Licence 3 Physique – Astrophysique – Gravitation – Corrigé

H. Beust   10 mars 2017   Calculatrices autorisées

I La pression de radiation

1) *(2 pts)* La pression de radiation $F_{\rm rad}$ est proportionnelle à $1/r^2$; La force de gravité $F_{\rm grav} = GMm/r^2$ aussi. Par conséquent le rapport des deux est indépendant de la distance à l'étoile r. Nous écrirons $F_{\rm rad}/F_{\rm grav} = \beta$.

2) *(1 pt)* Si $\beta > 1$, on $F_{\rm rad} > F_{\rm grav}$. Autrement dit, la pression de radiation est supérieure à la force de gravité de l'étoile. Le grain va normalement être chassé au loin, repoussé par la pression de radiation.

3) *(2 pts)* On écrit l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{\rm rad} + \vec{F}_{\rm grav} = (1-\beta)\vec{F}_{\rm grav} = -\frac{GMm(1-\beta)}{r^3}\,\vec{r} \qquad \text{soit} \\ \ddot{\vec{r}} &= -\frac{GM(1-\beta)}{r^3}\,\vec{r} \qquad . \end{aligned}$$

4) *(3 pts)* Cette équation du mouvement est encore une équation de mouvement Képlérien. Si je pose $M' = M(1-\beta)$ (qui est une constante), l'équation du mouvement se réduit à

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM'}{r^3}\,\vec{r} \qquad ,$$

c'est-à-dire une équation de mouvement Képlérien pur autour d'une étoile de masse $M' < M$. Tout se passe comme si du point de vue de la particule de poussière, la pression de radiation "réduisait" la masse de l'étoile. La particule suivra toujours une orbite Képlérienne, mais différente de celle qu'elle aurait suivie sans pression de radiation.

5) *(2 pts)* Application numérique : On trouve $\beta = 5.7 \times 10^{-7} \ll 1$ pour le rocher de 1 m et $\beta = 0.57$ pour la grain de poussière. Clairement la pression de radiation est négligeable pour les rochers est n'est sensible que pour les grains de poussière suffisamment petits.

II La planète HD 106906 b

1) *(2 pts)* La taille de la zone des planètes dans le Système Solaire est de $\sim$50 UA. La planète HD 106906 b est à une distance beaucoup plus grande. La présence d'une planète aussi massive à une telle distance est très inhabituelle.

2) *(2 pts)* La troisième loi de Képler s'écrit $n^2a^2 = GM$, n étant le moyen mouvement et M la masse centrale. On peut aussi écrire $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$ si T est la période orbitale. En prenant $a = 650\,\mathrm{UA}$, on trouve $T = 10277$ ans, ce qui est bien plus grand que les périodes orbitales dans le système solaire. Mais c'est logique. Au passage, pour faire l'application numérique, il est inutile de convertir en mètres. En gardant a en UA, M en masses solaires$/4\pi^2$, on obtient directement la valeur de T en années, car dans ce système d'unités, on a nécessairement $G = 1$. Réfléchissez-y, vous verrez que c'est évident.

3) *(1 pt)* la planète met 1 période obitale à faire un tour sur son orbite, soit 360°. Un déplacement de 1° prendra 360 fois moins de temps, soit ici 28.5 années. Ca va prendre du temps. Le mouvement est détectable sur l'échelle de temps d'une vie humaine, mais il faudra être patient.

4) *(2 pts)* Si l'orbite est elliptique, d'après la deuxième loi de Képler, elle passe plus de temps près de l'apoastre que du périastre. Donc en l'observant à un moment donné pris au hasard, on a plus de chances d'être en train de l'observer aux alentours de l'apoastre. A l'apoastre, la planète va moins vite sur une orbite ellpitique que si elle était sur une orbite circulaire. Donc le mouvement sur le ciel va aller encore plus lentement. En prenant les formules Képlériennes données dans le cours, et en supposant que la planète est à l'apoastre Q, la vitesse peut s'exprimer comme

$$v^2 = \frac{GM(1-e)}{r} \tag{1}$$

Cela peut aussi se déduire facilement de la conservation de l'énergie. Si $e \neq 0$, on voit bien que c'est plus petit que dans le cas $e = 0$. Donc le calcul de la question précédente représentait la configuration la plus favorable à la détection. Si on rajoute maintenant le fait que l'orbite n'a a priori aucun raison d'être vue de face, l'effet de projection va encore dimunuer la vitesse apparente. En conséquence, la détection du mouvement orbital de cette planète va être très difficile.

III Planète creuse

1) *(2 pts)* La bonne réponse est la $n°2$, soit $U(r)$ =constante. On utilise pour cela le théorème de Gauss. Nous sommes ici en géométrie à symétrie sphérique. Dans ce cas, l'application du théorème de Gauss montre que le champ gravitationnel à une distance r du centre est le même que celui d'une masse ponctuelle placée au centre, ayant la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r. Ici, pour une sphère à l'intérieur de la cavité, cette masse est nulle. Donc le champ est nul, et le potentiel est constant.

Ceux qui sont fâchés avec le théorème de Gauss peuvent raisonner avec l'équation de Poisson. Dans la cavité, cela se réduit à $\Delta U = 0$, soit avec la symétrie sphérique

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \tag{2}$$

La solution est de la forme $U(r) = A + B/r$ où A et B sont des constantes. Si $B \neq 0$, le champ gravitationnel tendrait vers l'infini au centre de la cavité, ce qui n'est pas physique. Donc nécessairement $B = 0$, d'où le résultat.

2) *(1 pt)* Le champ gravitationnel $\vec{g} = -\vec{\nabla}U$ est donc nul dans la cavité. Un tel objet aurait cependant du mal à exister, car même si le champ est nul à l'intérieur, l'ensemble reste vulnérable à la moindre perturbation de sa géométrie. Pour une même masse totale et une même densité moyenne, son énergie gravitationnelle dans la configuration coquille reste supérieure à celle qu'elle aurait si toute la masse se retrouvait au centre.