Licence 3
Astrophysique – Gravitation

H. Beust

23 mai 2017
Calculatrices autorisées – 1 feuille recto-verso A4

I Cosmologie Λ-CDM

Les modèles Λ-CDM (pour *Cold Dark Matter*) sont des modèles de cosmologie où l'Univers est courbe avec une courbure κ constante, où la constante cosmologique Λ est non nulle et où la "matière" n'est constituée que de matière "froide", c'est-à-dire ayant un indice $\varpi = 0$. Je rappelle ici l'équation de Friedmann relativiste qui régit l'expansion d'un Univers homogène

$$\dot{a}^2 + \kappa c^2 = \frac{8\pi G a^2 \rho}{3} + \frac{1}{3} a^2 \Lambda c^2 \qquad ,$$

où ρ la densité et $a = a(t)$ le facteur d'échelle. Je rappelle également que pour une matière d'indice ϖ, la pression P vérifie $P = \varpi \rho c^2$, et que les lois de conservations se traduisent par

$$\rho a^{3(1+\varpi)} = \text{cte} \qquad . \tag{1}$$

A chaque instant, on définit les paramètres de densité sans dimension

$$\Omega_m = \frac{8\pi G a^2 \rho}{3\dot{a}^2} \quad , \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda a^2 c^2}{3\dot{a}^2} \quad , \qquad \Omega_\kappa = -\frac{\kappa c^2}{\dot{a}^2} \quad . \tag{2}$$

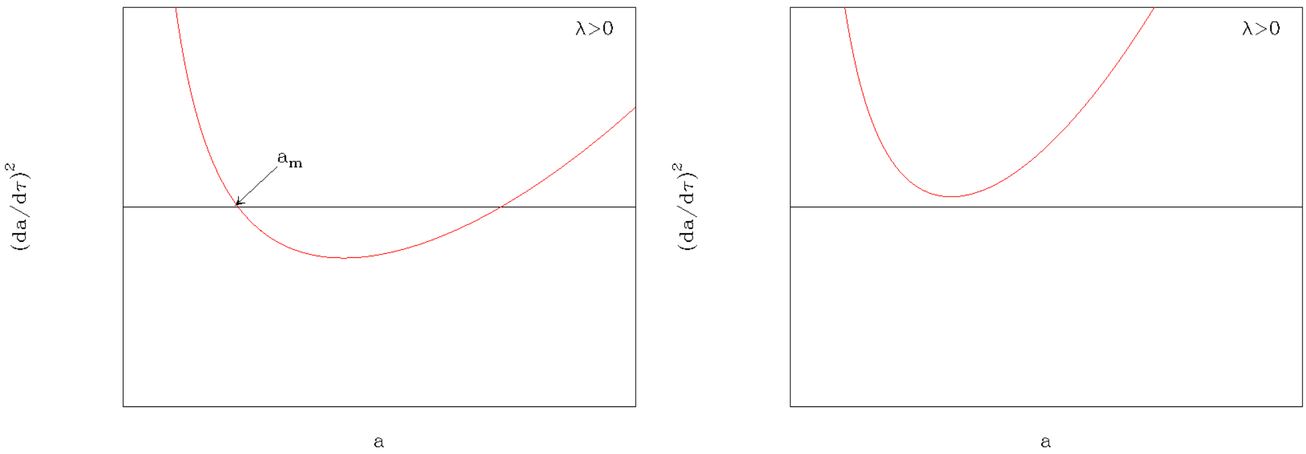
1) Quel relation très simple, découlant directement de l'équation de Friedmann, lie à chaque instant les trois paramètres Ω_m, Ω_Λ et Ω_κ ?

2) On préfère souvent paramétrer l'équation de Friedman en fonction de valeurs "aujourd'hui" des trois paramètres Ω. Sachant que dans le cadre de notre modèle il n'y a qu'un seul type de matière d'indice $\varpi = 0$, exprimer les paramètres Ω_m, Ω_Λ et Ω_κ à un instant quelconque en fonction de $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ et $\Omega_{\kappa,0}$, de a et de $\dot{a}_0$ (tous les indices "0" signifiant "valeur d'aujourd'hui"). On se souviendra qu'aujourd'hui on a par définition $a_0 = 1$.

3) On introduit la constante de Hubble $H = \dot{a}/a$ ainsi que sa valeur actuelle H_0. On introduit également le temps normalisé $\tau = H_0 t$. Montrer que dans le cadre de notre modèle, l'équation de Friedmann peut s'écrire

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = a^2 \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\kappa,0} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 = f(a) \qquad . \tag{3}$$

La résolution de cette équation différentielle fournit théoriquement la fonction $a(\tau)$ (et donc $a(t)$), donc le modèle d'expansion de l'Univers. Nous avons cependant vu en cours que cette équation ne possède pas de solution simple dans le cas général, mais que le comportement de la solution est déterminé par l'allure de la fonction $f(a)$.



4) Pour $\Lambda > 0$ (ce que nous supposerons dans toute la suite de l'exercice), l'allure de la fonction $f(a)$ est celle représentée sur les schémas ci-dessus. Suivant qu'il existe ou non un point a_m tel que $f(a_m) = 0$ (schémas de gauche et de droite), quel est le comportement de la solution $a(\tau)$ et donc de l'expansion de l'Univers ?

5) Dans tous les cas où $\Lambda > 0$, il existe une valeur de a que nous noterons a_r où $f(a_r)$ est minimale. Dans le cas où $f(a)$ est toujours positive (schéma de droite), que peut-on dire de l'expansion pour $a < a_r$ et pour $a > a_r$? En dérivant l'expression de $f(a)$, donner l'expression de a_r en fonction de $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$.

6) A supposer qu'on sache résoudre l'équation différentielle et expliciter la fonction $a(\tau)$, comment en déduit-on l'âge de l'Univers que nous noterons t_0 ?

7) On s'intéresse désormais au cas particulier de modèles où $\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0} = 1$. Dans ce cas, compte tenu de la relation entre les paramètres Ω, que vaut $\Omega_{\kappa,0}$ et donc la courbure κ de l'Univers ? En déduire qu'on a nécessairement $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ à chaque instant et pas seulement aujourd'hui à $t = t_0$.

8) Dans le cas particulier $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ évoqué à la question précédente, comment l'équation de Friedmann se simplifie-t-elle ? Sacant que $\Lambda > 0$, montrer qu'on est alors toujours dans le cas où le point a_m n'existe pas, c'est-à-dire le schéma de droite ci-dessus.

Toujours dans ce cas particulier $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$, il est possible de trouver la solution de l'équation de Friedmann (alors que c'est impossible dans le cas général). On trouve en définitive

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\frac{t}{H_0}\right)\right]^{2/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\,\tau\right)\right]^{2/3} \quad . \tag{4}$$

Notez que je ne vous demande pas de résoudre l'équation pour retrouver cette solution. Vous pourriez toutefois vérifier par calcul que cette fonction est bien solution de l'équation… Mais je ne vous le demande pas ici.

9) Toute résolution générale d'équation différentielle (linéaire ou non) conduit à introduire une ou plusieurs constantes d'intégration. Dans la solution (4), manifestement la constante d'intégration a déjà été fixée. Quelle condition initiale a permis de la faire ?

10) Exprimer dans ces conditions l'âge de l'Univers t_0 au moyen de la fonction arcsinh (fonction inverse de sinh). Donner également l'expression du temps t_r où $a(t_r) = a_r$.

11) Montrer que lorsque $\Omega_{\Lambda,0}$ tend vers zéro, on retrouve une solution très simple d'Univers puissance sans courbure vue dans le cours. Est-ce logique ?

12) Le *modèle de concordance* qui coïncide le mieux avec les données des supernovae de type Ia et du fond diffus cosmologique (CMB) est caractérisé par $\Omega_{\Lambda,0} = 0.73$, $\Omega_{m,0} = 0.27$ et $H_0 = 71\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Ce modèle rentre-il dans le cadre particulier décrit dans les questions précédentes ?

13) Dans le cadre de ce modèle, calculer l'âge de l'Univers t_0, tout d'abord en unités du temps de Hubble $1/H_0$, puis en milliards d'années. On montrera en particulier que t_0 est très proche du temps de Hubble (c'est un hasard). Pour effectuer la conversion numérique, on utilisera les valeurs suivantes

$$1\,\mathrm{Mpc} = 3.085677581 \times 10^{19}\,\mathrm{km} \quad , \qquad 1\,\text{année} = 365.2422\,\text{jours} \quad , \qquad 1\,\text{jour} = 86400\,s \quad .$$

Enfin, pour ceux qui n'ont pas de fonction arcsinh toute prête dans leur calculette, je précise qu'on a la relation

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad . \tag{5}$$

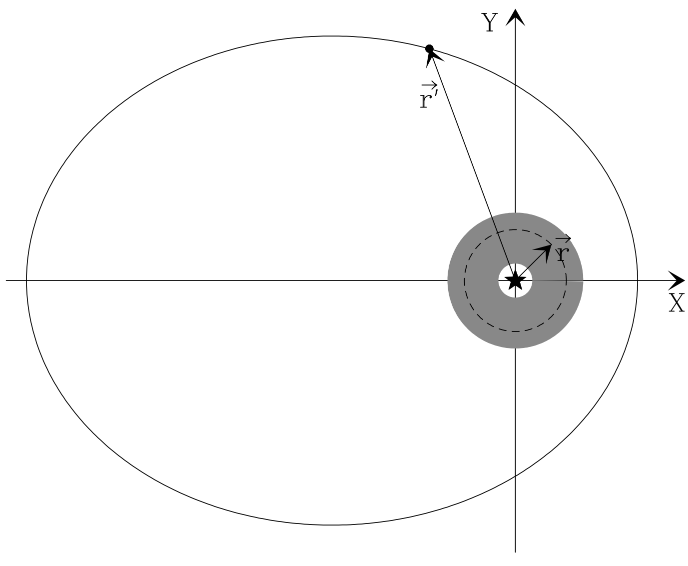
14) Calculer dans les mêmes conditions la valeur du facteur d'échelle a_r correspondant au minimum de la courbe $f(a)$ ainsi que le temps t_r correspondant. L'expansion de l'Univers est-elle accélérée ou ralentie aujourd'hui ?

15) Dans le cours, nous avions dégagé dans le cadre de la métrique de Robertson-Walker une relation simple entre le redshift cosmologique z et le facteur d'échelle a. Utiliser cette relation pour en déduire le redshift correspondant à $a = a_r$, toujours dans le cadre du modèle de concordance.

16) Nous avons vu dans le cours que le fond diffus cosmologique (CMB) se caractérisait par un redshift $z = 1500$. Dans le cadre du modèle de concordance, calculez le facteur d'échelle ainsi que l'âge de l'Univers correspondant à ce redshift.

II Disque perturbé par une planète externe

On considère un disque circumstellaire plan en orbite autour d'une étoile de masse M. On suppose en outre qu'à l'extérieur de ce disque, une planète de masse $m' \ll M$ est en orbite autour de l'étoile dans le même plan que le disque. L'orbite de cette planète sera caractérisée par un demi-grand axe a', une excentricité e', et une longitude du périastre ϖ' par rapport à une direction fixe dans le plan du disque. De manière générale, toutes les quantités primées se rapporteront à la planète. Je précise ici que nous considérons un problème plan (toutes les orbites sont dans le même plan), et que donc il est inutile de considérer d'autres éléments d'orbite comme les inclinaisons et les longitudes de nœuds.



1) Nous supposerons que l'orbite de la planète est fixe dans le temps, et ne subit aucune perturbation. A quelle(s) condition(s) cette approximation peut-elle être considérée comme valable ?

2) Dans ces conditions, nous considérerons dorénavant pour simplifier les calculs que la longitude du périastre de la planète vaut $\varpi' = 0$, ce qui est la situation représentée ci-dessus. Pourquoi cette supposition ne restreint-elle en rien la généralité de notre étude ?

Nous prenons maintenant une particule du disque, en orbite autour de l'étoile sur une orbite de demi-grand axe a, excentricité e et longitude du périastre ϖ. Le but de l'exercice est d'étudier l'effet des perturbations de la planète sur l'orbite de la particule.

On désigne par $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ les vecteurs positions instantanés de la particule et de la planète, et par r et r' les normes correspondantes. Le Hamiltonien qui régit le mouvement de la particule s'écrit alors

$$H = -\frac{GM}{2a} - Gm'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r'^3}\right) \qquad , \tag{6}$$

le terme $|\vec{r}-\vec{r'}|$ désignant ici la norme de la différence entre les deux vecteurs, et donc la distance instantanée entre la particule et la planète.

3) Dans cette expression, que représentent le premier et le deuxième terme ? Lequel est le plus important ? Dans la parenthèse du deuxième terme, que représentent chacun des deux termes ? Quelle est l'origine du deuxième ?

4) Pourquoi peut-on supposer (ce que nous ferons désormais) $r \ll r'$? Tenant compte de cela, et en désignant par β l'angle entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r'}$, montrer que le Hamiltonien se développe comme suit :

$$H = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm'}{r'}\left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos\beta)\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right) \qquad , \tag{7}$$

où P_n désigne le n-ième polynôme de Legendre. A ce titre je rappelle que le produit scalaire des deux vecteurs vérifie $\vec{r}\cdot\vec{r'} = rr'\cos\beta$, et qu'on a le développement classique, valable pour $x < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\beta + x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\beta)x^n \qquad . \tag{8}$$

Je rappelle aussi que les deux premiers polynômes de Legendre sont $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$.

La suite de l'étude consiste à tronquer le développement en série à un certain ordre et à moyenner les termes restants indépendamment sur les deux orbites.

5) Pour quelles raisons peut-on être à peu près certain que ces opérations sont ici justifiées ? Dans quelle situation ne pourrait-on pas moyenner indépendamment ?

6) Dans le cadre du processus de moyennisation, le demi-grand axe a de la particule devient une constante du mouvement (on parle d'invariant séculaire). Quelle base théorique permet d'affirmer ceci sans le moindre calcul ?

Pour les besoins de notre étude, nous allons limiter le développement à $n = 3$. Dans ces conditions, les calculs de moyennisation (que vous pourriez faire, mais ça prendrait du temps...) conduisent au résultat suivant :

$$\overline{H} = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm'}{a'} + U_2 + U_3 \tag{9}$$

avec

$$U_2 = -\frac{Gm'}{8}\frac{a^2}{a'^3}\frac{3e^2+2}{(1-e'^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad U_3 = \frac{15Gm'}{64}\frac{a^3}{a'^4}\frac{e\,e'(3e^2+4)\cos\varpi}{(1-e'^2)^{5/2}} \qquad . \tag{10}$$

Pour la suite de notre étude, nous allons introduire les deux coefficients suivants

$$A = \frac{3}{4}\frac{m'}{M}\frac{a\sqrt{aGM}}{a'^3}\frac{1}{(1-e'^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{15}{16}\frac{m'}{M}\frac{a^2\sqrt{aGM}}{a'^4}\frac{e'}{(1-e'^2)^{5/2}} \qquad . \tag{11}$$

Dans ces conditions, il est facile de réécrire les termes U_2 et U_3 sous la forme

$$U_2 = -\frac{A}{6}\sqrt{aGM}\left(3e^2+2\right) \qquad \text{et} \qquad U_3 = \frac{B}{4}\sqrt{aGM}\,e\left(3e^2+4\right) \qquad . \tag{12}$$

L'intérêt de cette écriture apparaîtra plus loin. Il s'agit là encore de calculs que vous seriez capables de faire vous-mêmes, mais qui vous prendraient un peu de temps...

7) Pourquoi peut-on affirmer que les coefficients A et B sont constants ?

Je vous redonne ici les équations de Lagrange qui régissent les variations séculaires des éléments orbitaux dans le cas plan

$$
\begin{aligned}
e\sqrt{aGM}\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1-e^2}{n}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}+\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial\overline{H}}{\partial\varpi} \qquad ; &(13)\\
e\sqrt{aGM}\,\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} &= -\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial\overline{H}}{\partial e} \qquad , &(14)\\
& &(15)
\end{aligned}
$$

8) A quoi se réduit le terme $\partial\overline{H}/\partial t$ ici ? Utiliser ces équations pour en déduire $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t$ en fonction de e, ϖ et des coefficients A et B.

9) On va supposer désormais que l'excentricité e est petite. Simplifier dans ces conditions les expressions de $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t$.

10) Pour faciliter l'étude, nous introduisons deux nouvelles variables cartésiennes $k = e\cos\varpi$ et $h = e\sin\varpi$. Déduire de la question précente les dérivées temporelles $\mathrm{d}k/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$. On montrera que ces expressions se mettent sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -Ah \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = Ak - B \qquad . \tag{16}$$

11) On introduit maintenant la variable complexe $\zeta = k + ih = e\,\exp(i\varpi)$. Montrer que ζ obéit à une équation différentielle très simple fonction de A et B (on n'oubliera pas que $i^2 = -1$). Résoudre cette équation pour trouver $\zeta(t)$. On dira qu'à $t = 0$ on a $e = 0$ comme condition initiale. Il pourra être utile de considérer $\zeta - B/A$ comme fonction auxiliaire.

12) Montrer que l'évolution temporelle de ζ, et donc celle de k, h, e et ϖ est périodique. Donner l'expression de la période T du mouvement en fonction de A.

13) En utilisant la troisième loi de Képler pour éliminer la constante G, montrer que la période T s'exprime assez simplement en fonction de la période orbitale P de la particule autour de l'étoile et des constantes du problème. Montrer que $T \gg P$. Est-ce normal ? Faites l'application numérique en prenant $M = 1\,M_\odot$, $m = 1\,M_{\mathrm{Jupiter}} = 1/1047.355\,M_\odot$, $a' = 300\,\mathrm{UA}$, $e' = 0.5$, $a = 70\,\mathrm{AU}$.

14) Montrer que dans le plan complexe, la trajectoire de $\zeta(t)$ est un cercle dont on donnera le rayon et la position du centre en fonction de A et B et ζ_0. Faire un schéma. En déduire que l'excentricité e de la particule évolue de manière périodique, et que le maximum $e_{\max}$ est nécessairement atteint lorsque $\varpi = 0$.

15) Montrer que l'hypothèse faite juste avant la question (9) est justifiée a posteriori.

L'image ci-contre représente un disque imagé autour de l'étoile au centre. Une planète (non visible ici) est présente à l'extérieur du disque. Le disque est constitué de particules qui diffusent la lumière de l'étoile. La dynamique des particules s'inscrit dans le cadre du modèle décrit dans les questions précédentes en suivant un cycle d'évolution de l'excentricité couplé à celui de ϖ.

16) Le disque a un aspect clairement dissymétrique par rapport à l'étoile et le côté du péricentre est clairement plus lumineux. Ce phénomène appelé *pericenter glow* (Wyatt 1999) a été identifié dans plusieurs disques de ce type. Comment peut-on expliquer ce phénomène dans le cadre du modèle que nous avons décrit ?