Licence 3 Physique – Astrophysique – Gravitation

H. Beust 13 mars 2018 Correction

I Le système plutonien

1) L'équation polaire d'une orbite elliptique s'écrit (au choix)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu} = a(1-e\cos u) \qquad , \tag{1}$$

où a est le demi-rand axe, e l'excentricité, ν l'anomalie vraie et u l'anomalie excentrique. Dans tous les cas, le périhélie correspond à $\nu = u = 0$. Il vient alors $r = a(1-e)$. En appliquant avec les données de Pluton, on trouve 29.5875 AU, soit légèrement en-dessous du demi-grand axe de l'orbite de Neptune supposée circulaire. Les deux orbites se coupent donc potentiellement, et Pluton devrait logiquement rentrer tôt ou tard en collision avec Neptune, ou beaucoup plus vraisemblablement se faire éjecter de son orbite par rencontre proche avec Neptune. Deux choses l'en protègent. Premièrement, les deux planètes ne gravitent pas dans le même plan. Certains ont fait remarquer cela. Mais surtout, les deux planètes sont calées dans une résonance de moyen mouvement 2 : 3 qui évite à Pluton de rencontrer Neptune au moment où elle coupe son orbite. On appelle cela un mécanisme de protection de phase.

2) La relation demandée est la troisième loi de Képler, qui s'écrit

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} \tag{2}$$

si m_1 et m_2 sont les masses concernées.

3) On applique cette relation en prenant bien en compte la somme des deux masses de Pluton et de Charon (car ici Charon est certes plus petit, mais pas du tout négligeable). On trouve $a = 19596\,\mathrm{km}$. Ceux qui omettent la masse de Charon trouvent 18860 km, ce qui permet de mesurer l'erreur faite.

4) Appelons m_P et m_C les masses de Charon et de Pluton. Le barycentre ou centre de gravité des deux masses est situé entre les deux, à une distance r_P de Pluton et r_C de Charon. Il vient

$$r_P = a\,\frac{m_C}{m_C+m_P} \qquad \text{et} \qquad r_C = a\,\frac{m_P}{m_C+m_P} \qquad . \tag{3}$$

Bien entendu la somme des deux vaut $r_C + r_P = a$, c'est logique. Numériquement, avec la valeur de a trouvée à la question précédente, on trouve $r_P = 2127\,\mathrm{km}$ et $r_C = 17469\,\mathrm{km}$. Le centre de masse est nettement plus proche de Pluton que de Charon, et c'est bien normal, car Pluton est quand même bien plus massif. Il n'empêche, la valeur de r_P est plus grande que le rayon de Pluton (et même que son diamètre). En conséquence, le centre de masse est à plus de 1 rayon de Pluton de sa surface. Il est donc nettement en dehors de la planète, et Pluton parcourt une orbite autour de de point (vous pouvez trouvez des animations sur internet). Voilà pourquoi on peut parler de planète double. En comparaison, dans la situation Terre-Lune, le barycentre du système est *dans* la Terre, et c'est encore pire dans les autres cas de satellites du Système Solaire. Le système Pluton-Charon est un peu unique dans le Système Solaire.

5) Les deux corps se présentent toujours la même face à cause de très forts effets de marée entre eux. La bonne comparaison est à faire avec le système Terre-Lune. C'est là aussi à cause des forces de marée que la Lune nous présente toujours la même face. La Terre ne présente pas toujours la même face car le rapport de masse est plus élevé. La Terre a une grande inertie et n'a pas encore pu être synchronisée. La système Pluton-Charon est une version plus extrême de cela, avec un rapport de masse moins dissymétrique et surtout une distance mutuelle nettement plus petite (près de 20 fois !). Les effets de marée sont donc beaucoup plus forts et les deux corps sont totalement synchronisés.

6) Il subsiste un écart d'environ 25 km entre la valeur que nous avons trouvée à la question 3 et celle qui est mentionnée ici. C'est marginalement imputable aux incertitudes sur les masses des deux corps, et encore faudrait-il considérer des masses à la limite des barres d'erreurs. Les satellites extérieurs sont trop peu massifs pour avoir une quelconque influence notable là-dessus, tout comme la relativité générale. Les effets de marée en revanche sont certainement à l'origine de l'écart. En effet, par effet de marée, les deux corps sont déformés, ce qui induit des termes non-Képlériens dans le potentiel d'interaction entre les deux, et donc un écart à la stricte application de la troisième loi de Képler.

7) On applique encore la troisième loi de Képler aux quatre petits satellites. Comme ils sont en orbite autour du couple Pluton-Charon, il faut considérer la masse totale $m_P + m_C$ dans l'application. Il est en revanche inutile de prendre en compte la masse des petits satellites qui est beaucoup plus faible est bien en-dessous de l'incertitude de mesure sur les masses des deux corps principaux. On trouve

$$a_{\text{Styx}} = 42168\,\text{km} \quad , \quad a_{\text{Nix}} = 48481\,\text{km} \quad , \quad a_{\text{Kerberos}} = 57577\,\text{km} \quad , \quad a_{\text{Hydra}} = 64569\,\text{km} \quad . \tag{4}$$

8) Vu du point de vue des petits satellites, le système Pluton-Charon se comporte exactement comme une étoile double autour de laquelle orbiterait une planète dont la masse serait très petite devant la masse des deux étoiles centrales. L'analogie est donc totale, d'autant plus que l'orbite Pluton-Charon est circulaire (à cause des effets de marée), tout comme celle des deux étoiles que nous avions considérées. Le moyen mouvement $n_0 = 2\pi/P$ correspondra donc à celui de l'orbite Pluton-Charon, et le paramètre des masses vaudra $\mu = m_C/(m_P + m_C)$.

9) Il n'y a qu'à appliquer la formule. Le résultat est résumé dans le tableau suivant :

Satellite	$\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t$ (rad.s^{-1})	Période associée (années)
Styx	5.65448×10^{-8}	3.5212
Nix	3.47002×10^{-8}	5.7379
Kerberos	1.90096×10^{-8}	10.4740
Hydra	1.27278×10^{-8}	15.6434

On remarquera que les orbites des petits satellites précessent assez vite. Les périodes de précession sont de quelques années seulement, ce qui est peu comparé aux dizaines de milliers d'années pour les périodes de précession des planètes du Système Solaire.

10) Le développement utilisé est un développement en polynômes de Legendre.

11) Là aussi, on applique la formule. On trouve

Satellite	$(\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t)_4$ (rad.s^{-1})	$(\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t)_6$ (rad.s^{-1})
Styx	1.62487×10^{-8}	4.05941×10^{-9}
Nix	7.54366×10^{-9}	1.42576×10^{-9}
Kerberos	2.93006×10^{-9}	3.92637×10^{-10}
Hydra	1.55992×10^{-9}	1.66213×10^{-10}

12) Les termes d'ordre 4 et 6 sont clairement plus petits que ceux d'ordre 2, et vont décroissants. Ceci dit, la décroissance n'est pas si rapide, à peine un ordre de grandeur d'un terme à l'autre. En tronquant à l'ordre 2, on fait une erreur non négligeable. Il faut pousser le développement à l'ordre 6 pour avoir une estimation correcte des vitesses de précession. Clairement, le développement en polynômes de Legendre ne converge pas très vite dans le cas présent. Ceci est dû au fait que les demi-grands axes des petits satellites ne sont pas assez grands par rapport à celui du couple Pluton-Charon. Le demi-grand axe de Styx n'est par exemple que deux fois plus grand que celui de Pluton-Charon. On constate d'ailleurs que le développement (les $\mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t$) converge mieux avec les satellites les plus extérieurs, ce qui montre bien l'origine du problème.

L'autre type de développement possible est celui en coefficients de Laplace, basé sur un développement en série de Fourier des termes de perturbation. Comme nous l'avons vu dans le cours, la convergence ce type de développement ne repose sur un rapport de demi-grands axe, mais sur le fait que les orbites sont peu excentriques et peu inclinées. Ici les satellites sont tous très peu excentriques et coplanaires avec le couple Pluton-Charon, ce qui valide le recours à ce type de développement. Le mener à bien est ensuite une autre histoire.