Licence 3
Astrophysique – Gravitation
Corrigé

H. Beust

19 mars 2019
Calculatrices autorisées – 1 feuille recto-verso A4

I La sonde New Horizons

1) La vitesse sur orbite circulaire circulaire s'écrit

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad . \tag{1}$$

On peut retrouver cela aisément à l'aide de la deuxième loi de Képler. Avec les données fournies, on trouve $V_c = 4,47\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. A titre de comparaison, la Terre sur son orbite a une vitesse de $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Ensuite la période orbitale s'en déduit par $P = 2\pi a/V_c$. On peut aussi directement applique la troisième loi de Képler sous la forme

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad . \tag{2}$$

Sous cette forme d'ailleurs le calcul est assez simple. En effet, pour tous les objets en orbite autour du Soleil nous aurons $P^2/a^3 =$cte. Or si on considère les périodes en années et les demi-grands axes en UAs, cette constante vaut 1, par application au cas de la Terre. On trouve donc le résultat en années en prenant $44,4313^{3/2}$. Quelle que soit la méthode choisie, le résultat donne 295,33 ans.

2) Remarquons pour commencer que la sonde va beaucoup plus vite que l'astéroïde... Dans le champ gravitationnel du Soleil (ce qui est le cadre de l'approximation ici), l'énergie mécanique s'écrit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad . \tag{3}$$

En prenant pour v la vitesse de la sonde, pour r le lieu de la rencontre, donc la distance de 2014 MU_{69}, et avec la masse de la sonde, on trouve $E = 3,53 \times 10^{10}$ J. La valeur importe peu, ce qui compte c'est que $E > 0$. L'orbite de la sonde autour du soleil est non liée, son orbite est donc hyperbolique. A l'avenir, elle va s'éloigner à jamais du Système Solaire.

3) Le calcul complet de la déviation par 2014 MU_{69} pourrait se faire. Néanmoins, on remarquera que i/ l'astéroïde est assez petit, sa masse est donc faible ; ii/ La vitesse d'approche de la sonde est élevée ; iii/ elle va passer assez loin de 2014 MU_{69} rapport à sa taille. On peut s'attendre à une très faible déviation. En fait la bonne comparaison se fait avec la vitesse d'évasion de l'astéroïde à la distance minimale d'approche qui est de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde. La vitesse d'approche est bien supérieure.

4) Si sa vitesse est constante et si la trajactoire est radiale, le temps nécessaire pour atteindre 600 UA se calcule comme d/v si d est la distance à parcourir, soit $(600 - 44.34)$ UA et v la vitesse de la sonde. Numeriquement ça donne 182.5 ans, ce qui place une arrivée sur place à la mi 2201.

5) On commence par calculer le demi-grand axe de l'orbite hyperbolique de la sonde à partir de l'énergie calculée plus haut. On peut aussi remarquer que la masse de la sonde ne joue aucun rôle concret et se simplifie de l'équation. Quoi qu'il en soit on trouve $a = 5,27$ UA. Ensuite on calcule l'anomalie excentrique u_0 aujourd'hui au passage au voisinage de 2014 MU_{69}, puis celle u_1 à l'arrivée à 600 UA. On trouve en inversant les cosh $u_0 = 2.58$ et $u_1 = 5.09$. Il n'y a plus ensuite qu'à reporter dans l'équation de Képler. En faisant la différence entre cette équation dans la situation aujourd'hui et celle à l'arrivée à 600 UA, il vient

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}}\ (t_1 - t_0) = e(\sinh u_1 - \sinh u_0) - (u_1 - u_0) \qquad . \qquad (4)$$

Avec le demi-grand axe calculé plus haut (attention aux unités !), en résolvant on trouve $t_1 - t_0 = 198,5$ ans, ce qui place l'arrivée à 600 UA à la mi 2217, soit 16 ans plus tard que le premier calcul. Il est normal de trouver une arrivée plus tardive. En effet, en s'éloignant du Soleil, la sonde va perdre de la vitesse par conservation de l'énergie gravitationnelle. Elle arrivera donc plus tard que prévu. De plus, elle ne voyage pas forcément complètement radialement ce qui fait que la vitesse radiale est a priori inférieure à la vitesse absolue donnée dans l'énoncé. Toutefois on remarque que l'écart, tout en étant significatif, n'est pas si énorme que cela comparé au temps qu'il faudra encore à la sonde pour arriver par là. Finalement, l'approximation de mouvement radial et uniforme n'était pas si mauvaise que cela.

Rajoutons également qu'il est illusoire d'espérer que la sonde explorera la planète supposée à ce moment là. Déjà, il y a tout à parier que ses instruments seront hors d'usage, et puis surtout, nous ne savons pas où sera la fameuse planète sur son orbite. Elle peut être n'importe où, peut-être de l'autre côté du Soleil. La probabilité de la trouver au bon endroit par hasard est infîme !

II La planète HD 106906 b

1) La taille de la zone des planètes dans le Système Solaire est de ∼50 UA. La planète HD 106906 b est à une distance beaucoup plus grande. La présence d'une planète aussi massive à une telle distance est très inhabituelle, d'autant plus qu'aucun modèle n'expliquerait la formation d'une telle planète à cette distance.

2) La troisième loi de Képler s'écrit $n^2a^2 = GM$, n étant le moyen mouvement et M la masse centrale. On peut aussi écrire $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$ si T est la période orbitale. En prenant $a = 650$ UA, on trouve $T = 10277$ ans, ce qui est bien plus grand que les périodes orbitales dans le système solaire. Mais c'est logique. Au passage, pour faire l'application numérique, il est inutile de convertir en mètres. En gardant a en UA, M en masses solaires$/4\pi^2$, on obtient directement la valeur de T en années, car dans ce système d'unités, on a nécessairement $G = 1$. Réfléchissez-y, vous verrez que c'est évident.

3) la planète met 1 période obitale à faire un tour sur son orbite, soit 360°. Un déplacement de 1° prendra 360 fois moins de temps, soit ici 28.5 années. Ca va prendre du temps. Le mouvement est détectable sur l'échelle de temps d'une vie humaine, mais il faut être patient.

4) Si l'orbite est elliptique, d'après la deuxième loi de Képler, elle passe plus de temps près de l'apoastre que du périastre. Donc en l'observant à un moment donné pris au hasard, on a plus de chances d'être en train de l'observer aux alentours de l'apoastre. A l'apoastre, la planète va moins vite sur une orbite elliptique que si elle était sur une orbite circulaire. Donc le mouvement sur le ciel va aller encore plus lentement. En prenant les formules Képlériennes données dans le cours, et en supposant que la planète est à l'apoastre Q, la vitesse peut s'exprimer comme

$$v^2 = \frac{GM(1-e)}{r} \tag{5}$$

Cela peut aussi se déduire facilement de la conservation de l'énergie. Si $e \neq 0$, on voit bien que c'est plus petit que dans le cas $e = 0$. Donc le calcul de la question précédente représentait la configuration la plus favorable à la détection. Si on rajoute maintenant le fait que l'orbite n'a a priori aucun raison d'être vue de face, l'effet de projection va encore dimunuer la vitesse apparente. En conséquence, la détection du mouvement orbital de cette planète va être très difficile.