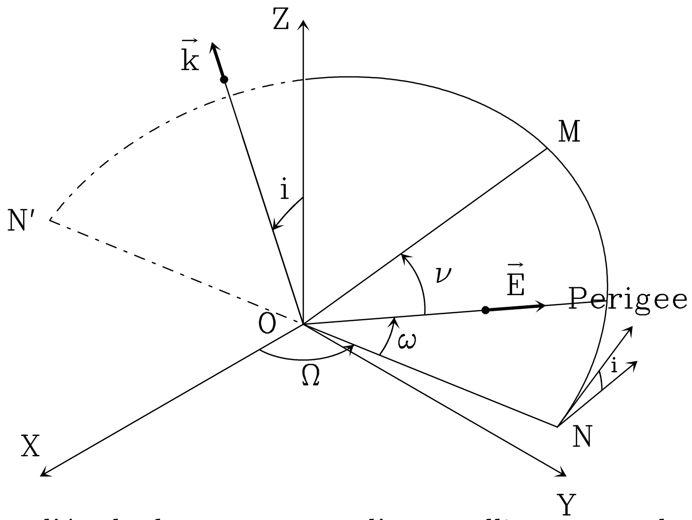
Licence 3
Astrophysique – Gravitation I

H. Beust

25 mai 2012
Calculatrices autorisées – 1 feuille recto-verso A4



L'objet de ce problème est l'étude du mouvement d'un satellite autour de la Terre, perturbé par la non-sphéricité de cette dernière.

On considère un satellite artificiel en orbite basse autour de la Terre, suivant une orbite Képlérienne caractérisée par un demi-grand axe a, une excentricité e, une inclinaison i, une longitude du nœud ascendant Ω et un argument du périgée ω (voir Figure). Le repère $OXYZ$ est supposé lié à la Terre et orienté de telle manière que le plan XOY coïncide avec le plan équatorial de la Terre et l'axe OZ avec la direction du pôle Nord. L'origine O est confondue avec le centre de la Terre. On notera en outre v l'anomalie vraie repérant la position du satellite sur son orbite, P la période orbitale et $n = 2\pi/P$ le moyen mouvement. Nous désignerons par $\vec{r} = \vec{OM}$ le rayon vecteur joignant l'origine à la position de la planète.

1) Quelle relation lie la période orbitale P (ou le moyen mouvement n), la masse de la Terre $M_\oplus$ et le demi-grand axe a ?

2) Considérons un point de l'espace situé en dehors de la Terre, repéré dans le repère $OXYZ$ par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ). Si la Terre était parfaitement sphérique ou ponctuelle, comment s'écrirait le potentiel gravitationnel qu'elle exercerait en ce point en fonction de la masse de la Terre et de la constante de la gravitation G ? On notera U_0 ce potentiel.

La non sphéricité de la Terre amène à écrire de manière plus exacte

$$U = U_0 + U_2 \qquad \text{avec} \qquad U_2 = \frac{GM_\oplus}{r} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \quad , \tag{1}$$

où $R_\oplus$ est le rayon équatorial de la Terre, et où J_2 est un coefficient numérique valant pour la Terre 1.082625×10^{-3}.

3) Quelle est l'origine de ce terme additionnel et que représente le J_2 ? Que représente le terme $3/2\cos^2\theta - 1/2$? Cette formule est-elle exacte ou est-ce encore une approximation ? Pourquoi n'y a-t-il pas de dépendance en fonction de la latitude ϕ ?

4) Pourquoi a-t-on a priori $U_2 \ll U_0$? De quelle nature serait le mouvement du satellite si nous ne considérions que U_0 ? Quel va être l'effet de U_2 ?

Nous allons avoir besoin d'exprimer U_2 en fonction des éléments orbitaux du satellite sur son orbite. Je vous rappelle à cette occasion un peu de formulaire Keplérien : On a $\vec{r} = r\,\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire qui peut s'écrire dans le repère $OXYZ$ en fonction des éléments orbitaux

$$\vec{u}\begin{pmatrix} \cos\Omega\cos(\omega+v) - \cos i\sin\Omega\sin(\omega+v) \\ \sin\Omega\cos(\omega+v) + \cos i\cos\Omega\sin(\omega+v) \\ \sin i\sin(\omega+v) \end{pmatrix} \qquad . \tag{2}$$

D'autre part, on a de manière usuelle

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \qquad . \tag{3}$$

Par ailleurs, je rappelle qu'en coordonnées sphériques, on doit aussi avoir

$$\vec{u}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad . \tag{4}$$

5) Compte tenu de ces précisions, exprimer le potentiel perturbateur U_2 fonction de G, $M_\oplus$, J_2, $R_\oplus$ et des éléments orbitaux. On montrera qu'on obtient à la fin une expression du type

$$U_2 = (\mathrm{cte}) \times (1+e\cos v)^3 \times \left(\frac{3}{2}\sin^2 i\sin^2(\omega+v) - \frac{1}{2}\right) \qquad , \tag{5}$$

où (cte) est une constante faisant intervenir les éléments cités plus haut.

Pour étudier l'effet à long terme de U_2, nous allons calculer sa moyenne temporelle le long de l'orbite. La moyenne est faite sur le temps, on va moyenner sur v en changeant de variable de la manière qui suit

$$\overline{U_2} = \frac{1}{P}\int_0^P U_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_2(v)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right)\mathrm{d}v = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U_2(v)}{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)}\mathrm{d}v \tag{6}$$

Pour obtenir le terme $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$ on utilise la deuxième loi de Képler

$$r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = na^2\sqrt{1-e^2} = \sqrt{aGM_\oplus(1-e^2)} \qquad (= C = \text{constante de aires}) \tag{7}$$

6) Effectuer alors le calcul complet de $\overline{U_2}$. Pour cela on donne la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\times\left(\frac{3}{2}\sin^2 i\sin^2(\omega+v) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\cos^2 i \qquad . \tag{8}$$

Pourquoi l'excentricité disparaît-elle de cette intégrale ?

$$\left(\text{réponse : } \overline{U_2} = \frac{GM_\oplus J_2 R_\oplus^2}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}\,(1-3\cos^2 i) \qquad\right)$$

7) On constate que le résultat $\overline{U_2}$ ne dépend ni de Ω ni de ω. Pour ω ce n'était pas évident au départ. Par contre pour Ω c'était prévisible. Pourquoi ?

Je vous redonne maintenant les équations de Lagrange qui décrivent les variations de l'orbite de la planète sous l'effet de $\overline{U_2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{GM_\oplus a}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2a}{n}\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial t} \qquad ; & (9)\\
e\sqrt{GM_\oplus a}\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1-e^2}{n}\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial t}+\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial\omega} \qquad ; & (10)\\
C\sin i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\cos i\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial\omega}+\frac{\overline{U_2}}{\partial\Omega} \qquad ; & (11)\\
C\sin i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial i} \qquad ; & (12)\\
Ce\sin i\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= -(1-e^2)\sin i\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial e}+e\cos i\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial i} \qquad . & (13)
\end{aligned}$$

8) Compte tenu de l'expression de $\overline{U_2}$ et des équations données, que peut-on dire des variations des quantités a, e et i ? Pour le demi-grand axe a, c'était parfaitement prévisible. Pourquoi ?

9) Calculer à partir de l'expression de $\overline{U_2}$ les quantités $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$ et montrer que ce sont des constantes. Au final, comment évolue l'orbite du satellite en fonction du temps ?

$$\left(\text{réponse : } \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{GM_\oplus}R_\oplus^2J_2}{a^{7/2}(1-e^2)^2}(5\cos i^2-1) \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{GM_\oplus}R_\oplus^2J_2}{a^{7/2}(1-e^2)^2}\cos i\right)$$

10) On va faire maintenant une application numérique. Prenez $a = 26600\,\mathrm{km}$, $e = 0.6$ et $i = 50°$, puis calculez les périodes de précession associées à $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$. Vous donnerez le résultat dans les unités appropriées. On prendra pour cela $G = 6.67\times10^{-11}$ SI, $M_\oplus = 5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\oplus = 6378\mathrm{km}$, et je vous rappelle qu'un jour vaut 86400 s et qu'une année vaut 365.2422 jours. Quelle conclusion en tirez vous sur l'évolution de l'orbite du satellite ?

11) Montrez qu'il existe deux valeurs particulières de l'inclinaison pour lesquelle ω ne varie pas. Calculez ces valeurs.

Ce cas particulier ($\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 0$) a été utilisé par les Russes dans les années 1960 pour une classe de satellites appelés “Molniya”. Le but était d'obtenir des satellites capables de rester momentanément en sur-place au-dessus du territoire russe. Les satellites géostationnaires ne peuvent se maintenir qu'au-dessus de l'équateur. Les russes ont donc développé une technique permettant à des satellites de rester momentanément fixes au-dessus de leur territoire qui est assez éloigné de l'équateur. Pour cela il faut maintenir en permanence $\omega = -90°$. Compte tenu de la dérive, cela ne peut se faire qu'en choisissant l'inclinaison qui annule $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 0$.

12) Un satellite est dit héliosynchrone si la longitude de son nœud ascendant avance à la même vitesse angulaire que le Soleil vu depuis la Terre par rapport aux étoiles (donc au repère $OXYZ$). Quelle est cette vitesse ? Montrer que ceci impose une valeur bien précise de l'inclinaison ($> 90°$) que l'on calculera. On fera l'application numérique en prenant une orbite avec $e = 0$ et $a = 7300\,\mathrm{km}$.

Un tel satellite a pour avantage de repasser toujours à la même heure locale à une latitude donnée. C'est particulièrement pratique pour les satellites d'observation du sol type SPOT.