'Espace-Temps
Métrique de Robertson-Walker



- L'Espace-Temps est courbe… ?
- Dans un plan euclidien on écrit l'élément de longueur

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad \text{(coordonnées polaires)}$$

- On se place maintenant sur une sphère de rayon *a*.
  Un point est repéré par ses coordonnées sphériques *(θ,ϕ)*.
  L'élément de longueur s'écrit

$$d\sigma^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 d\phi^2 \quad \left(r = \text{rayon projeté} = a \sin\theta\right)$$

- Ca ressemble… Sur une surface de type hyperboloïde, on trouverait

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/a^2} + r^2 d\phi^2$$

- On introduit la courbure $\kappa = \pm 1/a^2$. Les trois formules se réunissent en une seule avec $\kappa = 0$ pour un plan, $\kappa > 0$ pour une « sphère » et $\kappa < 0$ pour un « hyperboloïde ».

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\phi^2$$

Courbure de l'Espace-Temps
Métrique de Robertson-Walker

- Ceci se généralise en dimension 3. Il existe 3 types d'espaces homogènes et isotropes. L'un est l'espace euclidien, les autres sont des analogues de la sphère et de l'hyperboloïde. En coordonnées sphériques (r,θ,ϕ), on a

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

- On calcule la distance entre l'origine et un point de coordonnées (R,θ,ϕ)

$$d(R) = \int d\sigma = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2}}$$

- Oui, mais l'Univers est en expansion. On a $D(R,t) = a(t)\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2}}$

- On aboutit à la métrique de Robertson-Walker pour Univers homogène, isotrope en expansion

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]}$$

Application : Décalage spectral cosmologique

- On considère un photon se déplacement radialement ($d\theta=d\phi=0$) du point d'émission $r=r_e$ à $t=t_e$, et reçu à $r=r_0$ et $t=t_0$. Le déplacement se fait à $ds^2=0$ (photon). On a donc

$$0 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \frac{dr^2}{1-\kappa r^2}$$

- On intègre

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{r_e}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2}}$$

- On considère l'émission une période de l'onde plus tard. On a

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{r_e}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-\kappa r^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_e+\delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow -\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0$$

- La période de l'onde $\delta t=\delta\tau$ (temps propre) est très petite: $-\frac{\delta t_e}{a(t_e)} + \frac{\delta t_0}{a(t_0)} = 0$

Décalage spectral cosmologique

- La période de l'onde vérifie $\delta t = \lambda/c = 2\pi/kc$. On a donc

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 = \frac{a_0}{a_e} - 1$$

- On a $a_0 > a_e$, donc $z > 0$. La longueur d'onde reçue est supérieure à celle d'émission (*redshift*). C'est une conséquence de l'expansion de l'Univers.
- Un événement observé à un redshift z s'est déroulé dans un Univers $1/(1+z)$ fois plus contracté.
- Redshift cosmologique ≠ redshift Doppler (les galaxies sont « immobiles »)
- Pourtant, si z est faible, ça se confond avec un redshift Doppler….

$$z = \frac{a_0}{a_e} - 1 = \frac{\delta a}{a} \approx \frac{\dot{a}}{a}\delta t = H\,\delta t \qquad \text{Avec} \qquad v = Hd\ , \quad z = \frac{v}{d}\delta t = \frac{v}{c}$$

- *Application numérique*. On prend un Univers d'Einstein-De Sitter avec $a(t) \propto t^{2/3}$, c'est-à-dire $1+z = (t_0/t_e)^{2/3}$. On prend $t_0 = 10 \times 10^9$ ans (âge de l'Univers).
  - Pour $z=5$ (Quasar), on trouve $t_e = 0.68$ milliards d'années
  - Pour $z=1500$ (Corps noir cosmologique), on trouve $t_e = 200000$ ans

Résumé : Les trois *redshifts*

- Redshift Doppler :

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1 \approx \frac{v}{c} \quad \text{si } v << c$$

- Redshift gravitationnel :

$$z = \left(1 - \frac{2GM}{r_1 c^2}\right)^{-1/2} - 1 \approx \frac{GM}{r_1 c^2} \quad \text{si} \quad r_1 << R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

- Redshift cosmologique :

$$z = \frac{a_0}{a_e} - 1 \approx \frac{v}{c} \quad \text{avec} \quad v = Hd$$

Mesure des distances dans l'Univers

- Dans un Univers courbe en expansion, ce n'est pas intuitif… Il y a plusieurs définitions. On se place dans la métrique de Robertson-Walker

1. Distance lumineuse : C'est la distance qu'on obtient en comparant l'énergie lumineuse L émise par un objet lointain et le flux $F(r_0)$ reçu par l'observateur à la distance $r=r_0-r_e$: $L = 4\pi d_{\text{lum}}^2 F(r_0)$

- $d_{\text{lum}} \neq a_0(r_0-r_e)=a_0 r$ à cause de l'expansion et du redshift. Le flux reçu est diminué d'un facteur $(1+z)^2$. Un facteur $(1+z)$ dû à la diminution de l'énergie des photons (redshift cosmologique), et l'autre dû à la dilatation de l'intervalle de temps de réception

$$F(r_0) = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 a_0^2 r^2} \quad \Rightarrow \quad d_{\text{lum}} = (1+z)a_0 r = \frac{a_0^2}{a_e} r = \frac{a_0^2}{a_e}(r_0 - r_e)$$

2. Distance angulaire : On voit une galaxie lointaine sous un angle $d\theta$. La taille physique D de la galaxie vérifie alors $D=d_{\text{ang}}d\theta$. Le problème est déterminé à la date d'émission des photons de la galaxie t_e (r_e). On a donc

$$d_{ang} = a(t_e)r$$

3. Distance de vol : C'est la distance parcourue par les photons $d_{\text{vol}} = c(t_0 - t_e)$

Mesure des distances dans l'Univers

- Calculs explicites dans le cas d'un Univers d'Einstein-De Sitter ($\kappa=0$)

$$a(t)=\left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} \quad ; \mathrm{d}s^2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)}=\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad r=\int_{t_e}^{t_0}\frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)}=3c\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{-2/3}\left(t_0^{1/3}-t_e^{1/3}\right)$$

Distance lumineuse :

$$d_{lum}=(1+z)a(t_0)r=(1+z)\left(\frac{3}{2}H_0 t_0\right)^{2/3}3c\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{-2/3}\left(t_0^{1/3}-t_e^{1/3}\right)=(1+z)3ct_0\left(1-\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right)$$

$$=3ct_0\left(1+z-\sqrt{1+z}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{a_e}{a_0}=\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{2/3}=\frac{1}{1+z}$$

Distance angulaire :

$$d_{ang}=a(t_e)r=\left(\frac{3}{2}H_0 t_e\right)^{2/3}3c\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{-2/3}\left(t_0^{1/3}-t_e^{1/3}\right)=3ct_0\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right)$$

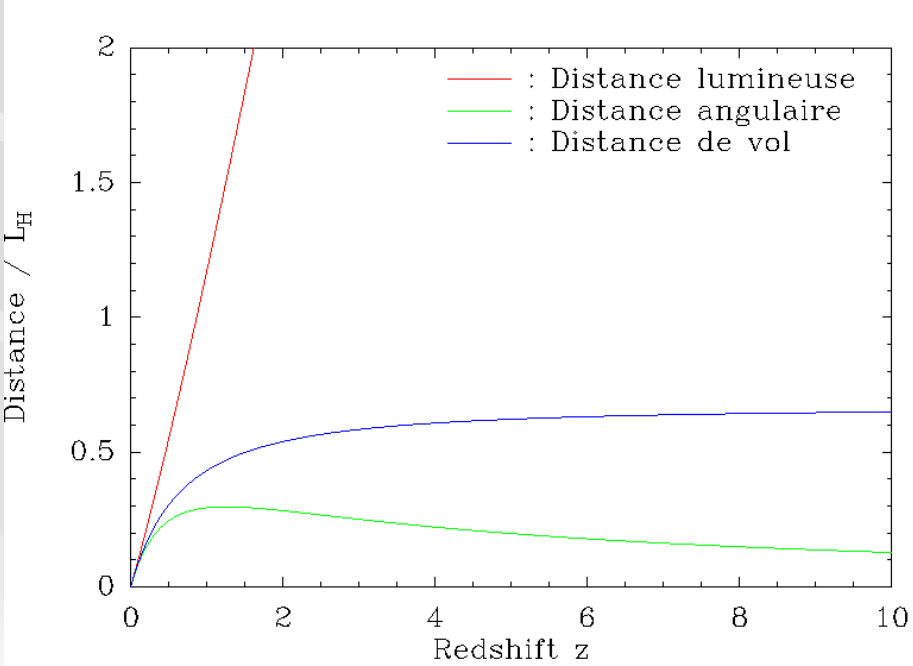
Distance de vol : $d_{vol}=c(t_0-t_e)=ct_0\left(1-\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right)$

Mesure des distances dans l'Univers

- Avec $t_0=2/(3H_0)$ (âge de l'Univers), on peut exprimer cela en fonction de la distance de Hubble $L_H=c/H_0 \approx 5000$ Mpc

$$d_{\text{lum}} = 2L_H\left(1+z-\sqrt{1+z}\right), \quad d_{\text{ang}} = 2L_H\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right), \quad d_{\text{vol}} = \frac{2L_H}{3}\left(1-\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right)$$

- On vérifie que lorsque $z \to 0$ $(t_0 \to t_e)$, on a $d_{\text{lum}} \approx d_{\text{ang}} \approx d_{\text{vol}} \approx zL_H$.
- Le comportement quand $z \to \infty$ diffère. d_{lum} est toujours croissante; d_{ang} présente un maximum en $z=1.25$ et décroît ensuite; d_{vol} croît toujours mais tend vers $2L_H/3$.
- Explication : Pour d_{vol}, l'âge de l'Univers est fini; pour d_{ang}, un objet apparaît proche soit parce qu'il est proche aujourd'hui, soit parce qu'il a été proche dans le passé à cause de la petite taille de l'Univers.



Gravitation – Cosmologie

5. Univers relativiste en expansion
   - Equation de Friedmann relativiste
   - Equations d'état
   - Les paramètres Ω
   - Résoudre l'équation de Friedmann ?
   - Univers à constante cosmologique nulle, Univers vide
   - Univers froid avec constante cosmologique
   - Solutions complètes

Equation de Friedmann relativiste

- C'est l'équation qui régit l'expansion de l'Univers homogène isotrope en métrique de Robertson-Walker
- On utilise l'équation d'Einstein reliant la masse (l'énergie) à la géométrie de l'Univers (Tenseur Energie-Impulsion ↔ Tenseur métrique / Tenseur de courbure)
- On aboutit aux système de deux équations :

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} = 4\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) - \Lambda c^2$$

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2 = a^2\left[4\pi G\left(\rho - \frac{P}{c^2}\right) + \Lambda c^2\right]$$

- ρ est la densité de masse
- P est la pression (≡ densité volumique d'énergie; (toute forme d'énergie → gravitation);
- κ est la courbure (*cf.* Robertson-Walker);
- Λ est la constante cosmologique = constante d'intégration ⇒ Energie noire

Equation de Friedmann relativiste

- On élimine $\ddot{a}$ entre les deux équations (combinaison linéaire ou substitution)
- Il reste

$$\boxed{\dot{a}^2 + \kappa c^2 = \frac{8\pi G a^2 \rho}{3} + \frac{1}{3} a^2 \Lambda c^2}$$

- C'est l'équation de Friedmann relativiste. Si on identifie $k \equiv \kappa c^2$ (classique), pour $\Lambda=0$, on retrouve l'équation de Friedmann Newtonienne !
- Mais il y a plus que juste la masse usuelle dans ρ…
- Pour résoudre l'équation Newtonienne, on avait utilisé la conservation de la masse ($\rho a^3=cte$). Dans un Univers courbe, c'est plus compliqué…
- On dérive l'équation de Friedmann, et on élimine $\ddot{a}$ avec l'autre équation. On aboutit à (quelques calculs…)

$$3\dot{a}\rho + a\dot{\rho} + \frac{3P}{c^2}\dot{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^3\rho\right) = -\frac{3a^2\dot{a}P}{c^2}$$

- L'introduction de la pression fait qu'on n'a plus $\rho a^3=cte$!

Equation de Friedmann et équation d'état

- La résolution du système d'équations passe par un modèle de lien entre ρ et P = une équation d'état
- Ce sera toujours quelque chose de la forme $P = \varpi \rho c^2$ où ϖ est un coefficient numérique
- Exemple 1 : gaz parfait classique monoatomique

$$\frac{P}{\rho} = \frac{kT}{\mu} \quad \text{avec} \quad \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad \Rightarrow \quad \varpi = \frac{1}{3}\frac{v^2}{c^2} = \frac{kT}{\mu c^2}$$

- Exemple 2 : gaz parfait ultrarelativiste et/ou rayonnement

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc \quad \Rightarrow \quad \varpi = \frac{1}{3}$$

- Pour un ϖ fixé, on a (*cf.* coefficient adiabatique γ…)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^3\rho\right) = -\frac{3a^2\dot{a}P}{c^2} = -3\varpi a^2\dot{a}\rho \quad \Rightarrow \quad 3a^2\dot{a}\rho + a^3\dot{\rho} = -3\varpi a^2\dot{a}\rho$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3(1+\varpi)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^{3(1+\varpi)}\rho\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+\varpi)}$$

Les paramètres Ω

- On réécrit l'équation de Friedmann en divisant par $\dot{a}^2$:

$$-\frac{\kappa c^2}{\dot{a}^2}+\frac{8\pi G a^2\rho}{3\dot{a}^2}+\frac{1}{3}\frac{a^2\Lambda c^2}{\dot{a}^2}=1$$

- Le terme central se réécrit

$$\frac{8\pi G a^2\rho}{3\dot{a}^2}=\frac{8\pi G\rho}{3H^2}=\frac{\rho}{\rho_c}=\Omega_m \quad \text{(paramètre de densité " matière")}$$

- Du coup on définit pour les autres

$$\Omega_\Lambda=\frac{\Lambda a^2c^2}{3\dot{a}^2}=\frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad \text{(paramètre de densité " constante cosmologiq ue")}$$

$$\Omega_\kappa=-\frac{\kappa c^2}{\dot{a}^2} \quad \text{(paramètre de densité " courbure")}$$

- Et l'équation de Friedmann prend la forme très simple

$$\boxed{\Omega_\kappa+\Omega_m+\Omega_\Lambda=1}$$

Résoudre l'équation de Friedmann ?

- Si on veut résoudre l'équation de Friedmann…

$$\dot{a}^2 = -\kappa c^2 + \frac{8\pi G a^2 \rho}{3} + \frac{1}{3} a^2 \Lambda c^2$$

- On doit décomposer la « matière » en composantes ayant chacune son ϖ :

$$\dot{a}^2 = -\kappa c^2 + \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_{0,i} a^{-(1+3\varpi_i)} + \frac{1}{3} a^2 \Lambda c^2$$

- La résolution théorique n'est pas simple dans le cas général…
- On réécrit cela en fonction des Ω « 0 » (aujourd'hui)

$$\Omega_{m,i,0} = \frac{8\pi G \rho_{0,i}}{3\dot{a}_0^2} ; \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{3\dot{a}_0^2} ; \Omega_{\kappa,0} = -\frac{\kappa c^2}{\dot{a}_0^2}$$

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2 \dot{a}_0^2} = \frac{\Omega_{\kappa,0}}{a^2} + \sum_i \Omega_{m,i,0} a^{-3(1+\varpi_i)} + \Omega_{\Lambda,0}$$

Résoudre l'équation de Friedmann ?

- On normalise le temps

$$\tau = H_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{H_0} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{H_0 \mathrm{d}t} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}$$

- On peut donc réécrire l'équation de Friedmann :

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{\Omega_{\kappa,0}}{a^2} + \sum_i \Omega_{m,i,0} a^{-3(1+\varpi_i)} + \Omega_{\Lambda,0}$$

- Il existe des cas particuliers intéressants.
- Remarque : La constante cosmologique se comporte comme une composante avec $\varpi=-1$…

Univers à constante cosmologique nulle

- Exemple : Univers plat ($\kappa=0$, $\Omega_\kappa=0$) et monocomposante ($\Omega_m=1$). L'équation de Friedmann devient

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = a^{-(1+3\varpi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = a^{-(1+3\varpi)/2}$$

$$\Rightarrow \quad a(t) = \left(\frac{3(1+\varpi)}{2}\tau\right)^{\frac{2}{3(1+\varpi)}} = \left(\frac{3(1+\varpi)}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3(1+\varpi)}} \quad (\text{avec} \quad a = 0 \text{ à } t = 0)$$

- L'âge de l'Univers s'obtient quand $a(t_0)=1$, donc

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\varpi)}\frac{1}{H_0}$$

- Pour $\varpi=0$ (matière « froide » = pression négligeable = Univers « de poussière », dominé par la matière), on retrouve l'Univers d'Einstein-de Sitter avec $a(t) \propto t^{2/3}$;
- Pour $\varpi=1/3$ (matière « relativiste » = Univers dominé par le rayonnement), on trouve $a(t) \propto t^{1/2}$ (Ere radiative);

Univers à constante cosmologique nulle

- Tous ces modèles ont tendance à être abandonnés aujourd'hui… parce qu'ils prévoient tous une expansion qui doit ralentir. En effet,

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} = 4\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{a} \text{ décroît}$$

- Or les faits observationnels contredisent ces résultats. Déjà

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\varpi)}\frac{1}{H_0} < \frac{1}{H_0} \approx 13{,}6 \text{ millards d'années, pour } H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{kpc}^{-1}$$

- Or les plus vieux amas globulaires ont à peu près cet âge là….
- De plus, Permutter, Riess & Schmidt (Prix Nobel 2011) ont montré que l'expansion de l'Univers est en accélération

$\Rightarrow$ Il faut une constante cosmologique non nulle !

Univers vide

- Ou si on préfère, Univers dominé par la constante cosmologique…($\rho=P=0$)

$$\dot{a}^2 = -\kappa c^2 + \frac{1}{3} a^2 \Lambda c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \Omega_{\Lambda,0} a^2 + 1 - \Omega_{\Lambda,0}$$

- On a nécessairement κ<0 (sinon pas de Big Bang). On résout en passant par

$$x = a\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{1-\Omega_{\Lambda,0}}} = a\sqrt{-\frac{\Lambda}{3\kappa}} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{1-\Omega_{\Lambda,0}}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\,\tau\right) = \sqrt{-\frac{3\kappa}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,ct\right)$$

- Cas particulier : $\kappa=0$ ($\Omega_\Lambda=1$) :
  (Univers en expansion de de Sitter) $\quad a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}\,t}$

Univers froid avec constante cosmologique

- Sans pression, une composante avec $\varpi=0$ (= aujourd'hui !)

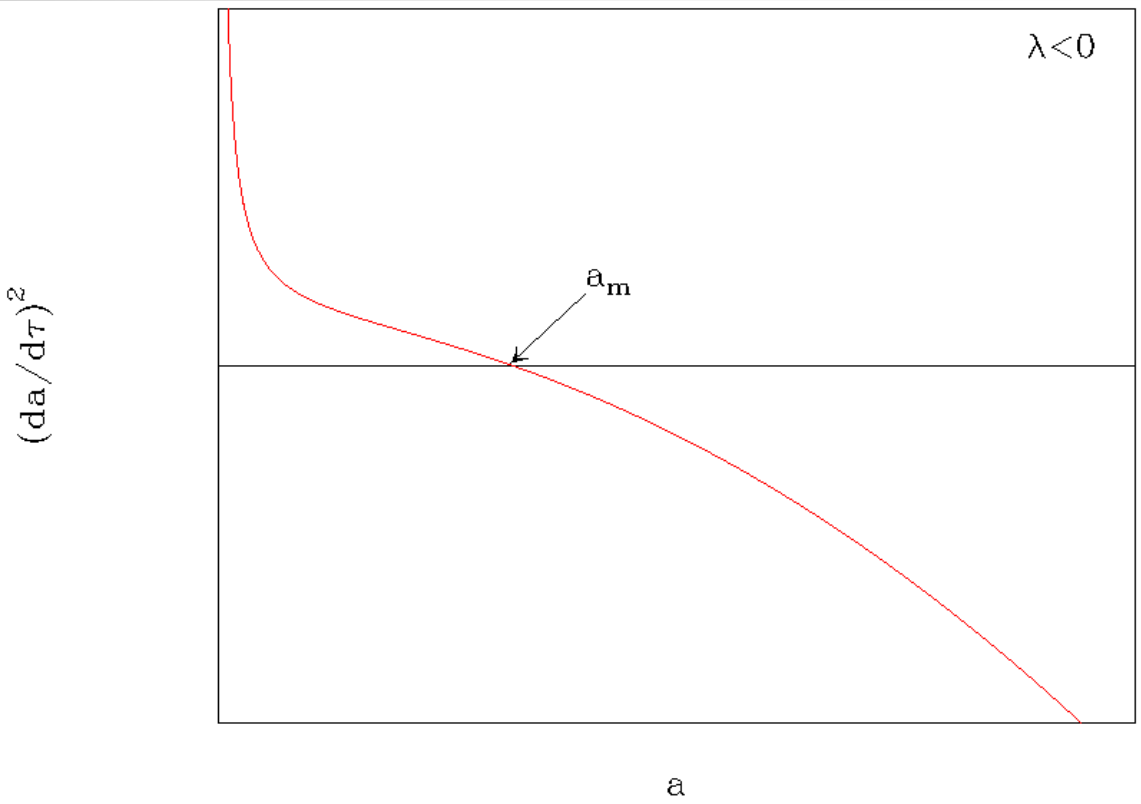
$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \Omega_{\kappa,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$$

- Pas de solution analytique simple…
- Univers primordial ($a \ll 1$) : Le terme $\Omega_{m,0}/a$ domine $\Rightarrow a \propto t^{2/3}$ (Einstein-de Sitter)
- Ensuite, ça dépend… du comportement de la fonction $f(a)=(da/d\tau)^2$. Pour $a \to 0$, $f(a)>0$.
- S'il existe une une valeur $a_m>0$ qui annule $f(a)$, alors l'expansion ne peut pas se poursuivre au-delà de $a_m \Rightarrow$ recontraction ensuite
- Si $f(a)>0$ pour tout $a>0$, alors l'expansion se poursuit indéfiniment.

Univers froid avec constante cosmologique

- Si $\Omega_{\Lambda,0}<0$ $(\Lambda<0)$, la fonction $f(a)$ est toujours décroissante, et valeur $a_m>0$ existe toujours
- L'expansion est d'abord ralentie, puis s'inverse

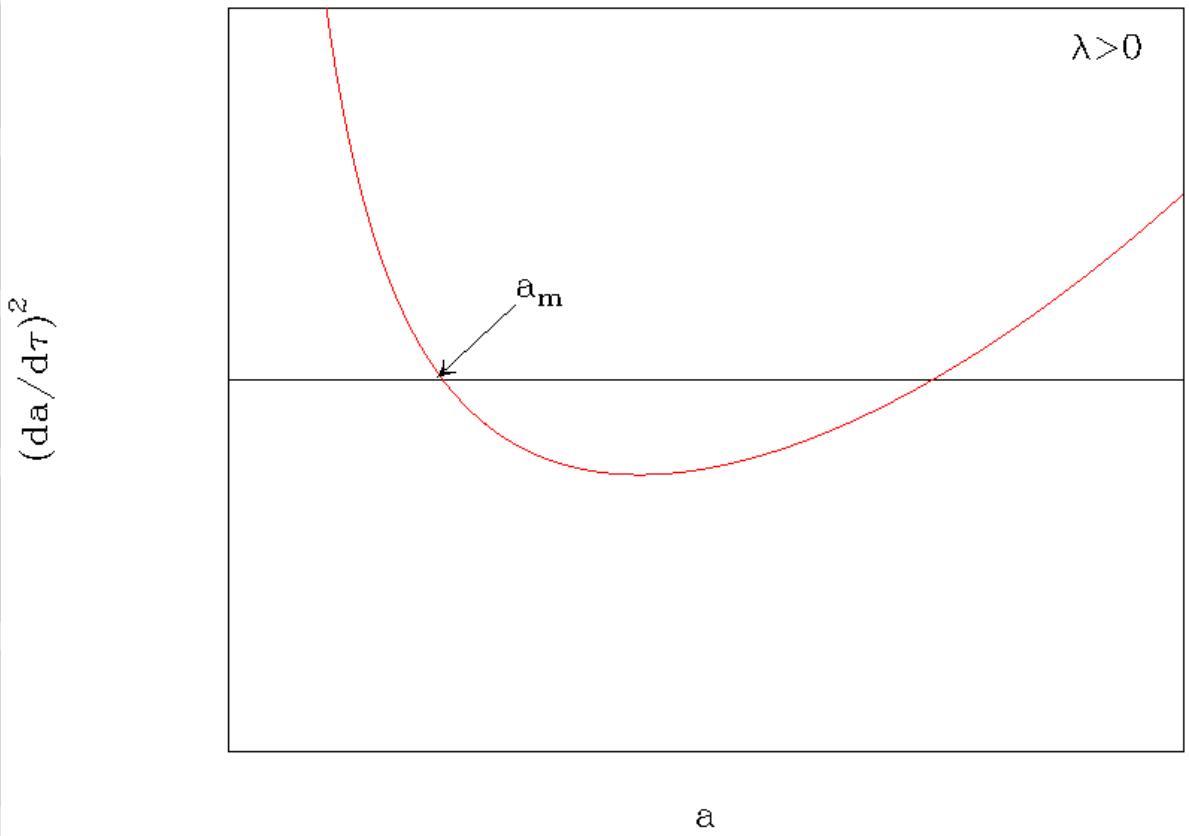
$\Rightarrow$ Incompatible avec une expansion accélérée !



Univers froid avec constante cosmologique

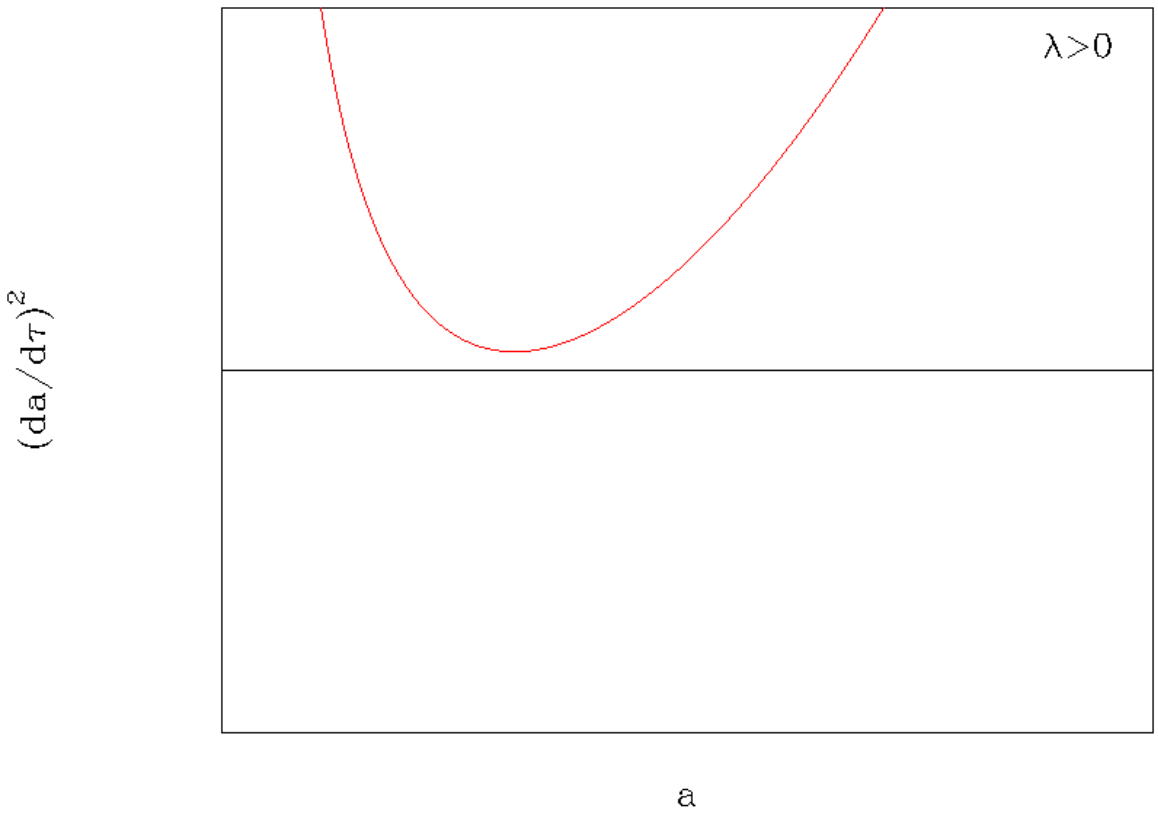
- Si $\Omega_{\Lambda,0}>0$ $(\Lambda>0)$, la fonction $f(a)$ est d'abord décroissante puis croissante ensuite. Pour $\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0}$ pas trop grand, $a_m>0$ existe toujours
- L'expansion est d'abord ralentie, puis s'inverse

$\Rightarrow$ Incompatible avec une expansion accélérée !



Univers froid avec constante cosmologique

- Pour $\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0}$ plus grand, $a_m>0$ n'existe plus.
- L'expansion est d'abord ralentie, puis accélère
- Pour a grand, $\Omega_{\Lambda,0}$ domine et on se rapproche du modèle d'Univers vide : expansion exonentielle !
  $\Rightarrow$ Potentiellement compatible avec l'observation !

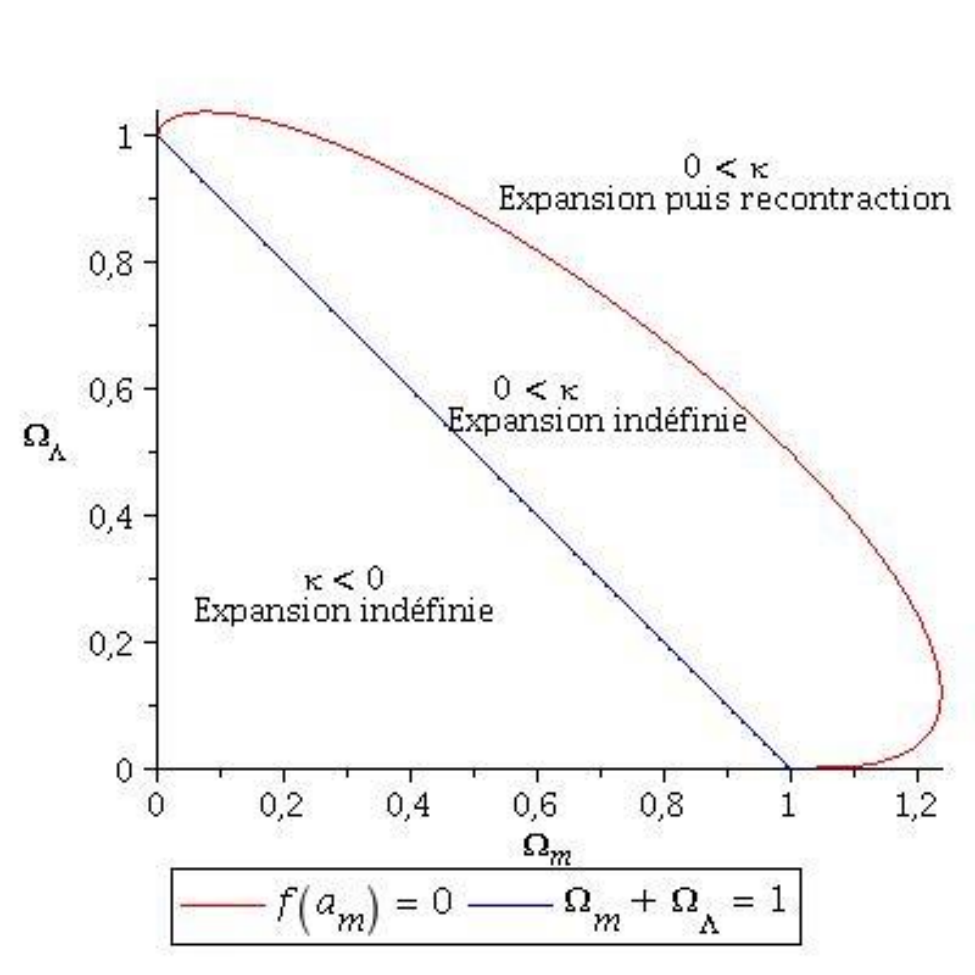


Univers froid avec constante cosmologique

- Pour $\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0} < 1$, l'expansion est indéfinie
- Pour $\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0} > 1$, l'expansion peut rester indéfinie…
- Sur la courbe rouge, il existe une solution stationnaire (Univers statique d'Einstein), caractérisée par

$$\rho = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} \; ; \; a = \sqrt{\frac{\kappa}{\Lambda}}$$

- Mais cette solution est instable…



Solutions complètes…

- Dans le cas général, l'Univers comprend d'autres composantes. L'équation de Friedmann se réécrit dans sa généralité

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \Omega_{\kappa,0} + \sum_i \Omega_{m,i,0} a^{-1-3\varpi_i} + \Omega_{\Lambda,0} a^2$$

- En dehors de la matière froide (ϖ=0), il faut au moins rajouter le rayonnement (ϖ=1/3)…

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \Omega_{\kappa,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \sum_i \Omega_{m,i,0} a^{-1-3\varpi_i} + \Omega_{\Lambda,0} a^2$$

- Univers primordial ($a \ll 1$) : Le terme $\Omega_{r,0}/a^2$ domine $\Rightarrow a \propto t^{1/2}$ (Ere radiative).
- Ensuite, la matière domine (Ere stellaire).

Gravitation – Cosmologie

6. Modèles cosmologiques et observations
   - Lien modèle – Observations ?
   - Distance, redshift et modèle d'Univers
   - Contrainte avec les Supernovae de type Ia
   - Le fond diffus cosmologique
   - Anisotropies du fond diffus, courbure
   - Notion d'inflation

Lien modèle - Observation ?

- Comparer les modèles d'expansion à des tests observationnels n'est pas évident…
- On a déjà les contraintes provenant du fond diffus cosmologique, et les contraintes sur l'âge de l'Univers, nécessairement plus grand que celui des plus vieilles étoiles !
- Les contraintes les plus précises viennent de la mesure de l'expansion de l'Univers ⇒ Calibrer la relation redshift ↔ distance
- Pour les objets les plus proches, $z = H_0 d$ ⇒ Mesure de H_0
- C'est l'ordre 1. Si on veut aller plus loin, il faut affiner, et s'entendre sur la notion de distance.
- On calibre en fait une relation redshift ↔ magnitude, ce qui revient à calibrer redshift ↔ distance lumineuse d_{lum}. En effet, on mesure un flux reçu

$$F(z) = \frac{L}{4\pi d_{\mathrm{lum}}^2(z)} \quad \Rightarrow \quad m = -2.5 \log_{10} \frac{F(z)}{F_{\mathrm{ref}}}$$

Distance, redshift et modèle d'Univers

- En métrique de Robertson-Walker, le trajet d'un photon se fera en vérifiant

$$\frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\kappa r^2}}$$

- On reçoit aujourd'hui (t_0) un photon émis à t_e qui parcours le trajet radial jusqu'à r

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\kappa x^2}} = f(r)$$

- Le membre de droite ($f(r)$) se calcule en changeant de variable. On trouve

$$f(r) = \frac{\arcsin\left(r\sqrt{\kappa}\right)}{\sqrt{\kappa}} \quad \text{si } \kappa > 0, \qquad f(r) = \frac{\arg\sinh\left(r\sqrt{-\kappa}\right)}{\sqrt{-\kappa}} \quad \text{si } \kappa < 0, \qquad f(r) = r \quad \text{si } \kappa = 0$$

- Il faut ensuite relier le membre de gauche au redshift. On va changer de variable $t \rightarrow z$. On a (resdhift cosmologique)

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} = \frac{1}{a(t)} \quad \text{car } a_0 = 1 \text{ (aujourd'hui)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{a}}{a^2} = -(1+z)^2 \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \text{Il faut un modèle d'Univers pour } a(t)$$

Distance, redshift et modèle d'Univers

- On se place dans le modèle d'Univers froid. On a l'équation de Friedmann

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \Omega_{\kappa,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}\tau = H_0\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{H_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \Omega_{\kappa,0} + \Omega_{m,0}(1+z) + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2}$$

- On en tire dz/d*t* :

$$\frac{1}{H_0}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -(1+z)^2\sqrt{\Omega_{\kappa,0} + \Omega_{m,0}(1+z) + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2}}$$

$$= -(1+z)\sqrt{\Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

soit $\quad \mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}z}{H_0(1+z)}g(z) \quad$ avec $\quad g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}}$

Distance, redshift et modèle d'Univers

- On peut maintenant faire le changement de variable dans l'intégrale

$$f(r) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} = -\frac{c}{H_0}\int_z^0 (1+z)\frac{\mathrm{d}z}{(1+z)} g(z) = \frac{c}{H_0}\int_0^z g(z)\,\mathrm{d}z$$

- Cette relation s'inverse, et on tire

$$r = f^{-1}\left(\frac{c}{H_0}\int_0^z g(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

Or $d_{\mathrm{lum}} = (1+z)a_0 r = (1+z)r = (1+z) f^{-1}\left(\frac{c}{H_0}\int_0^z g(z)\,\mathrm{d}z\right)$

- On peut expliciter un peu plus. Si on appelle $G(z) = \int_0^z g(z)\,\mathrm{d}z$

$$d_{\mathrm{lum}} = \frac{(1+z)}{\sqrt{\kappa}}\sin\left(\frac{c\sqrt{\kappa}}{H_0}G(z)\right) = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{-\Omega_{\kappa,0}}}\sin\left(\sqrt{-\Omega_{\kappa,0}}\,G(z)\right) \quad \text{si } \kappa > 0 \ (\Omega_{\kappa,0} < 0)$$

car $\Omega_{\kappa,0} = -\frac{\kappa c^2}{a_0^2 H_0^2} = -\frac{\kappa c^2}{H_0^2}$

Distance, redshift et modèle d'Univers

- On fait de même dans les autres cas. En résumé

$$d_{\text{lum}} = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{-\Omega_{\kappa,0}}}\sin\left(\sqrt{-\Omega_{\kappa,0}}\,G(z)\right) \quad \text{si } \Omega_{\kappa,0} < 0$$

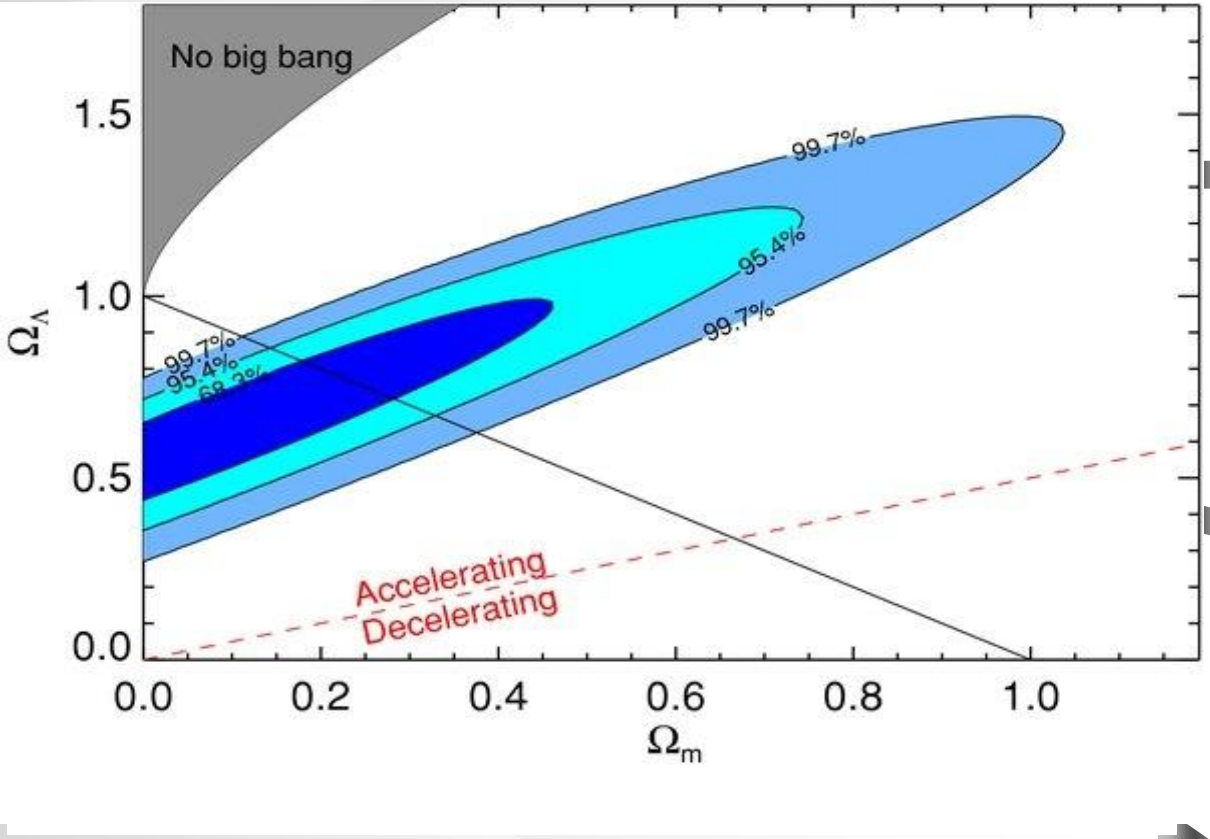
$$d_{\text{lum}} = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{\Omega_{\kappa,0}}}\sinh\left(\sqrt{\Omega_{\kappa,0}}\,G(z)\right) \quad \text{si } \Omega_{\kappa,0} > 0$$

$$d_{\text{lum}} = \frac{c(1+z)}{H_0}G(z) \quad \text{si} \quad \Omega_{\kappa,0} = 0$$

- On obtient donc une relation entre d_{lum} et z qui dépend des paramètres Ω et de H_0.
- Des données observationnelles sur plusieurs objets pour lesquelles d_{lum} et z peuvent être mesurées permettent d'étalonner la relation et de contraindre les paramètres cosmologiques par ajustement.
- Déjà, si z est petit, $g(z) \approx 1 \Rightarrow G(z) \sim z \Rightarrow d_{\text{lum}} \sim cz/H_0$. On retrouve la loi de Hubble !
- La pente à l'origine de la relation $d_{\text{lum}} \leftrightarrow z$ permet de mesurer H_0.

Diagramme de Hubble des Supernovae Ia

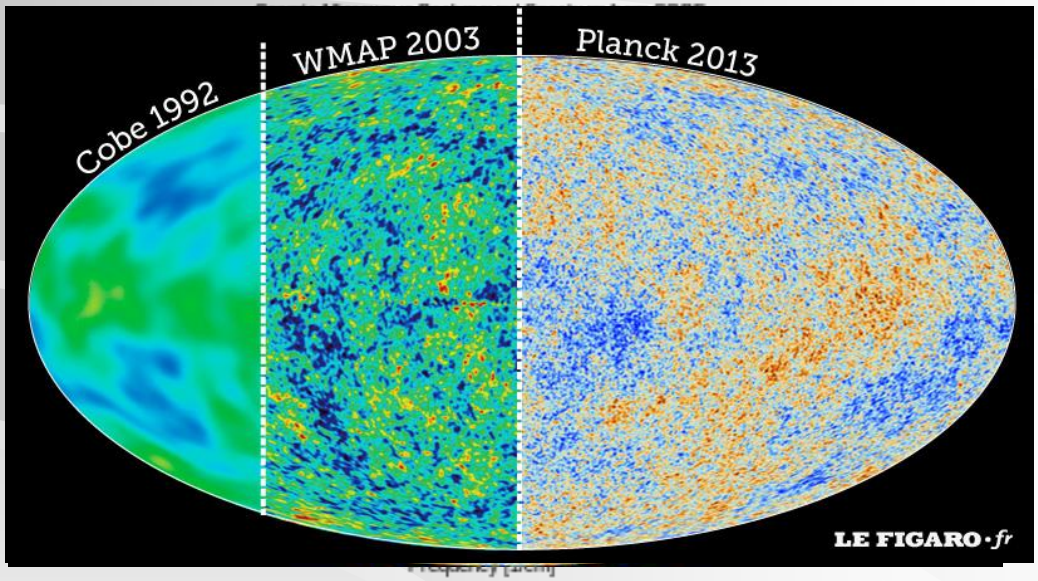
- On calibre la relation à partir des Supernovae de type Ia (événements d'implosion de naines blanches binaires bien contraints)
- Résultat (*Perlmutter et al. 1999; Conley et al. 2009*) : $H_0 = 75 \pm 7$ km/s/Mpc
- L'expansion est accélérée avec une probabilité de 99,999% !



- Meilleur ajustement pour $\kappa=0$: $\Omega_{\Lambda,0}=0,72 \quad \Omega_{m,0}=0,28$
- Dans tous les cas, $\Omega_{\Lambda,0}>0,5$. L'énergie « noire » (du vide) domine l'Univers.

Le fond diffus cosmologique (CMB)

- Le ciel est uniformément brillant… dans le domaine radio !
- L'Univers baigne dans un rayonnement de corps noir isotrope, à la température de 2.726 ± 0.001 Kelvins (Penzias & Wilson 1965)
- Il correspond à la recombinaison des atomes d'Hydrogène au début de l'expansion



- Rayonnement très isotrope, fluctuations très faibles de l'ordre $\pm 3\mu K$ (PLANCK)
- Fluctuations à l'origine de la structuration de l'Univers ?

Brillance du fond cosmologique

- On considère une source lumineuse émise à la distance r ($t=t_e$, redshift z), ayant la brillance d'un corps noir de température T_e, de diamètre D

$$B_e = \int_0^{+\infty} dB_{e,\nu} = \int_0^{+\infty} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT_e} - 1} = \frac{\sigma T_e^4}{\pi}$$

$$L = \pi D^2 \pi B_e = \pi D^2 \sigma T_e^4$$

- A la distance lumineuse d'observation d_{lum}, la luminosité se trouve diluée

$$F_0 = \frac{L}{4\pi d_{\text{lum}}^2} = \frac{L a_e^2}{4\pi r^2 a_0^4}$$

- La source est vue sous un angle solide

$$\Omega_0 = \frac{\pi\theta^2}{4} = \frac{\pi}{4}\frac{D^2}{d_{\text{ang}}^2} = \frac{\pi}{4}\frac{D^2}{a_e^2 r^2}$$

- La brillance d'observation vaut donc

$$B_0 = \frac{F_0}{\Omega_0} = \frac{L a_e^2}{4\pi r^2 a_0^4}\frac{4 a_e^2 r^2}{\pi D^2} = B_e\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^4 = \frac{B_e}{(1+z)^4}$$

$$B_0 = \frac{1}{(1+z)^4}\int_0^{+\infty} \frac{2h\nu_e^3}{c^2}\frac{d\nu_e}{e^{h\nu_e/kT_e} - 1}$$

Brillance du fond cosmologique

- La fréquence d'observation ν_0 vérifie $\nu_0 = \nu_e/(1+z)$ (redshift). Donc

$$B_0 = \frac{1}{(1+z)^4}\int_0^{+\infty}\frac{2h(1+z)^4\nu_0^3}{c^2}\frac{d\nu_0}{e^{h\nu_0(1+z)/kT_e}-1} = \int_0^{+\infty}\frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{d\nu_0}{e^{h\nu_0/kT_0}-1} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{T_e}{1+z}$$

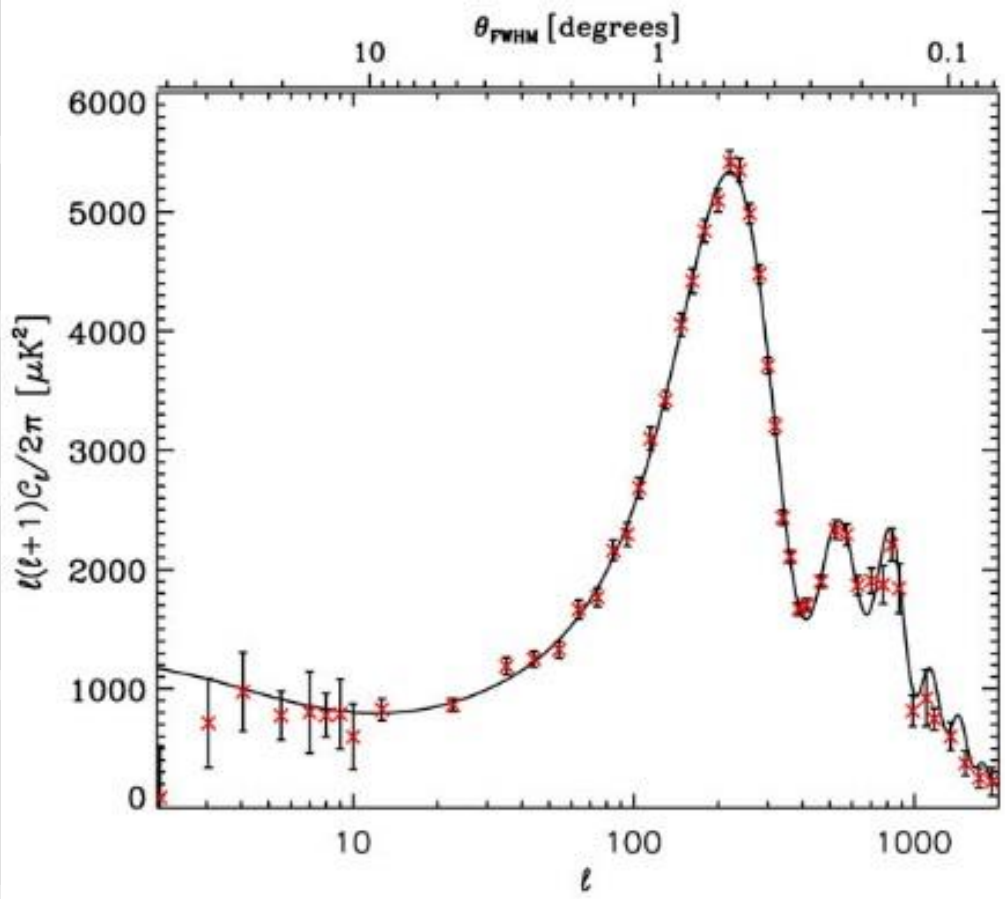
- C'est juste un changement de variable dans l'intégrale… L'émission observée B_0 se trouve donc être encore exactement celle d'un corps noir, mais de température « refroidie » $T_0 = T_e/(1+z) = T_e a_e/a_0$
- Application : Le fond diffus cosmologique (CMB). Il correspond à la recombinaison des atomes d'Hydrogène au début de l'expansion, soit $T_e \approx 4000\ K$. On en déduit $z = 1500$.
- Dans un Univers d'Einstein-De Sitter, on a

$$\frac{1}{1+z} = \frac{a_e}{a_0} = \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{2/3} \Rightarrow t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3/2}} \approx 1.7\times 10^{-5} t_0 = 200000 \quad \text{ans}$$

$(t_0 = 12 \text{ milliards d'années})$

Les anisotropies du fond cosmologique

- Le CMB est très uniforme en température dans tout le ciel. Il existe toutefois des anisotropies.
- Certains s'expliquent très bien, comme l'anisotropie bipolaire, liée au mouvement de la Terre par rapport au référentiel du CMB (~700 km/s)
- Il reste au bout du compte des fluctuations très faibles de l'ordre de $\pm 3\mu K$
- Ces anisotropies ont été caractérisées par les missions COBE, WMAP, PLANCK.



L'échelle angulaire a été étudiée par une décomposition en harmoniques sphériques.
$\Rightarrow$ Pics $\Rightarrow$ tailles angulaires privilégiées

Anisotropies et courbure

- Le spectre angulaire des fluctuations du CMB peut être relié aux paramètres des modèles cosmologiques ⇒ Contrainte supplémentaire sur H_0 et les Ω's
- Combiné avec les résultats provenant des Supernovae de type Ia, on arrive au modèle de concordance, caractérisé par

$$\Omega_{m,0} = 0{,}27 \qquad \Omega_{\Lambda,0} = 0{,}73 \qquad H_0 = 71 \text{ km/s/Mpc}$$

$$\text{Age de l'Univers} : 13{,}75 \text{ milliards d'années}$$

$$\Rightarrow \Omega_{\kappa,0} \approx 0$$

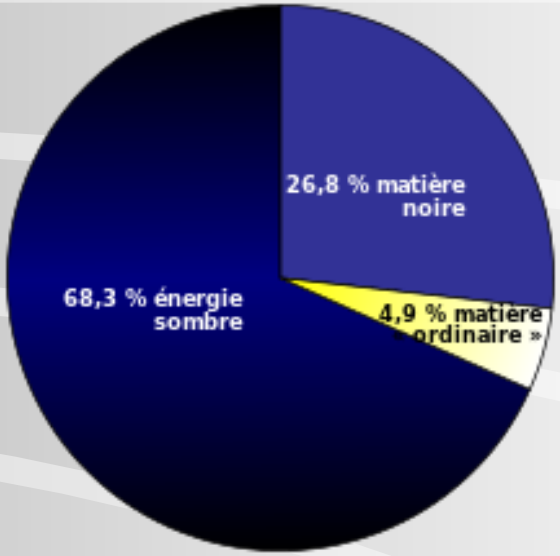
- La courbure de l'Univers est pratiquement nulle (cohérent avec d'autres mesures) !
- Par ailleurs, la matière baryonique (= usuelle) ne contribue à $\Omega_{m,0}$ qu'à hauteur de 0.04 seulement !
- En accord avec les résultats provenant de la nucléosynthèse primordiale
- Conclusion : L'énergie noire (Λ) domine, et parmi la matière ($\Omega_{m,0}$), la matière noire est largement majoritaire !
- Nous ne voyons qu'une petite partie de l'Univers…

Notion d'inflation

- Schéma standard d'expansion de l'Univers : Ere radiative dans l'Univers primordial ($a(t) \propto t^{1/2}$), puis ère de la matière ($a(t) \propto t^{2/3}$), puis accélération de l'expansion avec la constante cosmologique
- Certains indices laissent supposer qu'il y a eu au tout début de l'expansion ($\ll$ 1 seconde) une phase d'expansion beaucoup plus rapide (exponentielle) : Inflation !
- L'Univers serait passé d'une taille de $\sim 10^{-26}$ m à $t=10^{-34}$ s à une taille de quelques parsecs à $t=10^{-32}$ s.
- Argument 1 : Le CMB est très (trop) homogène $\Rightarrow$ lien causal entre des régions angulairement éloignées de l'Univers $\Rightarrow$ Impossible sans inflation.
- Argument 2 : L'inflation explique aussi la courbure quasi nulle de l'Univers : la croissance exponentielle laisse l'Univers quasi vide
- Origine de l'inflation : Probablement des brisures de symétries = transitions de phases d'une phase de vide à une autre. En remontant dans le passé : transition électrofaible, transition de grande unification (?), transition de gravitation quantique (??) (limites de la théorie…)

La matière noire

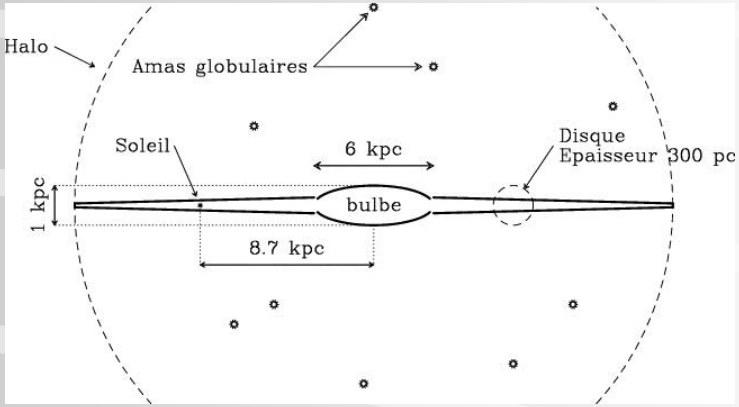
- La matière usuelle (baryonique) ne peut pas représenter la totalité du $\Omega_{m,0}$
  $\Rightarrow$ Existence de matière invisible (noire) qui n'interagit que par la gravitation.



- D'autres indices semblent indiquer que la matière usuelle ne représente pas tout :
  - La courbe de rotation des galaxies
  - La virialisation des amas de galaxies

La courbe de rotation des Galaxies

- On considère une galaxie axisymétrique ayant la forme d'un disque



- Considérons une étoile dans le disque en orbite circulaire à la distance *r* du centre. Sa vitesse est *v(r)*. Le potentiel dans la galaxie est *U(r)*. On a (équilibre centrifuge)

$$\frac{v^2(r)}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

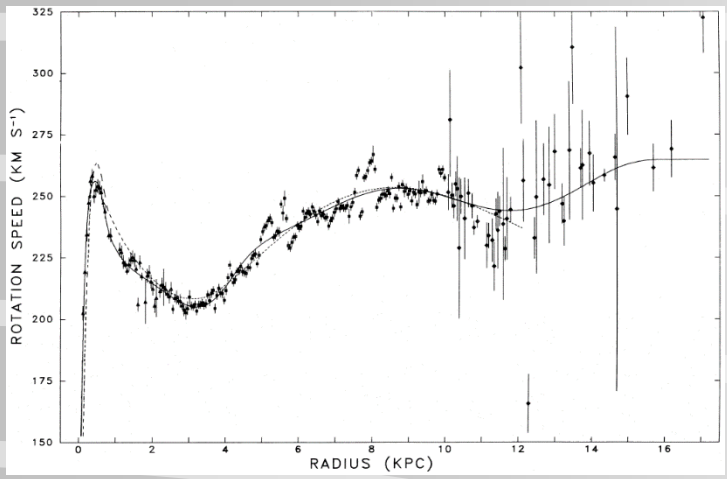
- On appelle courbe de rotation la relation entre *v(r)* et *r*.
- Rappel: Potentiel Képlérien lié à une masse centrale

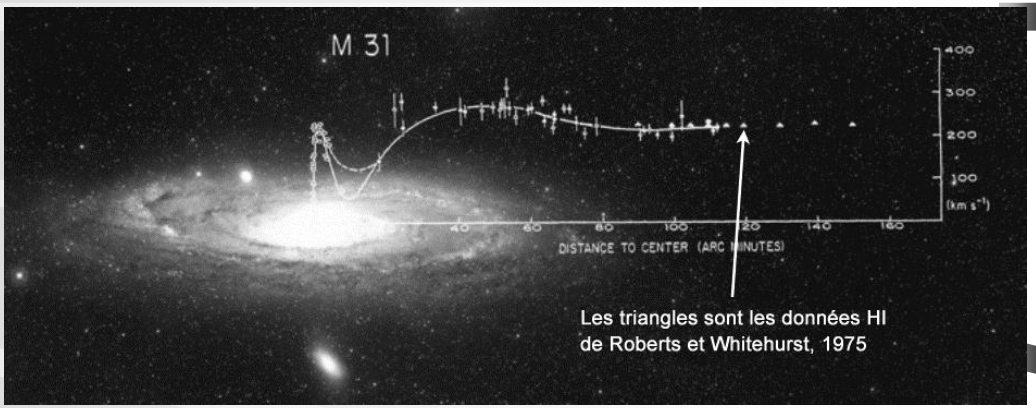
$$\frac{v^2(r)}{r} = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow v(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Jamais observé dans aucune galaxie !

La courbe de rotation des Galaxies (II)

- Courbes de rotation mesurées





- Il est normal que la courbe de rotation soit croissante d'abord et plate ensuite (masse répartie dans la galaxie)
- Mais arrivé à la dernière étoile (ou au dernier nuage de gaz), on devrait observer une redescente pour tendre vers $\propto r^{-1/2}$. Ce n'est jamais observé !
- Explication : Il reste de la masse à l'extérieur des galaxies (halo massif) $\Rightarrow$ Matière noire !

Le « théorème » du Viriel scalaire (I)

= « Equilibre statistique » entre dispersion de vitesse et attraction gravitationnelle

- On considère un système N corps de masse m_i's

$$\text{Viriel} = V = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i . \ddot{\vec{r}}_i$$

$$J = \sum \text{moments d' inertie / axes de coordonnée s} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2}$$

$$\dot{J} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i . \dot{\vec{r}}_i$$

$$\ddot{J} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i . \ddot{\vec{r}}_i = 4T + 2V$$

- Hypothèse : $\ddot{J} \approx 0$ en moyenne
- Signification : Le système garde en gros les mêmes dimensions

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{2T+V=0}$$

Le « théorème » du Viriel scalaire (II)

- Dans le cas du problème des N corps

$$V = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i . \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i} \right) . \vec{r}_i = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \vec{f}_{j \to i} . \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right)$$

$$V = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{\left| \vec{r}_j - \vec{r}_i \right|} = \Omega \quad \text{(Energie potentielle)}$$

- Une autre façon de le voir : Ω est une fonction homogène de degré -1 des coordonnées. Relation d'Euler:

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} x_i = -1 \times \Omega \quad \Leftrightarrow \quad V = \Omega$$

- Au bout du compte

$$\boxed{2T + \Omega = 0}$$

- D'autant mieux vérifié que N est grand !

Viriel et amas de galaxies

- On considère un amas de galaxies qu'on peut voir comme un système N corps
- On mesure les vitesses radiales (Doppler) $v_{r,i}$ de ces galaxies. On a

$$v_{r,i} = v_i \cos\theta_i \quad \text{(angle de projection)}$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2\cos^2\theta_i} m_i v_{r,i}^2 \approx \frac{1}{\langle \cos^2\theta \rangle} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{r,i}^2 = \frac{3}{2} \sum_i m_i v_{r,i}^2$$

$$\Omega = \sum_{i<j} -\frac{Gm_i m_j}{r_{i,j}} = \sum_{i<j} -\frac{Gm_i m_j |\cos\theta_{i,j}|}{r_{i,j,p}} \approx \langle |\cos\theta| \rangle \sum_{i<j} -\frac{Gm_i m_j}{r_{i,j,p}} = -\frac{1}{2} \sum_{i<j} \frac{Gm_i m_j}{r_{i,j,p}}$$

- On peut estimer les masses, mesurer les vitesses, les distances projetées, et donc estimer T et Ω, et voir si $2T+\Omega \approx 0$.
- Or ce n'est pas le cas. On a $|2T| \gg |\Omega|$. Il faudrait ~20 fois plus de masse dans l'amas pour virialiser le système $\Rightarrow$ Matière noire !
- Où est cette matière ? De quoi est-elle faite ?

De quoi est faite la matière noire ?

- De la matière standard (=baryonique), mais dans des objets/structures non lumineux(ses) : Etoiles à neutrons, trous noirs stellaires, naines brunes, nuages interstellaires froids, nuages intergalactiques, etc...
  - Problème 1 : La théorie n'en prévoit pas assez.
  - Problème 2 : La fréquence des événements de lentilles gravitationnelles est incompatible avec une grande population d'objets de ce type.
  - Conclusion : Il y en a certainement, mais pas suffisamment pour rendre compte des anomalies de gravité.
- De la matière exotique = Des particules massives n'interagissant que via la gravitation ou presque (*WIMPs = Weakly Interactive Massive Particles*)
  - En accord avec les prédictions des théories de supersymétrie (au-dela du modèle standard)
  - Mais il en faudrait ~20 fois plus que la matière baryonique.
  - Pour être compatible avec les modèle de formation des galaxies, cette matière devrait être « froide » ($\varpi=0$, c'est-à-dire non relativiste). On parle de *Cold Dark Matter* (CDM)
  - Indétectée pour l'instant !

De quoi est faite la matière noire ?

- Autre hypothèse : Il n'y a pas de matière noire ! C'est la théorie de la gravitation qui est fausse lorsque l'accélération est faible (théories MOND = *MOdified Newton Dynamics*)
  - Remise en cause du principe d'équivalence $(m_g \neq m_i)$ aux très faibles accélérations
  - Compatible avec la courbe de rotation des galaxies, mais plus difficilement avec la dynamique des amas.
  - Difficile de rendre ceci compatible avec la relativité générale…