Licence 3
Astrophysique – Gravitation – Corrigé

H. Beust

17 mai 2018
Calculatrices autorisées – 1 feuille recto-verso A4

I Cosmologie Λ-CDM

1) La relation est simplement $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1$. On l'obtient en divisant l'équation de Friemann par $\dot{a}^2$.

2) On écrit

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda a_0^2 c^2}{3\dot{a}_0^2} = \frac{\Lambda c^2}{3\dot{a}_0^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\Lambda,0}} = \frac{a^2\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} \qquad . \tag{1}$$

De même,

$$\Omega_{\kappa,0} = -\frac{\kappa c^2}{\dot{a}_0^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Omega_\kappa}{\Omega_{\kappa,0}} = \frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} \qquad . \tag{2}$$

Pour Ω_m, c'est un peu plus compliqué. Il faut tenir compte de $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 = \rho_0$

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G\rho_0}{3\dot{a}_0^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Omega_m}{\Omega_{m,0}} = \frac{a^2\dot{a}_0^2\rho}{\dot{a}^2\rho_0} = \frac{\dot{a}_0^2}{a\,\dot{a}^2} \qquad . \tag{3}$$

3) On écrit déjà

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{H_0}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = a\frac{H}{H_0} \qquad . \tag{4}$$

Ensuite, on écrit l'équation de Friedmann sous la forme

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Omega_{m,0}\frac{\dot{a}_0^2}{a\,\dot{a}^2} + \Omega_{\Lambda,0}\frac{a^2\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} + \Omega_{\kappa,0}\frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} = 1 \qquad , \tag{5}$$

soit en multipliant par $\dot{a}^2/\dot{a}_0^2$

$$\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\kappa,0} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 = \frac{\dot{a}^2}{\dot{a}_0^2} = a^2\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \qquad , \tag{6}$$

d'où le résultat. Bien entendu, il y a d'autres façons d'y parvenir.

4) S'il existe un point a_m au-delà duquel la fonction $f(a)$ devient négative, clairement l'expansion ne peut pas se poursuivre au-delà de ce point. Une fois ce point atteint, l'Univers se recontractera. En revanche si a_m n'existe pas, on a toujours $f(a) > 0$ pour tout a ; $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ ne s'annule pas et l'expansion se poursuit indéfiniment.

5) Le point a_r sera celui où $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ est minimale tout en restant positive. L'expansion, tout en se poursuivant indéfiniment, sera d'abord ralentie jusqu'à atteindre a_r et accélérée ensuite. a_r correpondra au point où $f(a)$ est minimale, donc où $f'(a) = \mathrm{d}f(a)/\mathrm{d}a = 0$. On dérive

$$f'(a) = -\frac{\Omega_{m,0}}{a^2} + 2a\Omega_{\Lambda,0} \qquad \Longrightarrow \qquad a_r = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \qquad . \tag{7}$$

6) Si on sait résoudre l'équation différentielle, on trouve l'expression de $a(\tau)$. L'âge de l'Univers correspond au moment t_0 où $a(\tau_0) = a_0 = 1$. τ_0 est l'âge de l'Univers mesuré en unité du temps de Hubble $1/H_0$. Pour avoir le temps t_0, il n'y a qu'à multiplier par le temps de Hubble $1/H_0$, c'est-à-dire $t_0 = \tau_0/H_0$. Autrement, dans tous les cas, l'équation différentielle est à variables séparables et se réécrit

$$\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{f(a)}} = \mathrm{d}\tau \qquad . \tag{8}$$

Comme à $\tau = 0$ on a $a = 0$ (Big Bang) et qu'à $\tau = \tau_0$ on a $a = a_0 = 1$, il vient par intégration

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{f(a)}} = \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}t = \tau_0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{f(a)}} \qquad . \tag{9}$$

7) On a toujours à chaque instant $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1$. Ceci est vrai en particulier aujourd'hui à $t = t_0$. On en déduit donc $\Omega_{\kappa,0} = 0$. Mais compte tenu de la définition de Ω_κ, on en déduit $\kappa = 0$. La courbure de l'Univers est nulle, et comme le modèle est à courbure constante, ceci reste vrai à chaque instant. L'Univers est plat, on a donc $\Omega_\kappa = 0$ à cahque instant, et donc $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

8) Avec $\Omega_{\kappa,0} = 0$, l'équation de Friedmann se réduit à

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 \qquad . \tag{10}$$

Il est alors clair que le membre de droite de l'équation (la fonction $f(a)$) est toujours positif ($a > 0$), car on a supposé $\Lambda > 0$. Le point a_m ne peut pas exister.

9) La constante d'intégration a été fixée en disant qu'à $t = 0$ ($\tau = 0$), on doit avoir $a = 0$. Dit autrement, on fixe l'instant $t = 0$ au moment du Big Bang.

10) L'âge de l'Univers correspond au temps où on aura $a = 1$, soit

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}\,\mathrm{arcsinh}\left[\left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{1/2}\right] \qquad . \tag{11}$$

On peut transformer cette expression (ce n'était pas demandé ici). Nous avons

$$\sinh^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\,\tau_0\right) = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} \qquad . \tag{12}$$

Or en posant $x = (3/2)\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\,\tau_0$ nous pouvons écrire

$$\tanh^2 x = \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\sinh^2 x}{1 + \sinh^2 x} = \frac{\Omega_{\Lambda,0}/\Omega_{m,0}}{1 + \Omega_{\Lambda,0}/\Omega_{m,0}} = \Omega_{\Lambda,0} \tag{13}$$

en utilisant $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$. Il vient donc

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}\,\mathrm{arctanh}\left(\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\right) \qquad . \tag{14}$$

L'expression de a_r a été trouvée à la question 6. Il suffit de résoudre $a(\tau) = a_r$. Il vient

$$t_r = \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad . \tag{15}$$

11) Pour $x \to 0$, on a $\sinh x \simeq x$. Donc à t fixé, pour $\Omega_{\Lambda,0} \to 0$, on a

$$a(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\frac{t}{H_0}\right)^{2/3} = \Omega_{m,0}^{1/3}\left(\frac{3}{2}\frac{t}{H_0}\right)^{2/3} \qquad . \tag{16}$$

Or, tenant compte de $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$, si $\Omega_{\Lambda,0} \to 0$ on a $\Omega_{m,0} \to 1$. Il vient donc

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\frac{t}{H_0}\right)^{2/3} \qquad . \tag{17}$$

Nous retrouvons l'Univers Newtonien plat appelé Univers d'Einstein – de Sitter. C'est logique, nous sommes dans un modèle d'Univers plat, et en annulant la constante cosmologique il redevient Newtonien.

12) Avec le modèle de concordance, nous avons clairement $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ aux incertitudes de mesure près. Nous sommes donc bien dans le cadre de notre cas particulier.

13) Si on fait l'application numérique avec les valeurs correspondantes, il vient

$$t_0 = \frac{0.9927}{H_0} = 13.772\,\text{milliards d'années} \qquad . \tag{18}$$

L'âge de l'Univers se trouve en effet très proche du temps de Hubble $1/H_0$

14) On continue l'application numérique avec les valeurs et les formules. On trouve

$$a_r = 0.5697 \qquad \text{et} \qquad t_r = 7.076\,\text{milliards d'années} \qquad . \tag{19}$$

Clairement $t_r < t_0$ ($a_r < 1$), par conséquent nous avons déjà dépassé ce point. L'expansion est accélérée aujourd'hui.

15) La relation cherchée est

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a} \qquad . \tag{20}$$

Pour $a = a_r$ nous en déduisons $z = 0.7552$.

II Disque perturbé par une planète externe

1) Les perturbations que pourrait subir l'orbite de la planète peuvent provenir soit du disque lui-même, soit des étoiles de passage. Nous supposerons donc que la masse du disque reste petite devant celle de la planète et que sur le temps de notre étude, aucune étoile ne s'approche suffisamment près du système que nous considérerons isolé.

2) Dans le plan de notre étude, les direction OX et OY du repère choisi sont complètement arbitraires. Dans la mesure où l'orbite de la planète est fixe, rien n'interdit de fixer la direction OX dans la direction du périastre de la planète, ce qui revient à fixer $\varpi' = 0$. Si nous gardions un $\varpi' \neq 0$, tous les calculs qui vont suivre se feraient en fonction de $\varpi - \varpi'$ au lieu de ϖ. Cela alourdirait l'écriture pour rien.

3) Le premier terme est bien évidemment le Hamiltonien Képlérien qui décrit l'orbite de la particule autour de l'étoile. Le deuxième représente la perturbation due à la planète. Elle se décompose en un terme direct (le premier) qui représente l'énergie potentielle directe de l'interaction gravitationnelle entre la planète et la particule, et un terme indirect (le deuxième) lié aux forces d'inertie. En effet, dû à la présence de la planète, le référentiel lié à l'étoile n'est pas inertiel (l'étoile a un mouvement). Il en résulte des forces d'inertie dont la traduction dans le Hamiltonien est donnée par le terme indirect.

4) $r \ll r'$ signifie que la planète est en orbite à grande distance à l'extérieur du disque, ce qui correspond bien au cadre de notre étude. On écrit ensuite

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r'}+r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\beta+r'^2}} = \frac{1}{r'\sqrt{1-2\frac{r}{r'}\cos\beta+\frac{r^2}{r'^2}}} \\ &= \frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\beta)\left(\frac{r}{r'}\right)^n = \frac{1}{r'}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} P_n(\cos\beta)\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right) \qquad (21)\end{aligned}$$

Ensuite, on écrit pour le terme indirect

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r'^3} = \frac{r\cos\beta}{r'^2} \quad , \qquad (22)$$

et on remarque que ce terme va exactement compenser le terme $n = 1$ dans le dévloppement en polynômes de Legendre. La somme va donc commencer à $n = 2$. Au bout du compte, l'ensemble se réarrange sous la forme

$$H = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm'}{r'}\left(1+\sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos\beta)\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right) \quad . \qquad (23)$$

5) En éléments de Delaunay, l'anomalie moyenne (qui représente la position de la particule sur son orbite), est canoniquement conjuguée à la quantité $L = \sqrt{GMa}$. Moyenner revient à éliminer l'anomalie moyenne. Le Hamiltonien moyenné ne dépend donc pas de l'anomalie moyenne. Par voie de conséquence, le moment conjugué L est une constante du mouvement, ce qui revient à dire que le demi-grand axe a est constant.

6) Ici on aura $\partial\overline{H}/\partial e = \partial(U_2+U_3)/\partial e$ et la même chose avec ϖ. On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{aGM}}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\varpi}+\frac{\partial U_3}{\partial\varpi}\right) = -B\,\frac{3e^2+4}{4}\sqrt{1-e^2}\,\sin\varpi \quad ; \qquad (24)\\ \frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{aGM}}\left(\frac{\partial U_2}{\partial e}+\frac{\partial U_3}{\partial e}\right) = \left(A - B\,\frac{9e^2+4}{4e}\cos\varpi\right)\sqrt{1-e^2} \quad . \qquad (25)\end{aligned}$$

7) Si $e' = 0$, on a clairement

$$A = \frac{3}{4}\frac{m'}{M}\frac{a\sqrt{aGM}}{a'^3} \qquad \text{et} \qquad B = 0 \quad . \qquad (26)$$

Il vient alors pour les dérivées

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} = A\sqrt{1-e^2} = \text{constante} \quad . \qquad (27)$$

En effet, si $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t = 0$, e est une constante, et donc $\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t$ aussi. L'excentricité ne varie pas et l'orbite se contente de précesser dans son plan à vitesse constante fonction de A et e.

8) Si on développe à l'ordre le plus bas, il vient

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \simeq -B\sin\varpi \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} \simeq A - \frac{B}{e}\cos\varpi \qquad . \tag{28}$$

9) On écrit

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\cos\varpi - e\sin\varpi\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} = -B\sin\varpi\cos\varpi - e\left(A - \frac{B}{e}\cos\varpi\right)\sin\varpi = -Ah \qquad ; \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\sin\varpi + e\cos\varpi\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} = -B\sin^2\varpi\cos\varpi + e\left(A - \frac{B}{e}\cos\varpi\right)\cos\varpi = -B + Ak \tag{30}$$

10) On écrit tout simplement

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -Ah + ikA - iB = iA(k+ih) - iB = iA\zeta - iB = iA\left(\zeta - \frac{B}{A}\right) \quad . \tag{31}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre à coefficients constants, qui se résout très simplement. Si on pose $\xi = \zeta - B/A$ on est ramené à une équation sans second membre dont la solution est une exponentielle simple. On peut aussi dire que la solution générale est la somme de l'équation sans second membre (donc l'exponentielle), à laquelle on ajoute la solution particulière constante B/A. Au bout du compte, on trouve la solution suivante

$$\zeta(t) = \frac{B}{A} + \left(\zeta_0 - \frac{B}{A}\right)\mathrm{e}^{iAt} \qquad , \tag{32}$$

où ζ_0 est la valeur de ζ à $t = 0$. Maintenant, on veut $e = 0$ à $t = 0$, donc $\zeta_0 = 0$, ce qui donne

$$\zeta(t) = \frac{B}{A}\left(1 - \mathrm{e}^{iAt}\right) \quad \Longrightarrow \quad k(t) = \frac{B}{A}\left(1 - \cos(At)\right) \quad \text{et} \quad h(t) = -\frac{B}{A}\sin(At) \quad . \tag{33}$$

11) Clairement, avec l'exponentielle complexe, l'expression de $\zeta(t)$ est périodique, de période $T = 2\pi/A$. Il en sera de même pour k, h, e et ϖ qui sont respectivement les partie réelle, partie imaginaire, module et argument de ζ.

12) Si on explicite la valeur de A, il vient

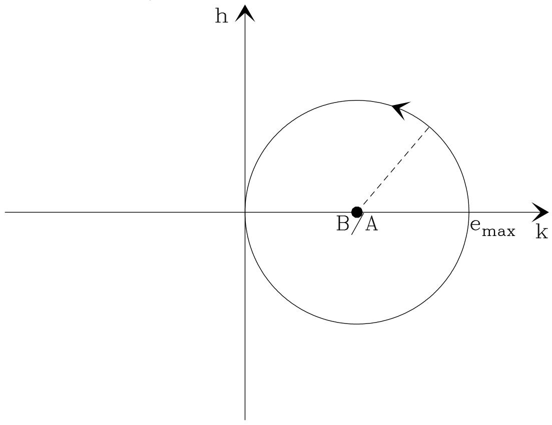
$$T = \frac{2\pi}{A} = \frac{8\pi}{3}\frac{M}{m'}\frac{a'^3}{a\sqrt{aGM}}\left(1 - e'^2\right)^{3/2} \tag{34}$$

La troisième loi de Képler s'écrit $P^2/a^3 = 4\pi^2/GM$. Si on élimine G entre les deux expressions, on en déduit

$$T = \frac{4}{3}\frac{M}{m'}\left(\frac{a'}{a}\right)^3\left(1 - e'^2\right)^{3/2} P \tag{35}$$

Compte tenu de $M \gg m'$ et $a' \gg a$, on a clairement $T \gg P$. C'est parfaitement normal compte tenu du fait que l'évolution de l'orbite doit intervenir sur un temps beaucoup plus long que le temps de la période orbitale (c'est une perturbation). Pour l'application numérique, on peut commencer par calculer T/P ce qui ne nécessite aucun conversion d'unité. On trouve $T/P = 3887.3$, ce qui confirme bien l'affirmation du dessus. Ensuite, pour calculer P on utilise la troisième loi de Képler. Il vient $P = 585.7$ ans puis $T = 2.277$ millions d'années. Au passage pour calculer P il est inutile de faire des conversions d'unités compliqués. Avec $M = 1\,M_\odot$, P en années se calcule comme $a^{3/2}$ si a est en AUs. Réfléchissez-y, vous verrez que c'est évident.

13) Dans le plan complexe, $\xi = \zeta - B/A$ est clairement de module constant $|\xi_0| = B/A$ et d'argument At augmentant linéairement avec le temps. ξ décrit à vitesse constante un cercle centré sur l'origine de rayon B/A. La trajectoire de ζ sera donc elle aussi un cercle de même rayon mais décalé, centré sur B/A et passant par l'origine. Comme k et h ne sont que les parties réelle et imaginaire de ζ, le mouvement dans le plan (k, h) sera identique.



L'excentricité e est le module de ζ. Comme le cercle n'est par centré sur l'origine, elle va subir une évolution périodique entre un maximum et un minimum. Le centre du cercle est situé sur l'axe réel, décalé vers les $k > 0$. De manière évidente, l'excentricité maximale sera atteinte là où le cercle coupe l'axe réel à droite, donc pour $\varpi = 0$, et vaudra $2B/A$ (deux fois le rayon du cercle).

$$e_{\max} = \frac{2B}{A} = \frac{5}{2}\frac{a}{a'}\frac{e'}{1-e'^2} \tag{36}$$

si on remplace A et B par leurs expressions. Comme on a $a \ll a'$, on a $e \ll 1$ ce qui justifie a posteriori l'approximation. Au passage on pouvait remarquer qu'on pouvait transformer les expressions de $k(t)$ et $h(t)$ et en tirer $e(t)$ (et $\varpi(t)$ aussi)

$$k(t) = \frac{2B}{A}\sin^2\left(\frac{At}{2}\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{2B}{A}\sin\left(\frac{At}{2}\right)\cos\left(\frac{At}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad e(t) = \frac{2B}{A}\left|\sin\left(\frac{At}{2}\right)\right| . \tag{37}$$

On voit donc bien que l'excentricité maximale est obtenue au bout de $t = \pi/A$ (donc une demi-période) et vaut bien $2B/A$.