Licence 3
Astrophysique – Gravitation I
Corrigé

H. Beust

25 mai 2012

Calculatrices autorisées – 1 feuille recto-verso A4

1) La relation cherchée est la troisième loi de Képler qui s'écrit ici

$$\frac{P^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM_\oplus}\qquad\Longleftrightarrow\qquad n^2a^3=GM_\oplus\qquad. \tag{1}$$

Ici, la masse du satellite n'intervient pas car elle est complètement négligeable devant celle de la Terre.

2) En vertu du théorème de Gauss, le potentiel créé à l'extérieur d'un objet à symétrie sphérique est le même que celui créé par la même masse considérée ponctuelle au centre, soit

$$U_0=-\frac{GM_\oplus}{r}\qquad. \tag{2}$$

3) Le terme additionnel vient comme le dit l'énoncé de la non-sphéricité de la Terre, et plus particulièrement de l'aplatissement polaire de cette dernière. C'est d'ailleurs exactement ce que représente le J_2. Le terme $3/2\cos^2\theta-1/2$ n'est autre que $P_2(\cos\theta)$ où P_2 est le deuxième polynôme de Legendre. Cette formule est bien entendu une approximation. Ce n'est que le premier terme (et de loin le plus important !) d'un développement en harmoniques sphériques. Il n'y a pas de dépendance en ϕ car à ce niveau d'approximation (on considère juste l'aplatissement polaire), la Terre n'est certes plus sphérique, mais elle garde une symétrie axiale autour de son axe de rotation. A des niveaux plus fins d'approximation, ce ne serait bien entendu plus vrai.

4) $U_2\ll U_0$ car c'est une perturbation par rapport à U_0. Plus concrètement, dans le rapport U_2/U_0, le terme $(R_\oplus/r)^2$ est plus petit que 1 mais par forcément très petit, le terme $P_2(\cos\theta)$ est de l'ordre de l'unité, mais le coefficient J_2 est de l'ordre de 10^{-3}. C'est ce qui garantit que $U_2\ll U_0$. Si nous ne considérions que U_0, le satellite serait placé dans un potentiel Képlérien pur, et son mouvement serait une orbite Képlérienne fixe. U_2 représente une perturbation, donc le mouvement réel est un mouvement Képlérien perturbé. Le rôle de U_2 va être de faire évoluer sur le long terme l'orbite du satellite. C'est justement ce qui fait l'objet de ce problème !

5) Ici, compte tenu des formules données, la colatitude θ en un point de l'orbite vérifiera $\cos\theta=\sin i\sin(\omega+v)$. Il n'y a qu'à égaler les expressions de $\vec{u}$ pour cela. On en déduit

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{GM_\oplus}{r}J_2\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{GM_\oplus(1+e\cos v)}{a(1-e^2)}J_2\left(\frac{R_\oplus(1+e\cos v)}{a(1-e^2)}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2 i\sin^2(\omega+v)-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{GM_\oplus J_2R_\oplus^2}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos v)^3\left(\frac{3}{2}\sin^2 i\sin^2(\omega+v)-\frac{1}{2}\right)\qquad.
\end{aligned}\tag{3}$$

6) On a

$$r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sqrt{aGM_\oplus(1-e^2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{aGM_\oplus(1-e^2)}}{r^2} = \frac{(1+e\cos v)^2\sqrt{aGM_\oplus(1-e^2)}}{a^2(1-e^2)^2} \quad . \tag{4}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\overline{U_2} &= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{U_2(v)}{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{GM_\oplus J_2 R_\oplus^2}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos v)^3\left(\frac{3}{2}\sin^2 i\sin^2(\omega+v)-\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad\qquad \times\frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos v)^2\sqrt{aGM_\oplus(1-e^2)}}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{n}{2\pi}\frac{GM_\oplus J_2R_\oplus^2}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}\sqrt{GM_\oplus}}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\left(\frac{3}{2}\sin^2 i\sin^2(\omega+v)-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v \quad .
\end{aligned} \tag{5}$$

On utilise alors la troisième loi de Képler ($n=\sqrt{GM_\oplus/a^3}$), puis l'intégrale donnée, et il vient

$$\overline{U_2} = \frac{1}{2\pi}\frac{GM_\oplus J_2R_\oplus^2}{a^3(1-e^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\cos^2 i\right) = \frac{GM_\oplus J_2 R_\oplus^2}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}(1-3\cos^2 i) \qquad , \tag{6}$$

c'est-à-dire le résultat annoncé.

7) $\overline{U_2}$ ne dépend pas de Ω à cause d'une invariance par rotation. Le potentiel terrestre a été supposé axisymétrique autour de son axe de rotation, donc la direction OX est parfaitement arbitraire dans le plan équatorial. Dit autrement, quelle que soit la valeur de Ω, la situation dynamique de l'orbite sur satellite est la même. Il est donc normal que Ω disparaisse.

8) Comme $\overline{U_2}$ ne dépend ni explicitement du temps (c'est normal, on a moyenné), de ω et de Ω, il ressort immédiatement que $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = \mathrm{d}e/\mathrm{d}t = \mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$. Ces quantités sont donc des constantes du mouvement. Pour le demi-grand axe, c'est un résultat classique qu'on obtient dès qu'une moyennisation est faite.

9) Pour calculer $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$, il n'y a qu'à appliquer sur l'expression de $\overline{U_2}$ les équations de Lagrange. On trouve tous calculs faits

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{GM_\oplus}R_\oplus^2 J_2}{a^{7/2}(1-e^2)^2}(5\cos i^2-1) \qquad ; \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{GM_\oplus}R_\oplus^2 J_2}{a^{7/2}(1-e^2)^2}\cos i \qquad , \tag{8}$$

où on a utilisé l'expression de la constante des aires C donnée à la question 5. Ces quantités sont des constantes, compte tenu que a, e et i sont constants. Donc le mouvement de l'orbite est simple : l'orbite ne change pas de forme (a et e constant) ni d'inclinaison, mais elle précesse dans son plan à vitesse constante pendant que ce même plan précesse à vitesse constante aussi (pas la même) autour de l'axe des pôles.

10) L'application numérique donne $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 1.768\times10^{-8}$ rad/s et $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t = -2.133\times10^{-8}$ rad/s. On notera que le nœud ascendant régresse ($\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t<0$). Ce sera le cas pour toute orbite prograde ($i\leq 90°$) et inversement pour les orbites rétrogrades. On peut calculer les périodes associées. Converties en années, cela donne 11.259 ans pour ω et 9.3349 ans pour Ω. La conclusion qu'on en tire est que l'évolution de l'orbite est assez rapide (quelques années). En tout cas elle sera significative sur la durée de vie du satellite. Il faut donc absolument en tenir compte. Si on avait trouvé des périodes de plusieurs milliers d'années, étant donné que la durée d'exploitation d'un satellite n'excède pas quelques dizaines d'années au grand maximum, cela n'aurait eu aucune importante. Mais ce n'est pas le cas ici.

11) Clairement, on aura $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 0$ pour $\cos i = \pm 1/\sqrt{5}$, ce qui correspond à $i = 63.435°$ et $i = 116.565$. Comme précisé dans l'énoncé, ce cas (plus précisément le cas $i = 63.435°$) a été utilisé pour réaliser des satellites de communication (et aussi des satellites espions...) par les soviétiques dans les années 1960.

12) La vitesse angulaire du Soleil $\omega_\odot$ depuis la Terre est de 1/365.2422 tours par jour (logique !), ce qui converti dans la bonne unité, donne $\omega_\odot = 1.991 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$. Un satellite héliosynchrone vérifiera $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t = \omega_\odot$. Déjà, cela ne peut se faire que si $i > 90°$ pour une question évidente de signe. Ensuite, si on fait l'application numérique avec les constantes données, on en tire $\cos i$ et ensuite i. On trouve $i = 99.13°$ avec les valeurs données.