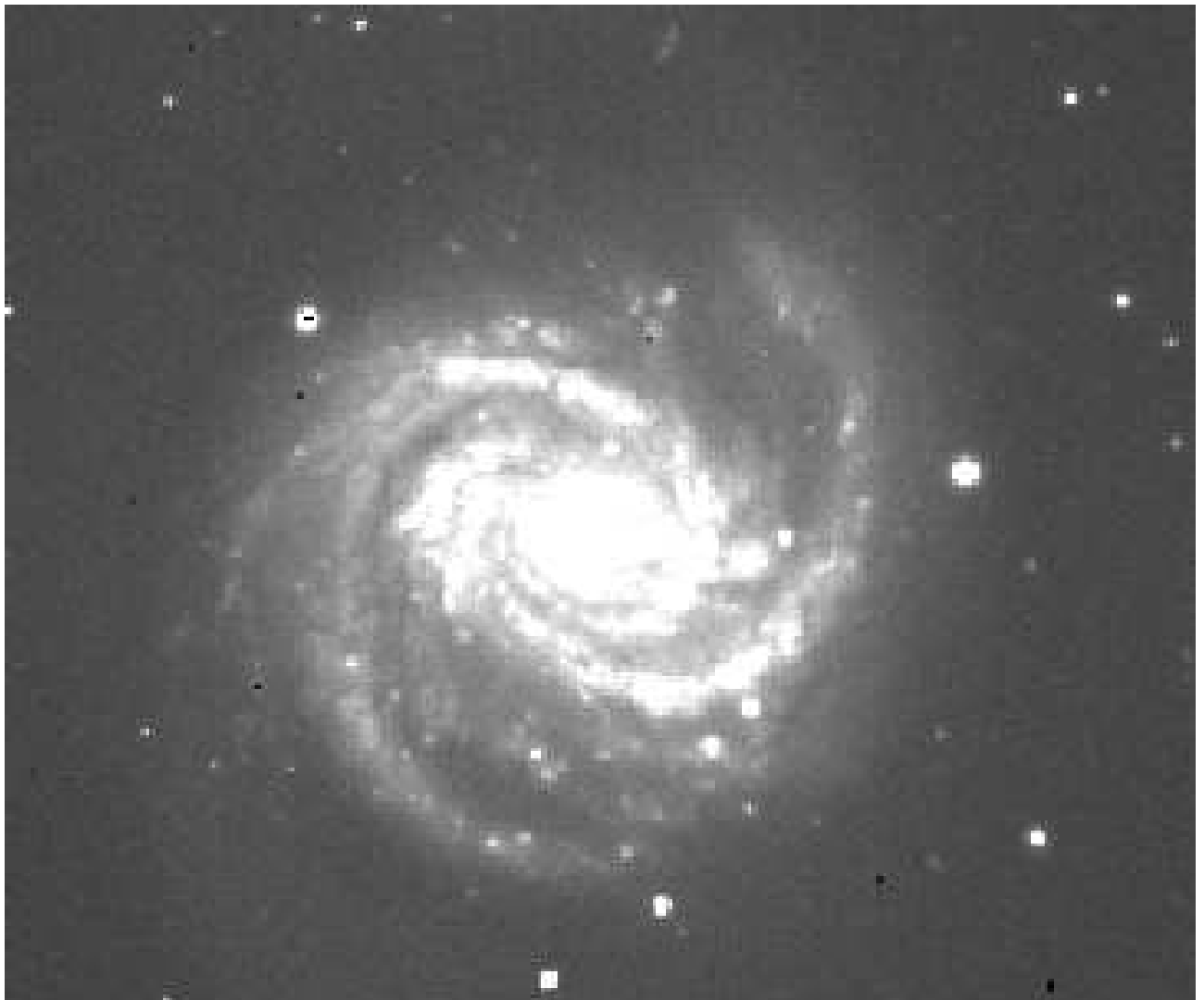


GRAVITATION – GALAXIES

Master mention Physique
Parcours Astrophysique



Hervé Beust

Septembre 2023

Table des matières

I	Gravitation et mécanique céleste	1
1	La gravitation	3
1.1	Introduction : Systèmes planétaires et systèmes stellaires multiples	3
1.2	L'interaction de gravitation	5
1.2.1	La gravitation universelle	5
1.2.2	Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle	7
1.2.3	Energie potentielle et potentiel gravitationnel	7
1.3	Equation de Poisson et théorème de Gauss	8
1.3.1	Equation de Poisson	8
1.3.2	Théorème de Gauss	9
1.3.3	Potentiel de gravitation créé par une masse étendue	10
2	Mécanique Lagrangienne et Hamiltonienne	13
2.1	Mécanique Lagrangienne	13
2.1.1	Principe des travaux virtuels	13
2.1.2	Lagrangien et équations de Lagrange	14
2.1.3	Principe de moindre action	15
2.2	Mécanique Hamiltonienne	15
2.2.1	Moments conjugués et équations canoniques de Hamilton	15
2.2.2	Exemples de systèmes Hamiltoniens simples	17
2.2.3	Crochets de Poisson	18
2.2.4	Transformations canoniques	19
2.2.5	Fonctions génératrices	20
2.2.6	Exemples de transformations canoniques	21
2.2.7	Théorie de Hamilton-Jacobi	22
3	Les problèmes à N corps et le mouvement Képlérien	27
3.1	Le problème des N corps	27
3.2	Le problème des deux corps et les lois de Képler	28
3.2.1	Aspect historique	28
3.2.2	Formulation du problème	29
3.2.3	Résolution	30
3.2.4	Elements d'orbite	31
3.2.5	Formulation Hamiltonienne du problème Képlérien	33
3.3	Le problème restreint à trois corps et les points de Lagrange	35
3.3.1	Définition et position du problème	35
3.3.2	Formulation du problème circulaire dans le repère tournant	36
3.3.3	Constante de Jacobi	37

3.3.4	Points de Lagrange	38
3.3.5	La sphère de Hill	41
3.3.6	Extension au cas du problème elliptique	42
4	Le problème Képlérien perturbé	45
4.1	Equations de Gauss et de Lagrange	45
4.1.1	Equation du mouvement et mouvement Képlérien osculateur	45
4.1.2	Equations de Gauss	46
4.1.3	Equations de Lagrange	48
4.2	Variations séculaires : Moyennes et développements	49
4.2.1	Les approximations	49
4.2.2	Moyennisation	50
4.2.3	Développements	52
4.3	Justification théorique : théorème KAM	55
4.3.1	Systèmes intégrables et tores multidimensionnels	55
4.3.2	Systèmes quasi-intégrables et condition diophantienne	56
4.3.3	Théorème KAM	57
4.4	Applications : Résonance de Kozai et théories planétaires	58
4.4.1	Problèmes à N corps de type planétaire	58
4.4.2	Résonance de Kozai dans le problème restreint des 3 corps	60
4.4.3	Théories planétaires	67
4.5	Les résonances	72
4.5.1	Généralités	72
4.5.2	Résonances de moyen mouvement	73
4.5.3	Théorie simplifiée des résonances de moyen mouvement	74
4.5.4	Situations plus complexes	81
5	Le chaos	83
5.1	Chaos et instabilité dans le Système Solaire	83
5.2	Quantification du chaos : Exposants de Lyapunov	86
5.2.1	Définition et exemples	86
5.2.2	Calcul des exposants de Lyapunov : MLE et MEGNO	89
5.3	Visualisation du chaos : Sections de Poincaré	91
5.4	Détecter le chaos : L'analyse en fréquences	94
6	Dynamique des astres non ponctuels	97
6.1	Les forces de marée	97
6.1.1	Effet de marée Terre-Lune	97
6.1.2	Limite de Roche	98
6.1.3	Forces de marée : Effets plus fins	100
6.2	Dynamique des axes de rotation	101
6.2.1	Obliquité et longitude de l'axe de rotation	101
6.2.2	Précession et nutation	102
6.2.3	Polhodie	106

II	Galaxies	109
7	Zoologie des Galaxies	111
7.1	Introduction	111
7.2	Aspect historique	111
7.3	Classification des galaxies	113
7.3.1	Classification initiale de Hubble (1926)	113
7.3.2	Classification de Hubble révisée (G. de Vaucouleurs)	113
7.3.3	Description des types de galaxies	115
7.4	Photométrie des galaxies	117
7.4.1	Définitions générales	117
7.4.2	Galaxies elliptiques et bulbes de galaxies spirales	118
7.4.3	Composante plate des disques (Spirales et Lenticulaires)	119
7.5	Répartition des galaxies dans l'Univers	120
7.6	Le contenu des galaxies	122
7.6.1	Contenu stellaire	122
7.6.2	Contenu en gaz interstellaire	122
7.6.3	Les poussières	123
7.6.4	Trous noirs supermassifs	124
7.7	Cycle de fonctionnement d'une galaxie	125
7.8	Principaux résultats pour les divers types de galaxies	126
7.8.1	Les galaxies elliptiques	126
7.8.2	Les galaxies lenticulaires	126
7.8.3	Les galaxies spirales	126
7.8.4	Les galaxies irrégulières	128
8	Dynamique stellaire	129
8.1	Introduction	129
8.1.1	Le théorème du Viriel scalaire	130
8.1.2	Vitesse moyenne des étoiles	132
8.1.3	Échelle de temps dynamique	132
8.2	Hydrodynamique stellaire	133
8.2.1	Fonction de distribution	133
8.2.2	Equation de Boltzmann	133
8.2.3	Equations de Jeans	135
8.2.4	Intégrales premières	137
8.2.5	Théorème de Jeans	138
8.2.6	Mélange dynamique	138
8.2.7	Les systèmes à symétrie sphérique	139
8.3	L'instabilité de Jeans	142
8.3.1	L'instabilité de Jeans dans un fluide	142
8.3.2	L'instabilité de Jeans dans un système stellaire	145
8.4	Relaxation	147
8.4.1	Introduction	147
8.4.2	Calcul approché du temps de relaxation	148
8.4.3	Relaxation violente	151
8.4.4	Évasion des étoiles. Temps de vie	152

9	Dynamique galactique	155
9.1	Systèmes axisymétriques. Troisième intégrale	155
9.2	La rotation différentielle de la Galaxie	157
9.2.1	Aspect historique	157
9.2.2	Cinématique du voisinage Solaire	158
9.2.3	Cinématique à grande échelle d'ordre 0. Courbe de rotation	159
9.3	Approximation d'ordre 1 : mouvement épicyclique	161
9.4	Modèles de potentiels galactiques et détermination des masses	166
9.4.1	Modèles en coordonnées cylindriques	166
9.4.2	Potentiels de Stäckel et modèles en coordonnées sphéroïales	167
9.4.3	Extension aux galaxies elliptiques triaxiales	171
9.5	Structure spirale des galaxies	172
9.5.1	Généralités	172
9.5.2	Perturbations spirales	174
9.5.3	Orbites des étoiles dans un champ spiral. Résonances de Lindblad	176
9.5.4	Un modèle linéaire de structure spirale	179
9.5.5	Effets non linéaires. Amplification swing	188
9.5.6	Les Barres	189
A	Potentiel gravitationnel	193
A.1	Equation de Poisson	193
A.2	Le théorème de Gauss et les théorèmes de Newton	194
B	Résolution du problème Képlérien	195
B.1	Cas général	195
B.2	Le mouvement sur la trajectoire	197
B.3	Le mouvement hyperbolique. Calcul de la déviation	200
C	Une théorie planétaire d'ordre supérieur	203
D	Compléments mathématiques et formulaires	207
D.1	Systèmes de coordonnées dans l'espace	207
D.2	Grandeurs cinématiques	209
D.3	Opérateurs différentiels	209
D.4	Equations de Boltzmann et de Jeans	212
D.5	Formules d'analyse vectorielle	214
D.6	L'équation intégrale d'Abel	214
D.7	La fonction d'erreur	215
D.8	Les fonctions de Bessel	216
E	Intégrales premières dans un potentiel de Stäckel	217
F	Constantes physiques et astrophysiques	219
	Bibliographie	221

Première partie

Gravitation et mécanique céleste

Chapitre 1

La gravitation

1.1 Introduction : Systèmes planétaires et systèmes stellaires multiples

On décrit habituellement un système planétaire comme un ensemble de planètes en orbite autour d'une étoile. Comme toute image, cette vision est à la fois juste et réductrice. De fait, elle reste calquée sur notre vision du Système Solaire. L'étude du Système Solaire (et plus particulièrement celle du mouvement des astres) a historiquement représenté inclus la totalité de l'astronomie jusqu'au XIX^e siècle. Aujourd'hui, l'astrophysique s'est diversifiée, mais l'étude du Système Solaire est loin d'être achevée. Bien au contraire, l'exploration in-situ au moyen d'engins automatiques a renouvelé son intérêt. On peut dire qu'on en a appris plus sur les objets du Système Solaire en 50 ans d'exploration spatiale qu'en 2500 ans d'astronomie au sol, au point que son étude confine aujourd'hui avec la géophysique comparée.

Quoi qu'il en soit, même si le Système Solaire ne représente qu'une infime partie de l'Univers observable, il referme en son sein une formidable diversité d'objets et de phénomènes physiques dont l'étude profite à l'astrophysique toute entière.

Grossièrement, le Système Solaire est constitué d'une étoile (le Soleil) et de 9 planètes principales, de tailles et de masses variables. Mais la description ne s'arrête pas là. Les planètes sont accompagnées de leurs satellites, et en dehors de cela on trouve une incroyable quantité de débris rocheux de toutes sortes, comètes, astéroïdes, cailloux et poussières diverses errant autour du Soleil. On est même loin d'avoir répertorié l'ensemble de ces corps!

Pour ce qui est des dimensions, la zone des planètes s'étend jusqu'à environ 50 AU¹ du Soleil. Au-delà, et jusqu'à quelque 10⁴–10⁵ AU, on trouve des milliards de petits objets, en fait des comètes, rassemblés en un grand halo sphérique appelé *nuage de Oort*.

Il faut cependant garder à l'esprit que le Système Solaire contient en fait surtout... du vide! Les distances relatives des planètes sont très grandes comparées à leurs dimensions, et la densité de débris est largement loin d'embouteiller l'Espace, même là où elle est la plus grande. Au début des années 1970, des inquiétudes se posaient au sujet des premières sondes qui devaient traverser la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter. Allaient-elles pouvoir passer sans rencontrer un rocher? Les sondes n'ont rien rencontré, et bien d'autres depuis sont passées dans la même région sans encombre.

Il est intéressant de remarquer que la quasi-totalité de la masse (99%) du Système Solaire est concentrée dans le Soleil. La masse de Jupiter est inférieure au millième de celle du Soleil, et la masse de Jupiter est elle-même supérieure à l'ensemble de la masse restante (planètes,

1. Unité Astronomique = Distance moyenne Terre–Soleil. Voir la valeur dans l'annexe.

satellites et débris) dans le Système Solaire, à tel point qu'on a pu dire que le Système Solaire était constitué du Soleil, de Jupiter et de quelques débris.

Par contre, d'un point de vue dynamique la situation est rigoureusement inverse en ce qui concerne le moment cinétique. Le Soleil ne possède quasiment pas de moment cinétique propre (il tourne lentement sur lui-même en 27 jours). En revanche, les planètes concentrent en elles-mêmes presque tout le moment cinétique du Système Solaire, que ce soit en moment cinétique orbital ($r^2\Omega$, r = distance au Soleil, Ω = vitesse angulaire de révolution autour du Soleil), ou en moment cinétique de rotation ($I\omega$, I = moment d'inertie, ω = vitesse angulaire de rotation). A y regarder de plus près, c'est même Jupiter qui en détient la majeure partie, de par sa masse et sa rotation rapide (10 h).

Comme nous allons le voir, les planètes ont des orbites quasi Képlériennes autour du Soleil toutes plus ou moins coplanaires. De ce point de vue, on peut décrire le Système Solaire comme un disque en rotation différentielle autour du Soleil. Cette description le rapproche de celle d'une galaxie spirale. Nous verrons plus loin que la comparaison entre les deux s'arrête là, même si dans les deux cas, la gravitation reste le moteur principal d'évolution du système.

La principale révolution dans l'étude des systèmes planétaires a été l'identification à partir de 1995 de systèmes planétaires extrasolaires, c'est-à-dire en orbite autour d'étoiles autres que le Soleil. Avant cette date, seul le Système Solaire était connu, de telle sorte qu'il était impossible de faire la part entre ce qui est généralité et ce qui est particularité. Cependant, la plupart des astronomes s'accordaient à dire que de les systèmes de planètes sont des sous-produits de la formation des étoiles, et que leur présence autour d'autres étoiles devait être commune. La difficulté observationnelle était seule responsable de l'absence de détection.

Aujourd'hui, plus de 5500 exoplanètes sont connues², et leur nombre s'accroît régulièrement. Il est donc maintenant possible de faire des comparaisons et dresser des statistiques. Les systèmes planétaires présentent des caractéristiques communes, mais également des différences entre eux. Parmi les découvertes auxquelles les scientifiques ne s'attendaient pas, on peut citer

- les jupiters et neptunes « chauds », autrement dits, des planètes gazeuses en orbite proche (quelques jours) autour de leur étoile. Les scénarios classiques de formation des systèmes planétaires ne les prévoyaient pas. Leur étude a mis en avant la notion de migration planétaire dans les premiers âges de l'évolution des systèmes. La première exoplanète découverte (51 Pegasi) est de ce type ;
- la gamme étendue d'excentricités orbitales. Alors que dans le Système Solaire, toutes les planètes principales ont des excentricités orbitales modérées, dans certains systèmes on trouve des planètes en nombre moins important, mais avec des excentricités pouvant atteindre toutes sortes de valeurs.

De manière générale, la diversité d'architecture dans les systèmes planétaires est apparue bien plus grande qu'on ne soupçonnait auparavant. On s'accorde à dire que ces caractéristiques différentes sont le témoin d'évolution dynamiques différentes à partir d'une origine similaire. Le Système Solaire apparaît aujourd'hui comme *un* état final possible d'évolution, mais certainement pas le seul.

Tous les systèmes planétaires ne ressemblent pas à l'image classique d'un ensemble de planètes autour d'une étoile simple comme le Soleil. Les deux tiers des étoiles dans notre galaxie font partie de systèmes binaires constitués de deux étoiles en orbite Képlérienne l'une autour de l'autre, voire de systèmes multiples comportant plusieurs étoiles. Les tailles de ces systèmes stellaires peuvent être très variables. On trouve des binaires en orbite l'une autour de l'autre avec des périodes orbitales de quelques jours seulement. D'autres sont séparés par plusieurs milliers d'AU, et leurs périodes orbitales se comptent en dizaines de milliers d'années.

2. <http://exoplanet.eu>

Dynamiquement parlant, les systèmes stellaires multiples sont très différents des systèmes planétaires. Un système planétaire est stable grâce à la domination de la masse de l'étoile centrale, qui fait que les planètes suivent essentiellement des orbites Képlériennes autour de l'étoile, perturbées par les autres planètes. Il n'y a a priori aucune masse dominante dans un système stellaire. Ces systèmes sont stables car il sont bâtis de manière hiérarchique sous la forme d'une série d'orbites Képlériennes ou quasi-Képlériennes de tailles très différentes et emboîtées les unes dans les autres. On peut par exemple penser à un système triple formé d'une binaire centrale et d'une troisième étoile en orbite autour des deux autres à une distance beaucoup plus grande ; ou alors à deux binaires en orbite l'une autour de l'autre sur une orbite nettement plus grande. Toutes ces situations existent. Une conséquence de tout cela est qu'un système stellaire multiple, au contraire d'un système planétaire, n'a aucune raison d'être plan. En effet ces systèmes ne naissent pas d'un disque en rotation au contraire des systèmes planétaires. De même, les excentricités peuvent être très diverses.

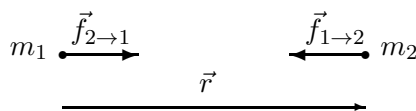
Signalons enfin que les systèmes planétaires se rencontrent aussi dans les systèmes multiples. On connaît des exemples de planètes dans des systèmes binaires. Dans ce cas, les planètes peuvent être soit en orbite autour de l'une des deux étoiles, on parle de planète de type S, ou alors carrément autour de l'ensemble formé par les deux étoiles, à la manière d'un système triple. On parle alors de planète de type P ou circumbinaire. Toutes ces configurations ont été identifiées ces dernières années dans plusieurs systèmes.

1.2 L'interaction de gravitation

La gravitation est la force fondamentale qui régit la dynamique des objets dans les systèmes de planètes et plus généralement à grande échelle dans l'Univers. Dans le Système Solaire, seules les comètes lorsqu'elles s'approchent du Soleil sont soumises à des effets non-gravitationnels dûs au dégazage dont elles sont l'objet.

C'est l'objet de la *mécanique céleste* d'étudier le mouvement de plusieurs corps sous l'action seule de leurs gravitations mutuelles. On a tendance à réserver le terme « mécanique céleste » au cas où le nombre de corps n'est pas trop grand (quelques dizaines), et à dénommer *dynamique stellaire* le cas inverse, tant les méthodes sont différentes. La dynamique du Système Solaire s'inscrit bien sûr dans le cadre de la mécanique céleste.

1.2.1 La gravitation universelle



La loi de gravitation universelle de Newton (1687) s'énonce ainsi : Deux corps ponctuels de masse m_1 et m_2 s'attirent en raison inverse du carré de leur distance. Si \vec{r} désigne le rayon vecteur joignant le point 1 au point 2, et r la distance qui les sépare, la force exercée par l'objet 2 sur l'objet 1 vaut

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \quad . \quad (1.1)$$

La force $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ est bien sûr opposée. G est la *constante de la gravitation* et vaut

$$G = 6.6732 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \quad . \quad (1.2)$$

Au delà de cette définition, un certain nombre de remarques supplémentaires s'imposent :

La force de gravitation est la *plus faible* des interactions fondamentales. Ainsi il peut paraître paradoxal de constater que cette force constitue le moteur principal d'évolution dynamique à grande échelle dans l'Univers. Il y a plusieurs raisons à cela. Premièrement, la force de gravitation est toujours attractive au contraire des forces électromagnétiques. Par exemple l'interaction électrostatique dans un plasma est écrantée par l'électroneutralité de la matière au-delà d'une distance appelée longueur de Debye. Ceci n'empêche cependant pas les courants électriques de circuler et le champ magnétique de jouer un rôle important à grande échelle. Mais il n'y a pas d'effet cumulatif sur le long terme au contraire de la gravitation. La gravitation a le temps pour elle. Deuxièmement, la gravitation a une longue portée ($\propto r^{-2}$) qui certes décroît en intensité avec la distance, mais beaucoup moins vite par exemple que les forces nucléaires qui décroissent de manière exponentielle, ce qui a pour effet de les réduire à zéro au-delà d'une distance très courte. Rien de tout cela ne s'applique à la gravitation.

Il est aujourd'hui bien connu que la théorie de Newton exposée ci-dessus est inexacte. La théorie plus moderne est celle de la Relativité Générale (Einstein 1916) qui décrit la gravitation comme une déformation de la métrique de l'Espace-Temps créée par les masses et plus généralement par toute forme d'énergie, les mouvements des corps dans cette Espace-Temps courbe se faisant en suivant ses géodésiques. On pourrait dès lors se demander pourquoi on continue à utiliser la théorie de Newton pour les applications usuelles. La première raison est que la théorie de Newton est une très bonne approximation de la théorie de la Relativité Générale dans toutes ces situations. Avec sa formulation hamiltonienne (voir plus loin), elle est particulièrement bien adaptée au traitement des effets à long terme des perturbations par rapport aux solutions simples comme par exemple le mouvement Képlérien. Traiter cela avec la Relativité Générale se traduirait par une complexité significativement accrue, et pas forcément nécessaire. Dans la pratique, la Relativité Générale n'est nécessaire dans sa globalité qu'en présence de champs gravitationnels très intenses comme par exemple au voisinage d'objets compacts (trous noirs, étoiles à neutrons...), ou alors lorsqu'on traite des problèmes sur des distances très grandes comparables à la taille de l'Univers, là où les effets de courbure de l'espace-temps ne peuvent être négligés. En fait, en dehors de ces situations, et lorsque c'est nécessaire, on réintroduit la Relativité Générale sous la forme d'une perturbation par rapport à la théorie de Newton. Cette théorie est appelée *post-newtonienne*. On peut la décrire à des ordres d'approximation divers. C'est elle qu'on utilise pour déterminer l'avance bien connue du périhélie de Mercure qui ne peut s'expliquer autrement que comme ça. Signalons enfin que la Relativité Générale a fait l'objet depuis 100 ans de plusieurs vérifications et confirmations, la dernière en date étant la détection d'ondes gravitationnelles (Weiss, Barish, Thorne : Prix Nobel 2017). Toutefois, une description correcte de la gravitation sous forme quantique reste encore à construire.

La gravitation de Newton sous entend le *principe d'équivalence*, c'est-à-dire l'égalité entre masse inerte et masse grave. Concrètement, cela signifie qu'en dehors de la distance qui sépare deux objets, l'interaction de gravitation est proportionnelle à leur masse et rien d'autre, ce que traduit bien la formule (1.1). Par masse, on entend la masse inerte qui intervient dans le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m \vec{a}$. Il s'agit là d'un postulat de la théorie de Newton qui n'avait rien d'évident et qui ne s'applique pas pour toutes les forces. Par exemple, la force électrostatique dépend de la charge des objets qui n'est a priori pas reliée à leur masse. La validité de ce principe a pu être vérifiée expérimentalement jusqu'à des valeurs relatives meilleures que 10^{-17} . La Relativité Générale, de par sa formulation géométrique, implique naturellement le principe d'équivalence. Quoi qu'il en soit, ce simple principe a des conséquences importantes. Par exemple, c'est grâce à lui que si on fait abstraction des effets de frottement

avec l'air, les objets tombent sur Terre (ou mieux, sur la Lune) à des vitesses qui ne dépendent pas de leur masse³. C'est lui aussi qui est responsable de l'impesanteur ressentie dans les cabines spatiales (le vaisseau et l'occupant « tombent » à la même vitesse).

1.2.2 Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

La force (1.1) n'existe en toute rigueur que lorsque les deux masses sont présentes. Il est cependant commode de considérer que chaque masse crée en tout point de l'espace un *champ de gravitation* \vec{g} tel que toute autre masse m en présence subira une force

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad . \quad (1.3)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les masses m_1 et m_2 créent chacune un champ de gravitation valant

$$\vec{g}_1 = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{g}_2 = +\frac{Gm_2}{r^3} \vec{r} \quad . \quad (1.4)$$

Dans le cas général, toute masse ponctuelle M sera supposée créer dans l'espace un champ \vec{g} valant

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}} \quad , \quad (1.5)$$

où \vec{r} désigne cette fois le rayon vecteur joignant la masse M au point considéré, et \vec{u} un vecteur unitaire de même direction. Le champ \vec{g} créé par la masse M n'est pas le même en tout point de l'espace. Il varie en direction et en norme; bien entendu, il est plus intense lorsque qu'on est plus proche de la masse M . Cependant, quel que soit le point considéré, le champ pointe toujours vers la masse qui en est à l'origine, comme illustré sur la figure 1.1.

Un champ gravitationnel est dimensionnellement homogène à une accélération, de dimension L T^{-2} .

1.2.3 Energie potentielle et potentiel gravitationnel

La force de gravitation dérive d'une énergie potentielle : Considérons une masse m placée dans le champ de gravitation d'une masse M . Elle subit une force

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u} \quad , \quad (1.6)$$

où \vec{r} et \vec{u} répondent à la même définition que précédemment. S'il existe une énergie potentielle E_p dont \vec{F} dérive, elle doit vérifier

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \quad . \quad (1.7)$$

Pour cela, plaçons nous en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en prenant pour origine le point où est placée la masse M .

3. On écrit l'équation du mouvement $m\vec{g} = m\vec{a}$ dans le champ de pesanteur. Ensuite on simplifie par m pour montrer que l'accélération $\vec{a} = \vec{g}$ est la même pour tous les corps. Lorsqu'on simplifie, on applie le principe d'équivalence en disant que la masse de gauche (la masse grave) est égale à celle de droite (la masse inerte).

Dans ces conditions, en utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques (voir annexe), nous en déduisons que nous devons nécessairement avoir par projection sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$:⁴

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p(r, \theta, \phi)}{\partial r} = \frac{GMm}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_p(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0 \end{cases} . \quad (1.8)$$

Les deux dernières équations montrent que nécessairement E_p ne dépend que de la distance au centre r . La première équation s'intègre alors immédiatement. Il vient

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r} + \text{constante} . \quad (1.9)$$

Il est d'usage de considérer (mais c'est une pure convention) que l'énergie potentielle de gravitation est nulle à l'infini, c'est-à-dire pour $r \rightarrow +\infty$. Ceci fixe la constante d'intégration comme nulle. En définitive, la force \vec{F} dérive bien de l'énergie potentielle

$$E_p = -\frac{GMm}{r} . \quad (1.10)$$

De manière plus générale, la force de gravitation entre deux objets ponctuels de masses m_1 et m_2 dérivera de l'énergie potentielle

$$\boxed{E_{p,\text{grav}} = -\frac{Gm_1m_2}{r}} . \quad (1.11)$$

Précisons que par symétrie cette énergie potentielle est aussi valable pour la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ que pour la force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Simplement, dans chaque cas, c'est l'origine du repère qui change.

De même que nous avons introduit le champ gravitationnel \vec{g} créé par une masse ponctuelle M , nous pouvons introduire son potentiel gravitationnel, qui sera juste égal à $U = E_p/m$. Nous aurons aussi $\vec{g} = -\vec{\nabla}U$. Au bout du compte, la masse M créera dans l'espace un potentiel gravitationnel valant

$$\boxed{U(r) = -\frac{GM}{r}} , \quad (1.12)$$

où r est la distance à la masse. Ce potentiel est aussi appelé *Potentiel Képlérien*.

1.3 Equation de Poisson et théorème de Gauss

1.3.1 Equation de Poisson

Lorsque plusieurs masses sont en présence, leurs potentiels s'additionnent. Ainsi, le potentiel créé en un point de l'espace de rayon vecteur \vec{r} par un ensemble de masses ponctuelles (m_i) situées aux points de rayons vecteurs (\vec{r}_i) s'écrira

$$U(\vec{r}) = -\sum_i \frac{Gm_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} . \quad (1.13)$$

4. $\vec{u} = \vec{e}_r$

Si maintenant la distribution de masse est continue dans l'espace, caractérisée par une masse volumique $\rho(\vec{r}')$, la somme discrète doit être remplacée par une intégrale :

$$U(\vec{r}) = -G \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad . \quad (1.14)$$

En inversant cette équation (voir Annexes), on obtient *l'équation de Poisson*, qui n'est autre que la forme locale de la loi de la gravitation universelle :

$$\boxed{\Delta U = -\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 4\pi G \rho} \quad , \quad (1.15)$$

1.3.2 Théorème de Gauss

Le *théorème de Gauss* dit que le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée S enfermant un volume V est égale à $-4\pi G$ fois la masse M contenue à l'intérieur de V . Ce résultat important se démontre à l'aide de la formule d'Ostrogradsky, dite encore théorème flux-divergence :

$$\iint_S \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(r) = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = -4\pi G M \quad . \quad (1.16)$$

Ce résultat est très important, car il fait intervenir uniquement la masse contenue dans le volume V et non sa répartition. Bien entendu, la géométrie de la masse est cachée dans l'expression du flux, et c'est la raison pour laquelle le théorème de Gauss est difficilement applicable dans le cas général. Cependant, si on a par ailleurs des informations sur la géométrie du système, il permet de dégager des résultats non triviaux. C'est par exemple le cas avec un corps à symétrie sphérique.

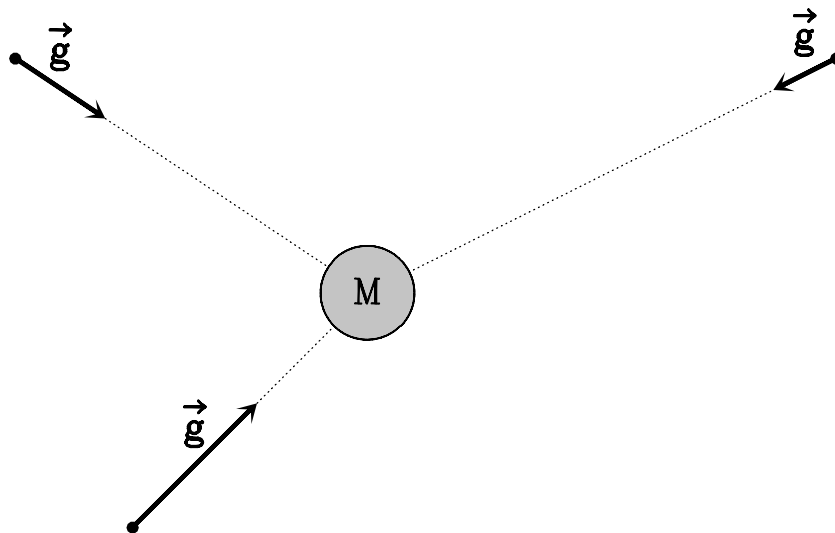


FIGURE 1.1: Illustration du champ gravitationnel \vec{g} créé en tout point de l'espace par une masse M à symétrie sphérique. Le champ varie en direction et en norme d'un point à l'autre, mais il est toujours dirigé vers la masse M , et sa norme ne dépendra que de la distance au centre de l'objet.

Considérons un astre à symétrie sphérique. Il n'a pas besoin d'être homogène en densité, la seule chose qu'on demande est que la répartition des masses ait la symétrie sphérique, de telle sorte qu'on puisse parler de $\rho(r)$, la masse volumique à la distance r du centre. Par symétrie, le champ gravitationnel \vec{g} aura lui aussi la symétrie sphérique. Plus précisément en chaque point de l'espace il sera dirigé vers le centre (il sera donc radial), et sa norme ne dépendra que de r (Fig. 1.3.2). Considérons comme surface S une sphère centrée sur l'origine de rayon $r > R$, où

R est le rayon de l'astre. Compte tenu de la symétrie du champ, il est aisé de calculer flux du champ gravitationnel à travers la surface S . Il vient

$$\Phi = \iint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_S g(r) dS = 4\pi r^2 g(r) \quad . \quad (1.17)$$

Mais en appliquant le théorème de Gauss, on a nécessairement aussi

$$\Phi = -4\pi GM \quad \implies \quad g(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad . \quad (1.18)$$

On retrouve ici l'expression du champ gravitationnel créé par un corps ponctuel. Autrement dit, un corps étendu mais à symétrie sphérique créera dans l'espace rigoureusement le même champ gravitationnel (et donc le même potentiel) qu'un corps parfaitement ponctuel de même masse placé au centre. Ce résultat, que nous appliquons implicitement en disant que le champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre vaut GM/R^2 , où R est le rayon de la Terre et M sa masse, n'a absolument rien d'intuitif. Il résulte des propriétés mathématiques de champ de gravitation⁵. Si on considère maintenant une distance $r < R$, le même théorème de Gauss montre que le champ doit être calculé en prenant uniquement la masse $m(r)$ contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r . Dit autrement, la masse extérieure *ne compte pas*. A l'époque de Newton, ce point faisait débat, Newton l'ayant démontré ultérieurement par un raisonnement purement géométrique et sans utiliser le théorème de Gauss.

1.3.3 Potentiel de gravitation créé par une masse étendue

Enfin, considérons un corps quelconque, pas forcément de géométrie sphérique. Ce corps massif crée un potentiel U dans l'espace. Plaçons nous à *l'extérieur* de l'astre. A cet endroit, le champ est non nul, mais la masse volumique est nulle. On aura donc par application de l'équation de Poisson

$$\boxed{\Delta U = 4\pi G\rho = 0} \quad . \quad (1.19)$$

Le potentiel vérifie l'équation dite de Laplace. On dit qu'il est harmonique, et ceci reste vrai pour n'importe quel potentiel gravitationnel pourvu qu'on soit dans le vide.

Considérons maintenant un astre pas nécessairement sphérique. A l'extérieur de ce dernier, le champ gravitationnel sera compliqué, non radial, mais en tout état de cause, il sera harmonique. Il est alors légitime d'envisager le développement du potentiel sur une base de fonctions harmoniques. En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , ces fonctions sont connues et portent le nom d'*harmoniques sphériques*. La fonction $(r, \theta, \phi) \rightarrow 1/r$ est à une constante près la seule fonction radiale qui soit harmonique⁶, ensuite les fonctions harmoniques à symétrie axiale sont les

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \quad (1.20)$$

pour tout entier $n > 0$. Les harmonique sphériques non axisymétriques sont les

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow \frac{P_n^{(p)}(\cos \theta) \times e^{ip\phi}}{r^{n+1}} \quad (1.21)$$

5. Pour les mêmes raisons, le théorème de Gauss s'applique aussi au champ électrostatique.

6. et c'est aussi la raison pour laquelle on retrouve le résultat (1.18) pour les corps à symétrie sphérique.

pour tout entier $p \in [-n, n]$. Dans ces expressions, les P_n et $P_n^{(p)}$ sont les *polynômes et fonctions de Legendre*, qui vérifient les propriétés suivantes :

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad (1.22)$$

$$P_1(x) = x \quad ; \quad (1.23)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (n \geq 2) \quad ; \quad (1.24)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad ; \quad (1.25)$$

$$P_n^{(p)}(x) = \frac{(1-x^2)^{p/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+p}}{dx^{n+p}} (x^2 - 1)^n = (-1)^p (1-x^2)^{p/2} \frac{d^p P_n(x)}{dx^p} \quad . \quad (1.26)$$

Les premières valeurs des fonctions de Legendre sont listées dans la table 1.1. A partir de là,

TABLE 1.1: Valeurs des premiers $P_n(\cos \theta)$ et $P_n^{(p)}(\cos \theta)$, avec les conventions $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. Pour les valeurs négatives de p , on utilisera $P_l^{(-p)} = (-1)^p (n-p)! P_n^{(p)} / (l+p)!$.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4
0	1				
1	c	s			
2	$\frac{3}{2}c^2 - \frac{1}{2}$	$3cs$	$3s^2$		
3	$\frac{5}{3}c^3 - \frac{3}{2}c$	$\left(\frac{15}{2}c^2 - \frac{3}{2}\right)s$	$15cs^2$	$15s^3$	
4	$\frac{35}{8}c^4 - \frac{15}{4}c^2 + \frac{3}{8}$	$\left(\frac{35}{2}c^3 - \frac{15}{2}c\right)s$	$\left(\frac{105}{2}c^2 - \frac{15}{2}\right)s^2$	$105cs^3$	$105s^4$

on peut écrire en toute généralité le développement du potentiel à l'extérieur de tout corps de forme quelconque sous la forme

$$U(r, \theta, \phi) = -\frac{Gm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \left[-J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{p=1}^n P_n^{(p)}(\cos \theta) (c_{n,p} \cos(p\phi) + s_{n,p} \sin(p\phi)) \right] \right\}, \quad (1.27)$$

où M est la masse totale du corps, et où les J_n , $c_{n,p}$, $s_{n,p}$ sont des coefficients numériques (sans dimension) traduisant la distribution des masses de l'objet. Pour une distribution quasi sphérique, ils restent faibles et surtout décroissent très rapidement lorsque n croît.

Dans le cas d'un objet comme une planète, le premier terme J_2 est en général le plus important et traduit l'aplatissement polaire de la planète sous l'effet de la force centrifuge. Dans le cas de la Terre, on a pour les premiers termes

$$\begin{aligned} J_2 &= 1,082625 \times 10^{-3} \quad ; \\ J_3 &= -2,534 \times 10^{-6} \quad c_{2,2} = 1,571 \times 10^{-6} \quad s_{2,2} = -0,903 \times 10^{-6} \\ J_4 &= -1,623 \times 10^{-6} \quad c_{3,1} = 2,190 \times 10^{-6} \quad s_{3,1} = 0,272 \times 10^{-6} \quad . \end{aligned}$$

La détermination de ces coefficients pour un astre donné est une tâche difficile. Dans le cas de la Terre, on peut se baser sur les propriétés du champ de pesanteur ressenti à la surface. Ce champ de pesanteur tient compte du potentiel gravitationnel de la Terre, mais aussi de la force d'inertie (centrifuge) liée à la rotation de la Terre. Concrètement, en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , nous écrirons le champ ressenti \vec{g}_p sous la forme

$$\vec{g}(r, \theta, \phi) = -\vec{\nabla}U(r, \theta, \phi) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \quad , \quad (1.28)$$

ou U est le potentiel gravitationnel, \vec{r} le vecteur position et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la planète, supposé parallèle à l'axe OZ (qui pointe donc vers le nord géographique). Ce champ de pesanteur dérive d'un potentiel qui s'écrit

$$U_p(r, \theta, \phi) = U(r, \theta, \phi) - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (1.29)$$

Supposons maintenant que la surface de la Terre est une équipotentielle de U_p avec $r = R_e$ à l'équateur ($\theta = \pi/2$) et $r = R_p$ au pôle ($\theta = 0$), ces deux quantités étant mesurables. Ecrivons le développement du potentiel en nous arrêtant au terme J_2 . Il vient

$$U_p(r, \theta, \phi) = -\frac{GM_\oplus}{r} \left[1 - \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 J_2 P_2(\cos \theta) \right] - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (1.30)$$

Ensuite, on écrit que la surface de la Terre est une équipotentielle, soit

$$U_p\left(R_e, \frac{\pi}{2}, \phi\right) = U_p(R_p, 0, \phi) \quad \Longrightarrow \quad 3J_2 = 2\frac{R_e - R_p}{R_e} - \frac{\Omega^2 R_e^3}{GM} \quad . \quad (1.31)$$

Ceci constitue la relation classique entre l'aplatissement polaire et la rotation d'une planète. En théorie, une analyse plus fine à d'autres latitudes permet de déterminer les autres coefficients. Mais ceux-ci étant beaucoup plus petits, la mesure est plus ardue et les incertitudes sont grandes. Aujourd'hui, tous ces coefficients sont déterminés plus précisément par l'analyse fine des mouvements des satellites artificiels.

Chapitre 2

Mécanique Lagrangienne et Hamiltonienne

La mécanique Hamiltonienne est une reformulation de la mécanique classique particulièrement bien adaptée aux systèmes de forces conservatives. La dynamique gravitationnelle rentre dans ce cadre et nous verrons plus loin les avantages que nous pouvons tirer à utiliser cette formulation. Nous rappelons ici les principes de la mécanique Hamiltonienne, en commençant par la mécanique Lagrangienne.

2.1 Mécanique Lagrangienne

2.1.1 Principe des travaux virtuels

Considérons un système dynamique décrit par un ensemble de n coordonnées variables $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$. Ces coordonnées peuvent être des distances, des angles, ou toute autre grandeur géométrique. Le corps en mouvement sera repéré par son vecteur position \vec{r} et sa vitesse \vec{v} , le tout implicitement fonction des $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$. On peut donc écrire

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (2.1)$$

On écrit ensuite

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad . \quad (2.2)$$

On dérive ensuite cette expression par rapport au temps :

$$\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial q_i} \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad , \quad (2.3)$$

où T est l'énergie cinétique et \vec{a} l'accélération. Nous énonçons maintenant *le principe des travaux virtuels*¹. Pour cela considérons un déplacement élémentaire $\delta \vec{r}$, alors même que le mobile est soumis à un ensemble de forces (\vec{F}_j) . Calculons le travail de ces forces dans le cadre du déplacement. En vertu du principe fondamental de la dynamique, il vient

$$m\vec{a} \cdot \delta \vec{r} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r} \quad ; \quad (2.4)$$

1. qu'on devrait plutôt appeler théorème, mais l'usage est ainsi fait...

or

$$\delta\vec{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad , \quad (2.5)$$

où δq_i est le changement infinitésimal de la coordonnée q_i dans le déplacement $\delta\vec{r}$. En remplaçant, nous pouvons donc écrire

$$\sum_{i=1}^n m\vec{a} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \equiv \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad , \quad (2.6)$$

où nous définissons ici les travaux virtuels ou généralisés Q_i associés au déplacement infinitésimal $\delta\vec{r}$. Utilisons alors la formule (2.3) démontrée plus haut. Il vient

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad \longrightarrow \quad \boxed{Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}} \quad , \quad (2.7)$$

ceci constituant le résultat cherché. En effet, les équations résultant du principe fondamental de la dynamique sont complètement équivalentes aux n équations scalaires

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad . \quad (2.8)$$

2.1.2 Lagrangien et équations de Lagrange

Ces équations ne sont pas forcément plus simples que les équations vectorielles initiales, car pour les écrire, il faut pouvoir calculer les $(Q_i)_{1 \leq i \leq n}$ associés à l'ensemble des forces \vec{F}_j . La chose est cependant nettement plus aisée lorsque ces forces dérivent d'une énergie potentielle V . Dans ce cas, nous avons nécessairement

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \delta\vec{r} = -dV = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \quad . \quad (2.9)$$

Dans la mesure où cette quantité vaut aussi $\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$, il vient immédiatement par identification

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad . \quad (2.10)$$

Introduisons maintenant une nouvelle quantité $L = T - V$ appelée *Lagrangien*. En combinant les équations (2.8) et (2.10), nous voyons que l'ensemble des équations peut se réécrire sous la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n} \quad , \quad (2.11)$$

Ces équations dites de Lagrange se substituent au principe fondamental de la dynamique. L'intérêt vient du fait qu'elles sont scalaires et qu'elles ne nécessitent que de savoir formuler l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des seules coordonnées généralisées q_i 's.

Précisons que la portée des équations de Lagrange ne se limite pas au seul cas de forces conservatives dérivant d'une énergie potentielle. En effet, pour établir ces équations à partir des expressions (2.8) et (2.10) nous avons exploité le fait que l'énergie potentielle V ne dépend que des q_i 's et non des \dot{q}_i 's ($\partial V / \partial \dot{q}_i = 0$). Mais imaginons qu'au lieu de cela, les forces en présence

dérivent non pas d'une énergie potentielle classique mais d'une *énergie potentielle généralisée* $V(q_i, \dot{q}_i, t)$ sous la forme

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \quad (2.12)$$

Dans ce cas, il est aisé de voir que les équations de Lagrange restent valables avec la même définition $L = T - V$. Une telle énergie potentielle est aussi appelée *potentiel Lagrangien*. Un exemple classique de cela est la force électromagnétique de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$, où q est la charge, \vec{v} la vitesse, et \vec{E} et \vec{B} respectivement les champs électrique et magnétique. Dans n'importe quel jeu de coordonnées (q_i) (par exemple cartésiennes), on aura

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \text{avec} \quad V(q_i, \dot{q}_i, t) = q\Phi - q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad , \quad (2.13)$$

où Φ est le potentiel électrostatique scalaire et \vec{A} le potentiel vecteur. Toutefois, toutes les forces ne se laissent pas mettre sous cette forme. Ainsi, les forces de frottement ne dérivent d'aucune énergie potentielle, même généralisée.

2.1.3 Principe de moindre action

Les équations de Lagrange peuvent se déduire du *principe de moindre action*. Pour cela, considérons une fonction continue F de plusieurs variables $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$. F est a priori fonction du temps, des y_i 's et des \dot{y}_i 's. Considérons l'intégrale

$$I(F, \vec{y}) = \int_a^b F(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) dt \quad . \quad (2.14)$$

Cette intégrale sera extrême si on a pour tout i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad , \quad (2.15)$$

ce résultat étant connu sous le nom d'équation d'Euler en calcul variationnel. Par conséquent les équations de la dynamique Lagrangienne reviennent exactement à dire qu'entre deux instants t_1 et t_2 , le mouvement s'effectue de manière à rendre extrême (en fait minimale) l'*action* définie par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt \quad . \quad (2.16)$$

2.2 Mécanique Hamiltonienne

2.2.1 Moments conjugués et équations canoniques de Hamilton

Les équations de Lagrange constituent une première étape dans la transformation des équations vectorielles classiques. Pour l'instant nous avons introduit les coordonnées généralisées $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$. Nous allons maintenant transformer les vitesses. Pour cela, définissons pour chaque coordonnée q_i un *moment conjugué*

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \quad (2.17)$$

Une simple comparasion avec l'équation de Lagrange (2.11) nous montre aisément que

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad . \quad (2.18)$$

Les moments ont pour vocation de se substituer aux vitesses \dot{q}_i dans la reformulation des équations. Notons avant d'aller plus loin que si q_i est une longueur, p_i a la dimension d'une quantité de mouvement (ou impulsion), et que si q_i est un angle, p_i a la dimension d'un moment cinétique, ces deux cas représentant les situations de loin les plus fréquentes. Dans le dernier cas, on dit que p_i est l'action conjuguée de q_i , et on parle de variables conjuguées angle–action. Il s'agit là d'une terminologie très classique en dynamique gravitationnelle.

Introduisons maintenant le Hamiltonien H , défini comme une fonction des q_i 's, des p_i 's et du temps :

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad . \quad (2.19)$$

Mathématiquement, le Hamiltonien représente la transformée de Legendre du Lagrangien. Considérons momentanément H comme fonction du temps, des q_i 's, et des \dot{q}_i 's (au lieu des p_i 's), et calculons sa différentielle

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) \quad . \quad (2.20)$$

Ici, la différentielle dp_i est implicitement considérée comme fonction des q_i 's et des \dot{q}_i 's. Utilisons maintenant les propriétés du Lagrangien :

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i) = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) \quad . \quad (2.21)$$

Ce dernier résultat montre qu'en considérant maintenant H comme fonction des seuls q_i 's, p_i 's et du temps, nous avons les équations

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad . \quad (2.22)$$

Ces équations constituent les $2n$ *équations canoniques de Hamilton*. Pour un système dynamique décrit à l'aide des seuls q_i 's et p_i 's, elles se substituent aux équations du mouvement. On remarquera leur symétrie. Ce sont des équations différentielles du premier ordre et donc plus faciles à résoudre que les équations de Lagrange qui sont du second ordre. Néanmoins, les étapes qui conduisent à ces équations sont plus complexes : à partir des coordonnées généralisées et du Lagrangien, il faut calculer le Hamiltonien, exprimer les vitesses en fonction des moments conjugués et remplacer celles-ci dans la définition du Hamiltonien. On a aussi

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \quad (2.23)$$

Supposons maintenant le système conservatif, c'est-à-dire que l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas, il est clair que $\partial H/\partial t = 0$, et donc H est une constante du mouvement. Pour comprendre la signification de cette constante, calculons l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.24)$$

Vue comme fonction des $(\dot{q}_i)_{1 \leq i \leq n}$, l'énergie cinétique apparaît comme une forme quadratique, autrement dit une fonction homogène de degré 2. Ce résultat reste vrai même si le système étudié n'est pas constitué que d'un seul corps ponctuel en mouvement. Dans ce cas, les coefficients devant les facteurs $\dot{q}_i \dot{q}_j$ varient en fonction des masses en présence, mais le résultat fondamental reste inchangé. L'énergie cinétique vérifie alors le théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes. Le degré étant 2, nous pouvons écrire

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2 \times T \quad . \quad (2.25)$$

Ecrivons maintenant le Hamiltonien :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad . \quad (2.26)$$

Or la dépendance de L en fonction des \dot{q}_i 's est entièrement contenue dans l'énergie cinétique, car l'énergie potentielle V n'est fonction que des q_i 's. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - L = 2T - T + V = T + V \quad . \quad (2.27)$$

Par conséquent, le Hamiltonien est égale à l'énergie mécanique $E = T + V$ du système, qui est bien entendu une constante pour un système conservatif.

2.2.2 Exemples de systèmes Hamiltoniens simples

Prenons maintenant quelques exemples. Considérons pour commencer un système de coordonnées cartésiennes ($q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$), et un mobile de masse m se déplaçant dans l'espace dans un potentiel conservatif $U(q_1, q_2, q_3)$. L'énergie cinétique s'écrit

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \quad . \quad (2.28)$$

On en déduit les moments conjugués et le Hamiltonien

$$p_i = m\dot{q}_i \quad ; \quad H = T + V = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + mU(q_1, q_2, q_3) \quad . \quad (2.29)$$

On écrit ensuite les équations de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \quad ; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -m \frac{\partial U}{\partial q_i} = m\ddot{q}_i \quad . \quad (2.30)$$

On retrouve ici la définition des moments et les équations classiques du mouvement ($\ddot{q}_i = -\partial U / \partial q_i$).

En deuxième exemple, considérons un mobile en mouvement dans un plan en coordonnées polaires ($q_1 = r, q_2 = \theta$), dans un potentiel central $U(r)$. On écrit l'énergie cinétique, les moments conjugués et le Hamiltonien :

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad ; \quad p_r = m\dot{r} \quad ; \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + mU(r) \quad . \quad (2.31)$$

On écrit ensuite les équations de Hamilton

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad ; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - m\frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad ; \quad (2.32)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad ; \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (2.33)$$

On retrouve là encore la définition des moments conjugués. L'équation sur p_θ nous montre que p_θ est une constante du mouvement. On retrouve ici le moment cinétique, constant dans un mouvement à force centrale. L'équation en p_r fournit l'équation différentielle radiale que l'on retrouverait en appliquant le principe fondamental de la dynamique avec l'expression de l'accélération en coordonnées polaires.

2.2.3 Crochets de Poisson

Soit un système Hamiltonien à n degrés de libertés, décrit au moyen de coordonnées conjuguées $(q_i, p_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par commodité, nous noterons $Q = (q_1, \dots, q_n)$ et $P = (p_1, \dots, p_n)$. Considérons maintenant deux quantités quelconques $A(P, Q)$ et $B(P, Q)$. On définit le *Crochet de Poisson* $\{A, B\}$ par

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \quad . \quad (2.34)$$

Considérons maintenant une grandeur quelconque $A(P, Q, t)$. Nous pouvons écrire

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad . \quad (2.35)$$

En particulier, nous retrouvons

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \quad (2.36)$$

Si $A(Q, P)$ est une grandeur fonction de P et Q sans dépendre explicitement du temps, alors on a $\partial A / \partial t = 0$. On en déduit aisément que A est une intégrale première du mouvement si et seulement si

$$\{A, H\} = 0 \quad . \quad (2.37)$$

Ainsi, une façon de vérifier si une expression de ce type est un invariant est de calculer son crochet de Poisson avec le Hamiltonien. Les crochets de Poisson nous offrent donc un test général pour la recherche et l'identification des constantes du mouvement.

Calculons maintenant les crochets de Poisson des variables coordonnées et moments eux-mêmes. Il vient

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = 0 \quad ; \\ \{q_i, q_j\} &= 0 \quad (\text{même calcul}) \quad ; \\ \{q_i, p_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \quad , \end{aligned} \quad (2.38)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker².

2. égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon.

A ce niveau nous pouvons faire une analogie avec la mécanique quantique. L'analogie quantique du crochet de Poisson entre deux grandeurs X et Y est le commutant $[\hat{X}, \hat{Y}]$ entre les deux observables \hat{X} et \hat{Y} . Plus exactement, l'analogie est entre

$$\{X, Y\} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{i\hbar} [\hat{X}, \hat{Y}] \quad . \quad (2.39)$$

Nous avons aussi l'analogie entre

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad , \quad (2.40)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la valeur moyenne. Nous retrouvons ainsi le théorème d'Ehrenfest.

2.2.4 Transformations canoniques

Les transformations canoniques sont l'outil principal d'étude des systèmes dynamiques hamiltoniens. Considérant un système hamiltonien à n degrés de libertés décrit par un jeu de coordonnées canoniquement conjuguées $(q_i, p_i)_{1 \leq i \leq n}$, on appelle transformation canonique tout changement de variables vers un autre jeu de coordonnées $(q'_i, p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que les équations du mouvement dans ce nouveau jeu de coordonnées aient encore la forme canonique hamiltonienne. En d'autres termes, on demande aux variables $(q'_i, p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'être elles-mêmes canoniquement conjuguées. Deux remarques essentielles s'imposent :

- Le passage dans les nouvelles coordonnées est censé décrire le même mouvement. Par contre, le Hamiltonien peut changer dans l'opération. Nous verrons dans quelles conditions c'est le cas ;
- Le caractère canonique d'une transformation ne dépend pas de la forme du Hamiltonien, mais uniquement des propriétés mathématiques du passage des anciennes aux nouvelles coordonnées. Cette remarque est essentielle et constitue le fondement de la théorie.

L'intérêt des transformations canoniques réside dans la capacité à en trouver une telle que le nouvel Hamiltonien dépende d'un minimum de variables dans les nouvelles coordonnées. Ainsi nous dégagerons naturellement des constantes du mouvement. Imaginons par exemple un système hamiltonien tel que le Hamiltonien H ne soit fonction que des moments $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ et pas des coordonnées $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$. Dans ce cas, il vient immédiatement pour tout i

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{cte}; \quad (2.41)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad q_i = \text{cte} \times t + K_i, \quad (2.42)$$

où les K_i sont des constantes d'intégration. La deuxième égalité ci-dessus résulte du fait que H (et donc ses dérivées partielles) ne dépend que des moments et que ceux-ci sont tous constants. Cette situation représente le cas idéal où le problème dynamique est résolu. Les coordonnées $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ varient linéairement avec le temps, et les moments $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont autant de constantes du mouvement. Pour tout problème dynamique, le but ultime consisterait à trouver la bonne transformation canonique qui mettrait le problème sous cette forme, auquel cas la résolution serait immédiate. Ce n'est malheureusement pas toujours (et même rarement) le cas. Il est cependant possible de *se rapprocher* de situations intégrables.

La plupart du temps toutefois, on arrive à trouver des transformations canoniques telles que dans le jeu de nouvelles coordonnées, le nouvel Hamiltonien ne dépend plus d'une ou

plusieurs coordonnées $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$, mais pas toutes. Supposons être dans une telle situation où le Hamiltonien H ne dépend pas d'un q_i en particulier. Dans ce cas, la première des égalités ci-dessus reste vraie et il en découle immédiatement que le moment conjugué p_i est une constante du mouvement. Par contre la deuxième égalité n'est pas vraie, car H est fonction des autres moments et des autres coordonnées qui ne sont pas constants. Donc dq_i/dt n'est a priori pas constant. Pour que ce soit le cas, il faut que H ne dépende plus *que* des moments et d'aucune des coordonnées. C'est cette condition qui est difficile à remplir. Ce travail même partiellement achevé reste néanmoins utile. En dégagant des constantes du mouvement, on réduit l'ordre (le nombre de degrés de libertés) du système à étudier.

Considérons donc maintenant une transformation quelconque $(q_i, p_i)_{1 \leq i \leq n} \rightarrow (q'_i, p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ (ou simplement $(Q, P) \rightarrow (Q', P')$). A quelle condition cette transformation est-elle canonique? On montre que c'est le cas si et seulement si

$$\{q'_j, p'_k\} = \delta_{jk} \quad ; \quad \{q'_j, q'_k\} = 0 \quad ; \quad \{p'_j, p'_k\} = 0 \quad \forall (j, k) \quad , \quad (2.43)$$

les crochets de Poisson étant calculés par rapport aux premières variables. Tout ceci résulte du fait que les crochets de Poisson sont des invariants canoniques. Si la transformation $(Q, P) \rightarrow (Q', P')$ est canonique, alors le crochet de Poisson de deux grandeurs quelconques est indépendant du jeu de coordonnées par rapport auquel on le calcule. Ainsi

$$\{A, B\}_{P, Q} = \{A, B\}_{P', Q'} \quad . \quad (2.44)$$

La démonstration de ce fait est longue et calculatoire, nous ne la donnerons pas ici. Considérons maintenant une transformation canonique $(Q, P) \rightarrow (Q', P')$. Dans ce cas, les crochets de Poisson de la relation (2.43) sont des invariants canoniques. On peut les calculer par rapport aux variables (Q, P) ou par rapport aux variables (Q', P') . Or par rapport aux variables (Q', P') elles-mêmes, les crochets de Poisson vérifient nécessairement les relations (2.38). Ceci achève de montrer les relations (2.43). A l'inverse si ces relations sont vérifiées, on vérifie par un jeu de combinaisons linéaires que le crochet de Poisson de deux grandeurs A et B quelconques est bien un invariant de la transformation, ce qui suffit pour affirmer que cette dernière est canonique.

On montre en outre que si la transformation ne dépend pas explicitement du temps, le Hamiltonien reste inchangé.

2.2.5 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices sont un autre moyen de caractériser les transformations canoniques et même d'en construire explicitement.

Énonçons un théorème : Une transformation $(Q, P) \rightarrow (Q', P')$ est canonique si et seulement si il existe une fonction F telle que la forme différentielle

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - p'_i dq'_i) + F dt$$

est une différentielle exacte $dS(Q, Q', t)$. Dans ce cas le nouvel Hamiltonien vaut $H' = H + F$. Ceci peut donc s'écrire

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - p'_i dq'_i) + (H' - H) dt = dS(Q, Q', t) \quad . \quad (2.45)$$

Par identification des dérivées partielles de cette fonction, on en déduit immédiatement pour tout i

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad p'_i = -\frac{\partial S}{\partial q'_i} \quad ; \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad . \quad (2.46)$$

La fonction S est appelée *fonction génératrice* de la transformation. Si en outre elle ne dépend pas explicitement du temps, la transformation est dite conservative et on a $H' = H$. Il est important de noter que S est une fonction de $2n$ variables mais n parmi les anciennes coordonnées (les $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$), et n parmi les nouvelles (les $(q'_i)_{1 \leq i \leq n}$). Avec S en fonction des $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des $(q'_i)_{1 \leq i \leq n}$, on en déduit les $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ et les $(p'_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Ce résultat peut se déduire du principe de moindre action. En effet, le mouvement entre t_1 et t_2 se fait de manière à rendre minimale l'action (intégrale du Lagrangien). Dans ce cas, nous écrivons

$$\delta A = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(Q, \dot{Q}, t) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt \right) = 0 \quad . \quad (2.47)$$

Mais la transformation est canonique. Par conséquent cette relation reste vraie calculée dans les nouvelles coordonnées, soit

$$\delta A' = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(Q', \dot{Q}', t) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \dot{q}'_i - H' \right) dt \right) = 0 \quad . \quad (2.48)$$

On aura $\delta A = \delta A'$ si les intégrands de A et A' diffèrent d'une différentielle exacte dS , c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - p'_i dq'_i) + (H' - H) = dS \quad , \quad (2.49)$$

c'est-à-dire le résultat annoncé. A l'inverse on vérifie par les crochets de Poisson qu'une transformation bâtie de cette façon est nécessairement canonique.

Ce formalisme peut être utilisé pour construire des transformations canoniques. Partant d'un jeu de coordonnées conjuguées (Q, P) , on se donne de nouvelles coordonnées Q . On tire ensuite une fonction génératrice $S(Q, Q')$ à partir de $p_i = \partial S / \partial q_i$. Puis on utilise $p'_i = -\partial S / \partial q'_i$ pour en tirer les nouveaux moments P' . Le choix d'une fonction génératrice $S(Q, Q')$ n'est pas le seul possible. On peut prendre des $S(Q, P')$, $S(P, Q')$ et $S(P, P')$. La seule règle est que la fonction génératrice doit mêler les anciennes et les nouvelles variables. Les formes différentielles associées, qui fournissent les formules de transformation, sont les suivantes

$$S(Q, P') \implies \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + q'_i dp'_i) + (H' - H) dt = dS(Q, P') \quad ; \quad (2.50)$$

$$S(P, Q') \implies \sum_{i=1}^n (-q_i dp_i - p'_i dq'_i) + (H' - H) dt = dS(P, Q') \quad ; \quad (2.51)$$

$$S(P, P') \implies \sum_{i=1}^n (-q_i dp_i + q'_i dp'_i) + (H' - H) dt = dS(P, P') \quad . \quad (2.52)$$

2.2.6 Exemples de transformations canoniques

Décrivons maintenant explicitement quelques exemples classiques de transformations canoniques.

Passage en coordonnées polaires : Partant de (q_i, p_i) que nous assimilerons à des coordonnées cartésiennes, posons $p'_i = \arctan(p_i/q_i)$ (angle polaire). Que vaut p'_i pour avoir une transformation canonique? Pour cela, nous allons chercher une fonction génératrice $S(q_i, p'_i)$. Nous devons avoir

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = q_i \tan p'_i \quad \implies \quad S(q_i, p'_i) = \frac{1}{2} q_i^2 \tan p'_i + z(p'_i) \quad , \quad (2.53)$$

où $z(p'_i)$ est une fonction quelconque. On choisit $z = 0$. On en tire ensuite

$$q'_i = \frac{\partial S}{\partial p'_i} = \frac{1}{2} q_i^2 (1 + \tan^2 p'_i) = \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2) \quad . \quad (2.54)$$

Ou encore

$$q_i = \sqrt{2q'_i} \cos p'_i \quad \text{et} \quad p_i = \sqrt{2q'_i} \sin p'_i \quad . \quad (2.55)$$

Les nouvelles coordonnées (q'_i, p'_i) sont en quelque sorte des coordonnées polaires associées aux coordonnées cartésiennes (q_i, p_i) . Cette transformation canonique est très classique et souvent utilisée.

Transformation linéaire : Partant d'un ensemble (Q, P) de coordonnées conjuguées, on pose $Q' = AQ$ où A est une matrice fixe $n \times n$ inversible. On va chercher une fonction génératrice $S(P, Q')$. Nous devons avoir

$$q_i = -\frac{\partial S}{\partial p_i} = \left((A^{-1}Q') \right)_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(-1)} q'_k \quad . \quad (2.56)$$

Nous pouvons donc prendre

$$S(P, Q') = -\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(-1)} q'_k p_i = -{}^t P A^{-1} Q' \quad (2.57)$$

pour retrouver les relations précédentes. On en tire ensuite les nouveaux moments

$$p'_k = -\frac{\partial S}{\partial q'_k} = \sum_{i=1}^n a_{i,k}^{(-1)} p_i = -\left({}^t A^{-1} P \right)_k \quad , \quad (2.58)$$

ce que nous résumerons par la formule

$$P' = {}^t A^{-1} P \quad . \quad (2.59)$$

Cette transformation canonique peut être utilisée telle quelle. Prenant $Q' = AQ$, on obtient une transformation canonique avec $P' = {}^t A^{-1} P$.

2.2.7 Théorie de Hamilton-Jacobi

Comme nous le disions plus haut, le but dans la résolution d'un problème dynamique Hamiltonien est de trouver la bonne transformation canonique qui conduit au nouvel Hamiltonien H' le plus simple possible, si possible ne dépendant que des moments ou alors d'un minimum de variables. La méthode de Hamilton-Jacobi fournit un cadre général pour rechercher la fonction génératrice d'une telle transformation. Prenons par exemple une fonction génératrice $S(Q, P')$, comme dans l'exemple du passage en coordonnées polaires décrit plus haut. Les équations de base sont

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad ; \quad q'_i = \frac{\partial S}{\partial p'_i} \quad ; \quad H'(Q', P') = H(Q, P) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad . \quad (2.60)$$

En combinant le tout, il vient

$$H'(Q', P') = H \left(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad , \quad (2.61)$$

où on a noté pour simplifier $\partial S/\partial Q \equiv (\partial S/\partial q_1, \dots, \partial S/\partial q_n)$. Cette équation constitue l'équation de Hamilton-Jacobi dans sa forme la plus générale. Maintenant, nous cherchons S de telle manière que le Hamiltonien final H' soit intégrable, c'est-à-dire qu'il ne dépende plus que des nouveaux moments P' . Nous écrirons donc

$$H'(-, P') \implies p'_i = \text{cte} \implies \frac{\partial H'}{\partial p'_i} = \text{cte} \equiv \lambda_i \quad (2.62)$$

Rappelons que cette dernière relation implique que les $(q'_i)_{1 \leq i \leq n}$ varient linéairement avec le temps, c'est-à-dire $q'_i = \lambda_i t + K_i$. Elle impose également une forme pour H' :

$$H' = \sum_{i=1}^n \lambda_i p'_i + \phi(t) \quad (2.63)$$

Si on impose en outre que la transformation doit être conservative, alors la fonction $\phi(t)$ doit être nulle. Dans ce cas, l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$H \left(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p'_i \quad . \quad (2.64)$$

Assez souvent même, on cherche si possible $H' = 0$. Dans ce cas, l'équation de Hamilton-Jacobi est une équation aux dérivées partielles dont la solution fournit la fonction génératrice S . Bien entendu, sa résolution n'est pas nécessairement aisée. Quoi qu'il en soit, dans ce dernier cas, nous en déduisons

$$\begin{aligned} dS(Q, P') &= \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + q'_i dp'_i) + (H' - H) dt \\ \implies \frac{dS}{dt} &= \sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i + q'_i \dot{p}'_i) + (H' - H) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = L \quad . \end{aligned} \quad (2.65)$$

La dérivée de S par rapport au temps est donc égale au Lagrangien, ce qui montre que S n'est autre que l'action du système introduite plus haut (d'où la notation $S \dots$).

Donnons maintenant un exemple simple de résolution de problème par cette méthode, afin d'illustrer les choses plus concrètement. Prenons l'exemple de l'oscillateur harmonique à une dimension. Il s'agit d'un problème à un seul degré de liberté, caractérisé par une seule coordonnée q , et

$$\text{Energie cinétique : } T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad ; \quad \text{Energie potentielle : } V = \frac{1}{2} k q^2 \quad . \quad (2.66)$$

On en déduit

$$\text{Moment conjugué : } p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad ; \quad \text{Hamiltonien : } H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 \quad . \quad (2.67)$$

Nous cherchons maintenant une transformation canonique $(q, p) \rightarrow (q', p')$ telle que le nouvel Hamiltonien H' soit nul. Si nous y parvenons, les nouvelles variables (q', p') seront nécessairement des constantes du mouvement que nous appellerons α et β . Pour cela, nous cherchons une fonction génératrice $S(q, p', t)$ qui devra vérifier

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad ; \quad q' = \frac{\partial S}{\partial p'} \quad H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \iff \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad . \quad (2.68)$$

Cherchons une forme séparable, c'est-à-dire

$$S(q, p', t) = F_1(q, p') + F_2(t, p') \quad , \quad (2.69)$$

où F_1 et F_2 sont deux fonctions arbitraires. En remplaçant, il vient

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = -\frac{\partial F_2}{\partial t} \quad . \quad (2.70)$$

Cette expression doit être une fonction de q et p' par son membre de gauche, mais une fonction de p' et du temps t par son membre de droite. Elle ne doit être donc plus fonction que de p' . $p' = \beta$ devant être par ailleurs une constante du mouvement, elle est nécessairement constante. Nous pouvons la choisir carrément égale à β , de telle sorte que nous avons maintenant

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = -\frac{\partial F_2}{\partial t} = \beta \quad . \quad (2.71)$$

La deuxième de ces relations s'intègre immédiatement :

$$-\frac{\partial F_2}{\partial t} = \beta \quad \Longrightarrow \quad F_2 = -\beta t = -p' t \quad (2.72)$$

Notons qu'il est possible de fixer la constante d'intégration nulle, car cela revient à choisir l'origine des temps. Ensuite, l'autre relation s'intègre aussi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 &= \beta \\ \Longrightarrow F_1 &= \pm \int \sqrt{m(2\beta - kq^2)} dq = \pm \frac{1}{2} q \sqrt{m(2\beta - kq^2)} \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2\beta}} q \right) . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Nous avons donc trouvé notre fonction génératrice $S = F_1 + F_2$. Nous en déduisons

$$q' = \alpha = \frac{\partial S}{\partial p'} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial F_1}{\partial \beta} + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = -t \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2\beta}} q \right) \quad . \quad (2.74)$$

En inversant cette dernière relation, nous trouvons

$$q = \pm \sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} (t + \alpha) \right] \quad , \quad (2.75)$$

c'est-à-dire la solution sinusoïdale classique! Il y a deux constantes d'intégration, α et β , qui correspondent aux nouvelles variables après transformation canonique. Le signe \pm dépend des conditions initiales. Nous vérifions aussi

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{m(2\beta - kq^2)} = \pm \sqrt{2m\beta} \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} (t + \alpha) \right] = m\dot{q} \quad . \quad (2.76)$$

$p' = \beta$ est aussi l'énergie du système. En effet, par l'équation de Hamilton-Jacobi, nous avons

$$H' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial t} = \beta \quad . \quad (2.77)$$

Nous avons été obligés ici d'introduire une transformation canonique dépendant du temps. Ceci était rendu nécessaire par la volonté de rendre H' nul. Il aurait toutefois été possible de procéder autrement, à savoir chercher une transformation canonique conservative sous la forme d'une fonction génératrice $S(q, p')$. Dans ce cas, nous ne devons plus chercher $H' = 0$, mais H' sous la forme (2.63) avec $\phi(t) = 0$. Choisissons par exemple simplement $H' = p'$, en rappelant que dans le cas d'une transformation conservative, nous avons $H = H'$. Il vient alors nécessairement

$$\dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial q'} = 0 \implies p' = \text{cte} \equiv \beta \quad ; \quad (2.78)$$

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = 1 \implies q' = t + \alpha \quad (\alpha \text{ constante}) \quad , \quad (2.79)$$

ce qui fournit le rapport des nouvelles variables au temps. Cette transformation s'obtient à l'aide d'une fonction génératrice $S(q, p')$ qui vérifie

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \implies H' = \beta = H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 \quad . \quad (2.80)$$

Nous remarquons alors que $S(q, p')$ vérifie exactement la même équation aux dérivées partielles que la fonction F_1 introduite plus haut. Nous trouvons donc la même solution, à savoir

$$S(q, p') = S(q, \beta) = \pm \frac{1}{2} q \sqrt{m(2\beta - kq^2)} \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2\beta}} q \right) \quad . \quad (2.81)$$

A partir de là, il n'y a plus qu'à écrire

$$q' = t + \alpha = \frac{\partial S}{\partial p'} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = - \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2\beta}} q \right) \quad . \quad (2.82)$$

Au bout du compte, nous retrouvons la même solution, à ceci près qu'il n'a pas été nécessaire de fractionner la fonction génératrice en deux parties F_1 et F_2 . Cette dernière méthode convient bien aux systèmes conservatifs. Dans le cas général, elle consiste à chercher une transformation canonique conservative telle que le nouvel Hamiltonien (qui correspond aussi à l'ancien) soit égal à un des nouveaux moments. Dans ce cas, la coordonnée conjuguée s'identifie au temps à une constante près.

Chapitre 3

Les problèmes à N corps et le mouvement Képlérien

Le mouvement Képlérien représente la solution du problème à deux corps. Bien que théoriquement, ceci représente un cas très particulier de configuration, cette solution est d'une importance capitale pour l'ensemble des mouvements dans les systèmes planétaires et multiples.

3.1 Le problème des N corps

Le problème de N corps peut se formuler comme suit : « *Trouver le mouvement de N points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton* ».

On réserve traditionnellement le terme de dynamique stellaire au cas où N est grand ($\gtrsim 100$), tandis qu'on classe dans la *mécanique céleste* le cas où N est petit (typiquement 10). Bien que dans les deux cas, le problème soit formellement le même, les buts et les méthodes de la dynamique stellaire sont profondément différents de ceux de la mécanique céleste. Les deux domaines ont finalement peu de points communs. La mécanique céleste s'attachera à décrire le mouvement de *chaque* point du système. En dynamique stellaire, avec d'aussi grandes valeurs de N que plusieurs milliards (galaxies), il est hors de question de suivre exactement l'orbite de chaque objet. On recourt plutôt à une description statistique du système, d'autant plus justifiée que seules les propriétés d'ensemble du système sont recherchées. La dynamique stellaire est abordée dans la deuxième partie de ce cours.

Considérons N points matériels, numérotés de 1 à N . Chacun d'entre eux est caractérisé par 7 nombres : sa masse m_i , son vecteur position \vec{r}_i , et son vecteur vitesse $\dot{\vec{r}}_i$. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\boxed{m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \frac{G m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}} \quad , \quad (3.1)$$

où G est comme à l'accoutumée la constante de la gravitation. Toute la mécanique céleste, et toute la dynamique stellaire sont contenues dans l'équation (3.1). C'est un système différentiel d'ordre $6N$. On *ne connaît pas* de solution exacte pour $N > 2$. Pour $N = 2$, la solution est donnée par les lois de Kepler que nous verrons plus loin.

On peut théoriquement abaisser l'ordre du système grâce à la conservation de quelques quantités physiques :

- Le théorème du centre de gravité : $\sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}$. En intégrant deux fois, on obtient 6 relations.
- La conservation du moment cinétique : $\sum m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i = \vec{c}_t$ fournit 3 relations.

— La conservation de l'énergie fournit une relation de plus :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \text{cte} \quad . \quad (3.2)$$

En définitive, l'ordre du système est abaissé à $6N - 10$. On peut montrer qu'on peut en fait réduire l'ordre à $6N - 12$. Pour aller au delà, trois moyens sont utilisés pour étudier de tels systèmes :

- l'approche numérique : on résout numériquement le système (3.1) ;
- l'approche analytique : On tente de résoudre le système en faisant des approximations. C'est typiquement l'objet de la théorie des perturbations.
- l'approche observationnelle.

3.2 Le problème des deux corps et les lois de Képler

3.2.1 Aspect historique

Le problème des deux corps est le seul dont on connaisse la solution exacte. Son importance est capitale, car sa solution représente souvent la réalité de façon très acceptable dans de nombreuses situations, à commencer par le mouvement des planètes autour du Soleil.

Ainsi, dans le Système Solaire, à distances égales, le Soleil exerce une attraction M_{\odot}/m plus grande qu'une planète de masse m . Sachant que la masse de Jupiter est de l'ordre de $9.5 \times 10^{-4} M_{\odot}$, on voit que le Soleil exerce toujours sur une planète donnée une attraction au moins 1000 fois supérieure à celle de toutes les autres planètes. En première approximation, on peut considérer isolément le Soleil et la planète étudiée.

Historiquement, Johannes Képler (1571–1630) donna le premier les trois lois qui régissent la solution de ce problème.

1. Les orbites des planètes sont des ellipses planes dont le Soleil occupe l'un des foyers ;
2. Les rayons vecteurs des planètes balayent des aires proportionnelles au temps (loi des aires) ;
3. Les périodes T des planètes et les demi-grands axes de leurs orbites a vérifient $T^2/a^3 = \text{cte}$.

Il est important de comprendre que la démarche historique s'est faite à l'inverse de celle présentée dans ce cours. Ici, nous présentons les lois de Képler comme une conséquence déduite de la solution du problème à deux corps, lequel se décrit dans le cadre de la gravitation de Newton. Historiquement, tout s'est fait dans l'autre sens. Képler a énoncé ses lois plusieurs dizaines d'années *avant* la parution des *Principia* de Newton (1687) qui énonçaient sa théorie. C'est à partir de lois de Képler que Newton a construit la gravitation universelle. En vérité, la description de Képler constituait l'aboutissement d'une controverse commencée dans l'Antiquité. A cette époque, le système de Ptolémée (I^{er} siècle avant notre ère) décrivait les mouvements des corps célestes (planètes *et* Soleil) au moyen de mouvements circulaires uniformes autour de *la Terre*, supposée immobile au centre de l'Univers. Comme les mouvements circulaires uniformes rendaient assez mal compte des observations, les Grecs avaient imaginé un système fait de combinaisons de mouvements circulaires : Chaque planète effectuait un petit mouvement circulaire uniforme appelé épicycle autour d'un centre virtuel, lequel tournait en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre¹. Compte tenu de la précision des observations et de la

1. Nous réintroduirons une théorie similaire en dynamique galactique.

mesure du temps à l'époque, ce système décrivait le mouvement des astres dans le ciel avec une précision acceptable, permettant par exemple de prédire le retour des éclipses.

Ce n'est qu'à la renaissance que les perfectionnements de l'observation astronomique et de l'horlogerie mirent en difficulté le système de Ptolémée. L'homme qui lança la bombe finale fut l'astronome polonais Copernic (1473–1543), qui détrôna la Terre et plaça le Soleil au centre des orbites planétaires. Il conserva toutefois la forme circulaire des orbites, ce qui l'empêcha de s'affranchir des épicycles. Copernic fut à l'époque traité d'hérétique par les autorités religieuses. Sa théorie devint un sujet théologique si épineux que le meilleur astronome du XVI^e siècle, Tycho Brahé, ne voulut pas prendre position et adopta un système intermédiaire. Mais ses calculs, extrêmement précis, ne servirent qu'à confirmer le système de Copernic.

Un peu plus tard, Galilée, que l'on peut considérer comme le fondateur de la physique moderne, fut le premier en 1609 à avoir l'idée de construire et d'utiliser une lunette astronomique qui restait au passage fort rudimentaire face à tout ce qu'on peut trouver aujourd'hui dans le commerce. Il ne put que constater (par exemple en observant les phases de Vénus) l'exactitude du système de Copernic.

À la même époque, Képler, en étudiant les mouvements de la planète Mars, énonça ses trois lois qui régissent le mouvement des planètes. Les planètes ont des orbites elliptiques autour du Soleil et se déplacent selon la loi des aires. Cette découverte mit fin à la théorie des épicycles et des mouvements circulaires uniformes chers aux Grecs.

Il faut bien comprendre que la description de Képler était purement cinématique. Il constata que le mouvement des planètes se décrivait bien à l'aide de son modèle, mais ne chercha pas à l'expliquer par la moindre considération dynamique. Ce mérite revint à Newton.

3.2.2 Formulation du problème

Considérons donc deux corps ponctuels de masse m_1 et m_2 , et utilisant le théorème du centre de gravité, plaçons l'origine du repère utilisé au centre de gravité du système, que nous pouvons supposer fixe. Désignons enfin par \vec{r} la quantité $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Les lois du mouvement s'écrivent

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_2}{r^3}\vec{r} = \frac{Gm_2}{r^2}\vec{u} \quad ; \quad (3.3)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^3}\vec{r} = -\frac{Gm_1}{r^3}\vec{u} \quad , \quad (3.4)$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction de \vec{r} . On obtient donc en faisant la différence

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r} \quad . \quad (3.5)$$

Cette équation est celle du problème Képlérien. La solution en \vec{r}_1 et \vec{r}_2 s'en déduit en utilisant $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0}$. Dans le cas le plus général, le problème Képlérien s'écrit

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} = -\vec{\nabla} \left(-\frac{\mu}{r} \right)} \quad . \quad (3.6)$$

Ici, on a $\mu = G(m_1 + m_2)$, montrant ainsi que le mouvement relatif de deux corps massifs revient à l'étude du mouvement d'un point sans masse autour d'un centre fixe de masse $m_1 + m_2$. Dans d'autres problèmes, μ peut prendre des formes plus complexes.

3.2.3 Résolution

Le détail du traitement mathématique de la résolution du problème Képlérien est donné en annexe. Nous résumons ici les principales étapes. La méthode choisie ici part des intégrales premières du mouvement, à savoir l'énergie h spécifique, le moment cinétique spécifique \vec{C} et le vecteur excentricité \vec{E} :

$$h = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = \text{Cte} \quad ; \quad (3.7)$$

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \text{Cte} \quad ; \quad (3.8)$$

$$\vec{E} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}}{\mu} - \vec{u} = \text{Cte} \quad , \quad (3.9)$$

où $\vec{u} = \vec{r}/r$ est un vecteur unitaire dans la direction de \vec{r} . Posons $e = \|\vec{E}\|$. Il est d'usage d'appeler *anomalie vraie* l'angle polaire entre \vec{E} et \vec{u} . En définissant le *paramètre* de l'orbite $p = C^2/\mu$, on montre que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad , \quad (3.10)$$

ce qui constitue l'équation polaire d'une conique d'*excentricité* e et de paramètre p , rapportée à un de ses foyers. On retrouve donc la première loi de Képler. La relation $\|\vec{C}\| = C = \text{cte}$ se traduit concrètement par $r^2\dot{\nu} = 0$, c'est à dire la deuxième loi de Képler ou loi des aires.

On obtient ensuite une relation importante entre l'excentricité et l'énergie, à savoir

$$e^2 = 1 + \frac{2hp}{\mu} \quad , \quad (3.11)$$

ce qui montre que la trajectoire est une ellipse si $h < 0$, une parabole si $h = 0$ et une hyperbole si $h > 0$. La description du mouvement sur la trajectoire se fait via une régularisation décrite dans l'annexe. Ceci amène à introduire un paramètre supplémentaire appelé *anomalie excentrique*, noté u , et qui permet une description commode du lien entre le temps et la position du mobile sur l'orbite. Dans le cas elliptique, on trouve la relation importante

$$\boxed{M = n(t - t_p) = u - e \sin u} \quad (3.12)$$

appelée *équation de Képler*. Dans cette équation, t_p est le temps de passage au périastre, et n est le moyen mouvement. C'est une quantité constante vérifiant

$$\boxed{n^2 a^3 = \mu} \quad , \quad (3.13)$$

où a est le demi-grand axe de l'orbite. Il est alors facile de voir de par l'équation de Képler que la période du mouvement (la période de u) est $T = 2\pi/n$, ce qui permet de retrouver la troisième loi de Képler qui s'écrit ici

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \quad . \quad (3.14)$$

Le demi-grand axe de l'ellipse vérifie $p = a(1 - e^2)$, ce qui permet de relier le demi-grand axe et l'énergie

$$\boxed{h = -\frac{\mu}{2a}} \quad . \quad (3.15)$$

Il est aussi d'usage d'appeler *anomalie moyenne* la quantité M . C'est une régularisation du temps de manière à ce que $M = 0$ au périastre et $M = 2\pi$ une période plus tard. Toute la loi horaire est dans le lien $M \leftrightarrow u \leftrightarrow \nu$. Le lien entre ν et u est purement géométrique et est donnée en annexe. Le lien entre M (le temps) et u se fait via l'équation de Képler (3.12). Il est important de noter que cette équation est transcendente, à savoir que pour un M donné, il n'y a pas de formule mathématique simple si ce n'est de développements en série sophistiqués permettant de trouver le u correspondant. La résolution de cette équation est la plupart du temps numérique. Tout un formulaire de transformation est donné dans l'annexe.

3.2.4 Elements d'orbite

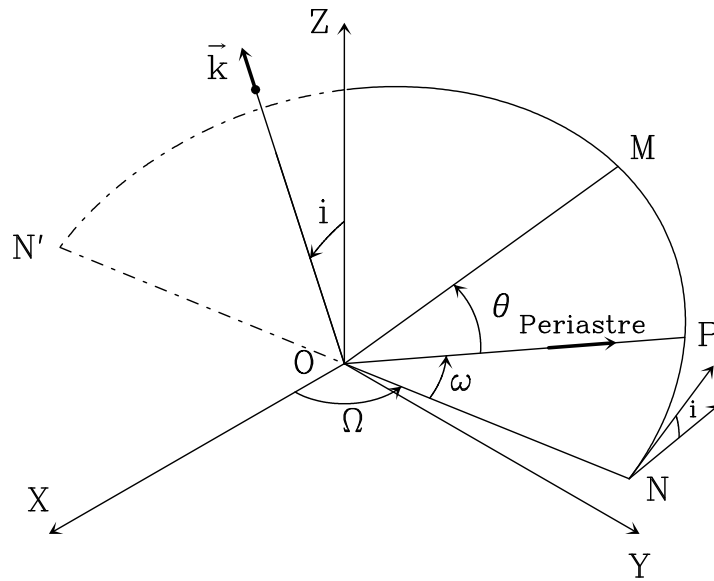


FIGURE 3.1: Les éléments d'orbite

TABLE 3.1: Caractéristiques et éléments d'orbite des planètes

Planète	Distance moyenne au Soleil (AU)	Excentricité orbitale	Inclinaison sur l'écliptique	Obliquité	Période de rotation	Période orbitale	Rayon (équateur) (km)	Masse (M_{\oplus})	Masse volumique (g cm^{-3})
Mercure	0.387099	0.2056	7.00°	0°	59 jours	88 jours	2 439	0.05527	5.43
Vénus	0.723332	0.0068	3.39°	177.3°	243 jours	224 jours	6 051	0.81499	5.25
Terre	1.	0.0167	0°	23.45°	1 jour	365 jours	6 378	1	5.52
Mars	1.523688	0.0933	1.85°	25.19°	24.5 h	687 jours	3 397	0.10745	3.93
Jupiter	5.202833481	0.048	1.31°	3.12°	9.6 h	11 ans	71 492	317.894	1.33
Saturne	9.538762055	0.056	2.49°	26.73°	10.2 h	29 ans	60 268	95.1843	0.71
Uranus	19.19139128	0.046	0.77°	97.86°	15.5 h	84 ans	25 559	14.5373	1.24
Neptune	30.06106906	0.010	1.77°	29.58°	15.8 h	164 ans	24 764	17.1321	1.67

La donnée du demi-grand axe a et de l'excentricité e ne suffit pas à caractériser complètement l'orbite d'un astre donnée dans l'Espace. Encore faut-il positionner cette orbite par rapport à un repère $OXYZ$ donné. Nous devons donc introduire des éléments qui nous permettent de

préciser la position de l'orbite dans l'Espace. Cette information est en fait contenue dans les vecteurs \vec{E} et \vec{C} , mais on préfère en général utiliser des paramètres angulaires. Si nous désignons par \vec{u}_0 le vecteur unitaire tel que $\vec{E} = e\vec{u}_0$, nous pouvons alors considérer la base orthonormée $(\vec{u}_0, \vec{v}_0 = \vec{k} \wedge \vec{u}_0, \vec{k})$ qui est la base naturelle du mouvement. Nous allons définir les angles qui permettent de préciser la position de cette base par rapport au système de référence $OXYZ$ (Fig. 3.1). Dans le Système Solaire, en général le plan (OXY) correspond au plan de l'écliptique, c'est-à-dire le plan de l'orbite terrestre. Ce peut être l'équateur terrestre dans d'autre cas. Dans le cas de systèmes de planètes extrasolaires, en général, le repère de base est choisi de manière à ce que le plan (OXY) corresponde au plan du ciel, avec l'axe OZ (et le vecteur \vec{k}) pointant vers la Terre.

Le plan de l'orbite est défini par \vec{u}_0 et \vec{v}_0 . Il coupe le plan (OXY) en une droite (NON') appelée ligne des nœuds. N désignera par convention celui des deux points où l'orbite coupe (OXY) où la coordonnée z de l'objet croît. C'est le nœud ascendant.

- L'angle $\Omega = (\vec{OX}, \vec{ON})$ est appelé *longitude du nœud ascendant*.
- L'angle $i = (\vec{OZ}, \vec{k})$ est appelé *inclinaison*. i est compté de 0 à 180°, avec pour convention que $i < 90^\circ$ correspond à un mouvement prograde (dans le sens trigonométrique) en projection sur (OXY) , $i > 90^\circ$ correspondant à un mouvement rétrograde. Les inclinaisons des planètes précisées dans la table 3.1 suivent cette convention.
- L'angle $\omega = (\vec{ON}, \vec{u}_0)$ est appelé *argument du périastre*.

En résumé, les 6 constantes usuelles d'intégration du mouvement ou *éléments d'orbite* sont $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$. a donne la « taille », les « dimensions » de l'orbite ; e donne sa forme ; i et Ω donnent la position dans l'espace du plan de l'orbite. ω donne la position de l'orbite dans son plan, et t_p donne un point de référence dans le temps.

Les éléments i, ω, Ω dépendent du repère de référence choisi. Lorsque $i = 0$, ω et Ω sont indéterminés. Par contre $\varpi = \Omega + \omega$ est défini. ϖ est appelé *longitude du périastre*. Dans le cas des planètes du Système Solaire (Table 3.1), inclinaisons et excentricités sont en général faibles. Les demi-grands axes sont à peu près régulièrement espacés. Par contre, les autres éléments n'obéissent à aucun ordre et sont quelconques.

La table 3.1 liste les caractéristiques physiques et orbitales des planètes principales du Système Solaire, ainsi que des caractéristiques liées à leur rotation propre, nous en parlerons plus loin. La période de rotation correspondra au temps que la planète met pour faire un tour sur elle-même dans un référentiel lié à des directions fixes. L'obliquité est l'angle entre l'axe de rotation de la planète et la perpendiculaire à son orbite (donc le vecteur \vec{k}).

En ce qui concerne les caractéristiques orbitales, on remarquera deux faits importants :

- Les excentricités sont toutes faibles. Seule Mercure atteint 0.2. Les orbites des planètes sont donc toutes presque circulaires. La Terre par exemple, a une excentricité de 0.0167. Cette faible excentricité induit quand même une variation de l'ordre de 5 millions de kilomètres de la distance Terre–Soleil. Pour information, le passage de la Terre au périastre (on parle ici de *périhélie*) a lieu dans les tout premiers jours de Janvier. Le phénomène des saisons n'est donc en rien lié à cela !
- Les inclinaisons sont toutes faibles, de l'ordre de quelques degrés. Rappelons ici que le plan (OXY) de référence est ici le plan de l'orbite terrestre². Il est donc normal que l'inclinaison de l'orbite terrestre par rapport à ce même plan soit nulle. Le fait que par rapport à ce même plan, toutes les autres planètes aient une faible inclinaison signifie que toutes les planètes du Système Solaire gravitent approximativement dans le même plan à quelques degrés près et dans le même sens. En un mot, le Système Solaire a bien

2. Nous verrons que ce choix n'est pas forcément le plus optimal, car ce plan est susceptible d'évoluer lentement.

la forme d'un disque en rotation différentielle.

Précisons que ce qui est vrai pour les planètes du Système Solaire l'est beaucoup moins pour les petits corps (planètes naines, astéroïdes, comètes) du Système Solaire. Ces objets ont une dispersion beaucoup plus grande d'excentricités et d'inclinaisons. Il existe des exemples d'astéroïdes rétrogrades.

Il est facile de vérifier par un calcul numérique à partir des éléments de la table 3.1 que les quantités T^2/a^3 sont toutes sensiblement égales, même proche de 1 avec les unités de la table 3.1. On vérifie ainsi la troisième loi de Képler. Précisons que cette loi n'est en fait qu'approximative dans le Système Solaire. La relation rigoureuse est l'équation (B.27). Pour un problème à deux corps tel que nous l'avons introduit, nous avons $\mu = G(m_1 + m_2)$. Dans le cas des planètes du Système Solaire, les deux corps en question sont le Soleil et la planète considérée. Par conséquent, la masse de chaque planète intervient dans le calcul de sa constante μ , de telle sorte que le rapport T^2/a^3 varie d'une planète à l'autre. Mais la masse du Soleil domine largement la masse de toutes les planètes, de telle sorte que dans tous les cas, on a pratiquement $\mu \simeq GM_\odot$. Képler n'avait tout simplement pas la précision suffisante dans ses mesures pour identifier cette subtilité!

3.2.5 Formulation Hamiltonienne du problème Képlérien

Nous avons vu au chapitre précédent des éléments de mécanique Hamiltonienne à propos desquels nous avons dit qu'ils seraient fort utiles pour traiter les problèmes de dynamique planétaire. Nous avons abordé le problème Képlérien sans faire aucune référence à cette formulation. La question qui se pose est donc la suivante : Le problème Képlérien peut-il se traiter de manière Hamiltonienne ? Ou dit autrement, est-il possible de trouver un jeu de variables canoniquement conjuguées où la formulation du problème Képlérien est particulièrement simple ? La réponse est oui, et on y parvient par un jeu de transformations canoniques.

L'idée maîtresse est que les éléments d'orbite décrivant une orbite Képlérienne peuvent être considérées comme des « coordonnées » dans l'espace des phases au même titre que les variables positions-impulsions. En fait, pour une constante de couplage μ fixée, pour chaque jeu de positions-impulsions (\vec{r}, \vec{p}) censé décrire la position et la vitesse d'un mobile en orbite à un instant t donnée, il existe une et une seule orbite Képlérienne qui passe par ce point. A (\vec{r}, \vec{p}) , on peut faire correspondre un et un seul jeu d'éléments orbitaux $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$ tel que l'orbite en question passe par l'état (\vec{r}, \vec{p}) à l'instant t . A l'inverse, la donnée d'un jeu d'éléments orbitaux permet de déterminer la position et la vitesse du mobile à chaque instant. La correspondance est donc bi-univoque.

Considérons un mobile se déplaçant dans l'espace sur une trajectoire quelconque, pas nécessairement Képlérienne. A chaque instant, on peut lui faire correspondre l'orbite correspondant à son état (\vec{r}, \vec{p}) . Si le mouvement est Képlérien pur, on va logiquement trouver la même orbite à chaque instant, c'est-à-dire les mêmes éléments orbitaux. Si ce n'est pas le cas, les éléments orbitaux trouvés à chaque instant vont varier dans le temps, et la description de l'évolution de ces éléments en fonction du temps décrira le mouvement de manière équivalente à la donnée de (\vec{r}, \vec{p}) en fonction du temps. L'orbite ainsi déterminée à chaque instant porte le nom d'*orbite osculatrice*. Dans le cas d'un mouvement Képlérien pur, l'orbite osculatrice est constante. Elle est variable dans le cas contraire.

Dans les coordonnées « éléments orbitaux osculateurs », la description du mouvement Képlérien est donc particulièrement simple. Tous les éléments sont constants ! Le seul inconvénient est que les éléments $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$ ne sont pas canoniquement conjugués entre eux. Il existe cependant des combinaisons simples qui le sont. La plus classique est celle des *éléments*

de Delaunay $(l, g, \theta, L, G, \Theta)$ ³ définis par

$$\left(\begin{array}{lll} q_1 = l = M & \longleftrightarrow & p_1 = L = \sqrt{\mu a} \\ q_2 = g = \omega & \longleftrightarrow & p_2 = G = L\sqrt{1-e^2} \\ q_3 = \theta = \Omega & \longleftrightarrow & p_3 = \Theta = G \cos i \end{array} \right) . \quad (3.16)$$

Précisons ici que la variable M intervenant ici est l'anomalie moyenne. On parvient à ces éléments à partir des variables conjuguées positions–impulsions par un jeu de transformation canoniques successives que nous ne décrivons pas ici. Remarquons que les éléments de Delaunay sont un exemple de variables angles–actions. Les coordonnées sont des angles, et les moments conjugués sont des morceaux de moments cinétiques associés à l'axe de rotation autour duquel « tourne » l'angle correspondant. Le moment G correspond d'ailleurs exactement au moment cinétique de l'orbite, et le moment Θ à sa projection sur l'axe OZ .

Le Hamiltonien du mouvement Képlérien s'écrit simplement en éléments de Delaunay

$$H = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2}{2L^2} = H(-, -, -, L, -, -) \quad . \quad (3.17)$$

Dans le cadre de ce formalisme, le Hamiltonien Képlérien ne dépend donc que d'un seul moment, à savoir L . Le problème Képlérien est donc extrêmement simple à résoudre dans ce jeu de variables : Tous les moments sont des constantes du mouvement, ainsi que les coordonnées ω et Ω . Au final il ne reste plus qu'une équation qui s'écrit

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} \quad . \quad (3.18)$$

Sachant que $dM/dt = n$ (moyen mouvement) et avec $L = \sqrt{\mu a}$, on retrouve la troisième loi de Képler $n^2 a^3 = \mu$.

Le problème Képlérien apparaît donc comme intégrable et même dégénéré, en ce sens que le Hamiltonien ne dépend plus que d'un seul moment. C'est la raison profonde qui fait que la trajectoire lorsque le mobile est lié est une courbe fermée et que le mouvement est périodique. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre consacré à la dynamique galactique.

Les éléments de Delaunay ne sont pas la seule combinaison de variables conjuguées qu'on peut fabriquer à partir des éléments orbitaux. Ils sont en particulier mal adaptés lorsque les excentricités et/ou les inclinaisons sont petites. De fait, lorsque $i = 0$, les angles ω et Ω ne sont pas définis. Lorsque $e = 0$, M et ω ne sont pas définis. En revanche, comme nous l'avons déjà dit, même lorsque $i = 0$, la longitude du périastre $\varpi = \omega + \Omega$ est correctement définie. De même, la quantité $\lambda = \Omega + \omega + M$ appelée *longitude moyenne* est toujours définie quelque que soit l'orbite. Il serait donc intéressant de passer aux coordonnées $(\lambda, \varpi, \Omega)$ en lieu et place de (M, ω, Ω) . Il s'agit là d'une transformation linéaire qui se prolonge en transformation canonique de la façon que nous avons vu au chapitre précédent. Les nouveaux moments conjugués sont $(L, L-G, G-\Theta)$. Ces éléments posent encore un problème de définition aux petites inclinaisons et excentricités. En effet, ϖ et Ω ne sont pas toujours définis. La solution consiste alors à opérer une nouvelle transformation canonique type polaires→cartésiennes sur les deux dernières paires de variables conjuguées. C'est ainsi qu'on aboutit aux *éléments de Poincaré*, définis par

$$\left(\begin{array}{lll} q'_1 = \lambda = \omega + \Omega + M & \longleftrightarrow & p'_1 = L = \sqrt{\mu a} \\ q'_2 = -\sqrt{2(L-G)} \sin \varpi & \longleftrightarrow & p'_2 = \sqrt{2(L-G)} \cos \varpi \\ q'_3 = -\sqrt{2(G-\Theta)} \sin \Omega & \longleftrightarrow & p'_3 = \sqrt{2(G-\Theta)} \cos \Omega \end{array} \right) \quad (3.19)$$

3. Attention, le G introduit ici n'a rien à voir avec la constante de la gravitation! La notation est certes maladroite, mais elle est traditionnelle. Certains ouvrages notent toutefois K à la place de G .

Ces éléments sont bien adaptés aux situations où les excentricités et les inclinaisons sont petites, ce qui correspond typiquement au cas d'un système planétaire comme le Système Solaire. En effet, remarquons que

$$\sqrt{2(L - G)} = \sqrt{2\sqrt{\mu a} (1 - \sqrt{1 - e^2})} \quad (3.20)$$

$$\sqrt{2(G - \Theta)} = \sqrt{2\sqrt{\mu a}\sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} = 2\sqrt{\sqrt{\mu a}\sqrt{1 - e^2}} \sin \frac{i}{2} \quad (3.21)$$

Ainsi, lorsque $i = 0$, Ω n'est pas défini, mais q'_3 et p'_3 sont tous deux nuls, de telle sorte que les problèmes de non-définition disparaissent. Par exemple pour un problème plan, on peut se contenter de travailler avec les deux premières paires de variables. De même si $e = 0$, les variables q'_2 et p'_2 s'annulent en même temps.

Signalons enfin que lorsque l'inclinaison et l'excentricité sont petites, on peut faire un développement limité des variables de Poincaré. Ainsi, on a $\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e^2})} \simeq e$, de telle sorte que les éléments (q'_2, p'_2) et (q'_3, p'_3) sont respectivement proches des variables $(e \cos \varpi, e \sin \varpi)$ et $(\sin(i/2) \cos \Omega, \sin(i/2) \sin \Omega)$ traditionnellement utilisées par les astronomes pour exprimer les problèmes de type planétaire.

3.3 Le problème restreint à trois corps et les points de Lagrange

3.3.1 Définition et position du problème

On appelle problème à 3 corps un problème à N corps avec $N = 3$. Le problème *restreint* correspond à la situation où un des trois corps est de masse négligeable par rapport aux deux autres, au point que ce corps puisse être considéré comme une *particule test* sans masse. Dans ces conditions, le mouvement des deux autres corps n'est pas affecté par cette particule, de telle sorte qu'ils suivent tous deux une orbite Képlérienne pure, solution d'un problème à deux corps. Il n'en va bien évidemment pas de même pour le troisième corps qui se trouve affecté par la présence des deux autres.

L'étude du problème restreint des trois corps se résume en fait à l'étude du mouvement du troisième corps. Son mouvement ne sera en général pas Képlérien, même si assez souvent il s'en rapproche, soit qu'il gravite beaucoup plus proche d'un des autres corps que de l'autre, soit que l'un des deux corps massifs domine largement l'autre par sa masse. Dans ce dernier cas, le mouvement de la particule se décrit dans le cadre du *mouvement Képlérien perturbé* qui sera abordé au chapitre suivant. Nous allons ici dégager des propriétés propres au mouvement du troisième corps indépendantes de toute approximation Képlérienne.

De nombreuses situations physiques rentrent dans le cadre de ce problème : Satellite d'une planète en orbite autour de son étoile, astéroïde ou planète de faible masse se mouvant dans un système constitué d'une étoile et d'une planète massive, planète se mouvant dans un système stellaire binaire...

On appelle problème restreint *circulaire* les cas où le mouvement Képlérien relatif des deux corps massifs est circulaire, et problème plan le cas où le mouvement du troisième corps est confiné au plan orbital des deux corps massifs. Il est clair par symétrie (ce que les équations confirmeront plus loin) que si à l'origine, le troisième corps se meut dans le plan orbital des deux primaires, il y restera toujours, car rien ne lui donnera de vitesse verticale. Le problème est alors entièrement confiné à un plan.

3.3.2 Formulation du problème circulaire dans le repère tournant

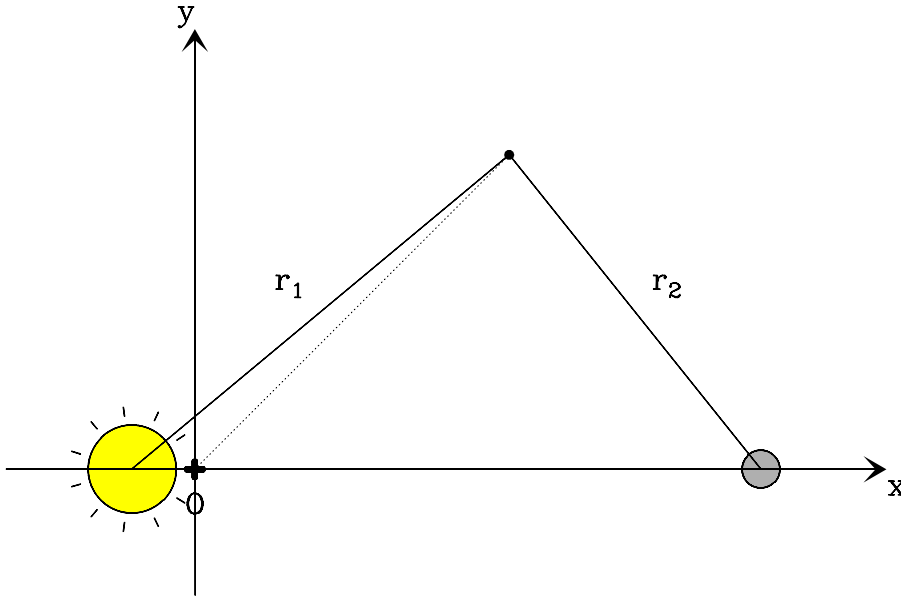


FIGURE 3.2: Problème à 3 corps restreint dans le repère tournant avec les primaires. Les deux corps massifs (ici, une étoile et une planète) occupent des positions fixes dans ce référentiel.

Nous étudierons ici le problème restreint circulaire. Nous nous placerons dans un référentiel barycentrique, mais tournant à la vitesse des deux corps massifs primaires. Par rapport au référentiel barycentrique de départ, ce référentiel est en rotation à la vitesse angulaire n (moyen mouvement). Pour des raisons pratiques, nous appellerons « étoile » le plus massif des deux corps primaires et « planète » le deuxième. Notons cependant que tout ce qui va suivre s'appliquerait intégralement à d'autres situations, comme par exemple un système stellaire binaire. De même nous appellerons « astéroïde » le troisième corps. L'étoile et la planète sont supposées avoir des masses m_* et m_p . Nous appellerons $M = m_* + m_p$ la masse totale de l'ensemble, et μ le rapport entre la masse de la planète et la masse totale⁴, de telle sorte que l'on a

$$m_* = (1 - \mu)M \quad \text{et} \quad m_p = \mu M \quad . \quad (3.22)$$

Notons que μ est un paramètre sans dimension compris entre 0 et 0.5. Dans le cas typique d'une situation réelle de type Planète–Étoile, μ est un paramètre petit. Il vaut par exemple un peu moins de 10^{-3} dans le cas Soleil–Jupiter. Mais il peut prendre des valeurs plus grandes de le cas de systèmes binaires. Il atteint 0.5 dans le cas extrême de deux étoiles de même masse. Nous noterons a le demi-grand axe supposé constant de l'orbite. Dans ces conditions, la troisième loi de Képler s'écrit simplement $n^2 a^3 = GM$, où G est la constante de la gravitation.

Dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire n , les deux primaires sont immobiles. Nous choisirons de faire coïncider l'axe OX du repère associé avec la droite qui les joint dans la direction Étoile→Planète, et l'axe OY de telle manière que le plan OXY coïncide avec leur plan orbital, dans le sens direct. Dans ces conditions, l'étoile aura pour coordonnées $\vec{r}_* = (-a\mu, 0, 0)$ dans le repère tournant, et la planète $\vec{r}_p = (a(1 - \mu), 0, 0)$. Notons que ces positions sont fixes dans le repère tournant (Fig. 3.2).

L'astéroïde aura quant à lui comme vecteur position dans ce repère $\vec{r} = (x, y, z)$. Si nous revenons momentanément dans le référentiel barycentrique *non tournant*, nous pouvons écrire les équations du mouvement de l'astéroïde :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM(1 - \mu)}{|\vec{r} - \vec{r}_*|^3} (\vec{r} - \vec{r}_*) - \frac{GM\mu}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^3} (\vec{r} - \vec{r}_p) = -\frac{GM(1 - \mu)}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{GM\mu}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad , \quad (3.23)$$

4. Attention, ce μ là n'a rien à voir avec le μ du problème Képlérien introduit plus haut !

où on a posé par définition $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_*$ et $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_p$ les rayons vecteurs joignant l'astéroïde à l'étoile et la planète respectivement (Fig. 3.2). Pour écrire l'équation correspondante dans le repère tournant, nous devons rajouter les forces d'inertie (centrifuge, Coriolis) car le repère tournant n'est pas galiléen. Une façon simple de s'y retrouver est d'écrire en notant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs de base du repère tournant et en dérivant :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad ; \quad (3.24)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + n x\vec{j} - n y\vec{i} \quad ; \quad (3.25)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + 2n\dot{x}\vec{j} - 2n\dot{y}\vec{i} - n^2x\vec{i} - n^2y\vec{j} \quad . \quad (3.26)$$

Si on reporte ceci dans l'équation vectorielle du mouvement et qu'on explicite les vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , on obtient les équations du mouvement dans le repère tournant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1^3}(x+a\mu) - \frac{GM\mu}{r_2^3}(x+a\mu-a) \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1^3}y - \frac{GM\mu}{r_2^3}y \\ \ddot{z} = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1^3}z - \frac{GM\mu}{r_2^3}z \end{array} \right. \quad (3.27)$$

On définit ensuite les quantités sans dimension

$$\rho_1 = \frac{r_1}{a} \quad ; \quad \rho_2 = \frac{r_2}{a} \quad ; \quad \alpha = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \quad ; \quad \beta = \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right) \quad . \quad (3.28)$$

On peut alors simplifier les équations du mouvement en utilisant la troisième loi de Képler $n^2a^3 = GM$. On peut faire dériver le tout d'un potentiel U . Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2n\dot{y} = n^2x(1-\alpha) + an^2\beta = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = n^2y(1-\alpha) = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = -n^2\alpha z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. , \quad (3.29)$$

avec

$$U(x, y, z) = -n^2a^2 \left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right) - \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1} - \frac{GM\mu}{r_2} - \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) \quad . \quad (3.30)$$

On reconnaît dans U la somme des potentiels gravitationnels et centrifuge.

3.3.3 Constante de Jacobi

Le potentiel U n'est pas un vrai potentiel, car les équations (3.29) contiennent des termes de Coriolis dans le membre de gauche. On peut néanmoins en déduire une constante du mouvement. En combinant les trois équations (3.29), il vient

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} + \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) \right) \quad . \quad (3.31)$$

On en déduit que la quantité

$$C = \frac{1}{2}v^2 + U \quad , \quad (3.32)$$

où v est la vitesse dans le référentiel tournant, est une constante du mouvement. Cette intégrale première porte le nom de *Constante de Jacobi*, et représente en quelque sorte une énergie mécanique en axes tournants. Pour que le problème soit intégrable, il en faudrait une autre. Mais ce n'est pas le cas.

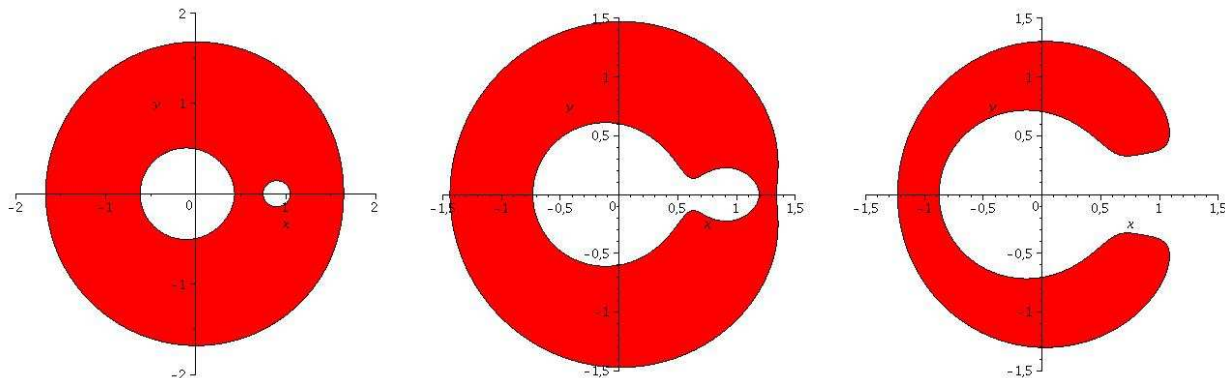


FIGURE 3.3: Régions de mouvement autorisé (en blanc) dans le plan XOY pour plusieurs valeurs de la constante de Jacobi C , croissantes de gauche à droite.

La constante de Jacobi peut être utilisée pour définir des régions de mouvement. On doit en effet avoir $v^2 \geq 0$ en toute circonstance. Comme C est une constante du mouvement, ceci n'est possible que là où $U \leq C$. Ceci permet de définir des régions autorisées et interdites au mouvement. Ceci est illustré sur la figure 3.3. Pour une valeur donnée de μ , on représente dans le repère tournant les zones de mouvement autorisées (en blanc) et interdites (en rouge), pour plusieurs valeurs de C , croissantes de la gauche vers la droite. Pour de petites valeurs de C on voit trois régions autorisées disjointes, l'une autour de l'étoile, l'une autour de la planète, et la troisième à plus grande distance autour de l'ensemble. Cela signifie que dans ces conditions, l'astéroïde est soit en orbite autour de l'étoile, soit en orbite autour de la planète, soit en orbite circumbinaire à plus grande distance. Les orbites en question ne sont a priori pas Képlériennes, car les perturbations de l'autre corps massif se feront toujours sentir. Néanmoins, on montre ici que l'astéroïde ne peut pas passer d'un régime à l'autre. S'il est par exemple en orbite autour de la planète (un satellite), il va y rester sans jamais passer autour de l'étoile.

Pour des valeurs plus grandes de C , les deux zones autour des deux primaires se rejoignent. Ceci signifie que l'astéroïde a maintenant la possibilité de passer de l'étoile à la planète et vice-versa. Pour des valeurs plus grandes, la zone centrale s'ouvre vers l'extérieur, montrant que l'astéroïde a désormais la possibilité de s'échapper du système.

3.3.4 Points de Lagrange

On est en droit de se demander s'il existe des points d'équilibre dans le système d'axes tournants. En un tel point, l'astéroïde resterait fixe par rapport aux deux primaires, l'ensemble tournant à la vitesse angulaire n . Pour cela, reprenons le système (3.29). En un point d'équilibre, le membre de gauche des équations doit être identiquement nul. Regardons ce que cela implique sur les membres de droite. Prenons la troisième équation (celle en z). Dans la mesure où la quantité α ne peut être nulle (somme de deux termes positifs), nécessairement on doit avoir $z = 0$. Par conséquent, les éventuels points d'équilibre doivent se situer dans le plan horizontal

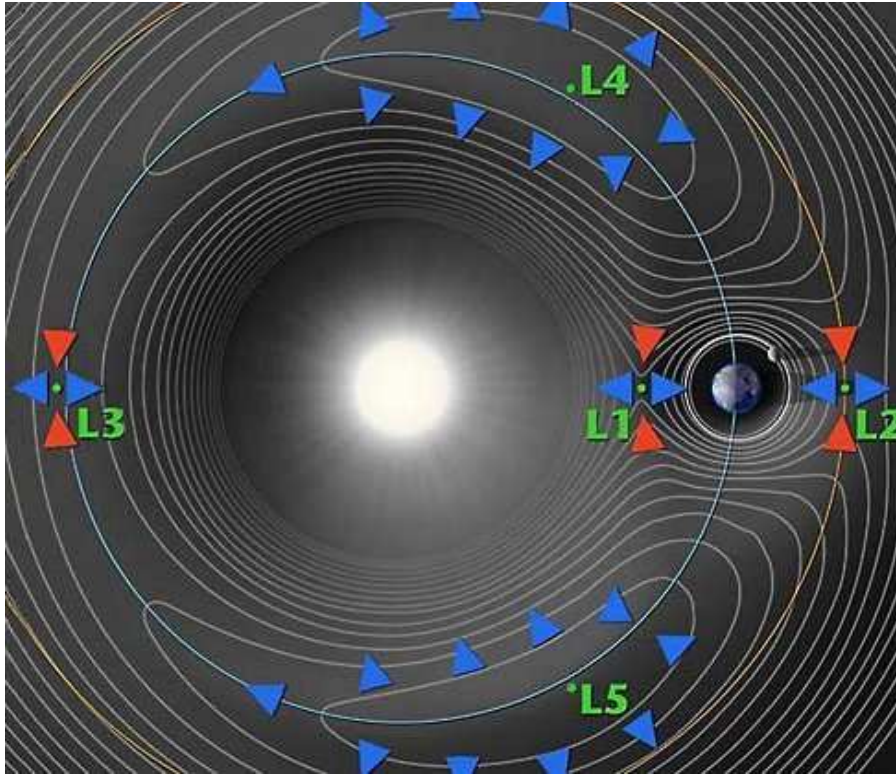


FIGURE 3.4: Les 5 points de Lagrange (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) dans le plan orbital de l'étoile et de la planète. Les courbes sont des equipotentiels du potentiel U .

XOY . Prenons maintenant la deuxième équation en y . Pour annuler le membre de droite, il faut nécessairement $y = 0$ ou $\alpha = 1$. Examinons les deux possibilités :

1. $y = 0$. Dans ces conditions les quantités α et β sont fonction de x seulement. En reportant dans la première équation en x , il vient $x(1 - \alpha) + a\beta = 0$. Ceci constitue une équation en x dont la résolution fournit des points d'équilibre. On trouve 3 solutions L_1, L_2 et L_3 (Fig. 3.4). Le point L_1 est situé entre les deux primaires, plus proche de la planète. Le point L_2 est situé derrière la planète. Le point L_3 est situé de l'autre côté de l'étoile par rapport à la planète.
2. $\alpha = 1$. Dans ce cas, en reportant dans la première équation en x , on a nécessairement $\beta = 0$. Compte tenu de la définition de β , ceci impose $\rho_1 = \rho_2$. Comme $\alpha = 1$, on a même $\rho_1 = \rho_2 = 1$, c'est-à-dire $r_1 = r_2 = a$. Le point recherché forme donc un triangle équilatéral avec les deux primaires. Il y a deux possibilités. Le point L_4 est situé à 60° en avant de la planète et le point L_5 à 60° en arrière.

Les 5 points d'équilibre trouvés portent le nom de *points de Lagrange*. Ils sont représentés sur la figure 3.4.

L'interprétation intuitive de ces points n'est pas immédiate. On comprend assez bien l'existence de L_1 , point d'équilibre des forces gravitationnelles entre les deux primaires. Les autres sont moins intuitifs. C'est oublier que nous sommes dans un référentiel tournant, et que dans ce référentiel, aux forces gravitationnelles dues aux deux primaires viennent s'ajouter la force centrifuge et la force de Coriolis. En L_2 , la force centrifuge compense à elle toute seule des deux forces gravitationnelles de deux primaires. Il en va de même en L_3 . En L_4 et L_5 , les trois forces se compensent sur un triangle.

La stabilité de ces points d'équilibre est une question plus délicate. Pour déterminer s'ils sont stables, on procède par analyse de petits mouvements. Soit un des points de Lagrange de coordonnées (x_0, y_0) . On considère que l'astéroïde se situe au voisinage de ce point en $(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$, avec $\xi \ll a$ et $\eta \ll a$. On écrit ensuite le système différentiel en (ξ, η) qu'on linéarise

en tenant compte du fait que ξ , η et ses dérivées sont des quantités petites. On rassemble les quantités $(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta})$ dans un grand vecteur X , de telle sorte que le système linéarisé s'écrive sous la forme $dX/dt = AX$, où A est une matrice fixe à coefficients constants.

La suite de l'analyse passe alors par la diagonalisation de la matrice A , donc la détermination de ses valeurs propres. Rappelons que pour une matrice à coefficients réels, les valeurs propres sont soit réelles, soit complexes conjuguées. Pour que le point soit stable, il faut que les valeurs propres soient complexes conjuguées ou réelles négatives. Une valeur propre positive induit nécessairement une solution exponentielle divergente.

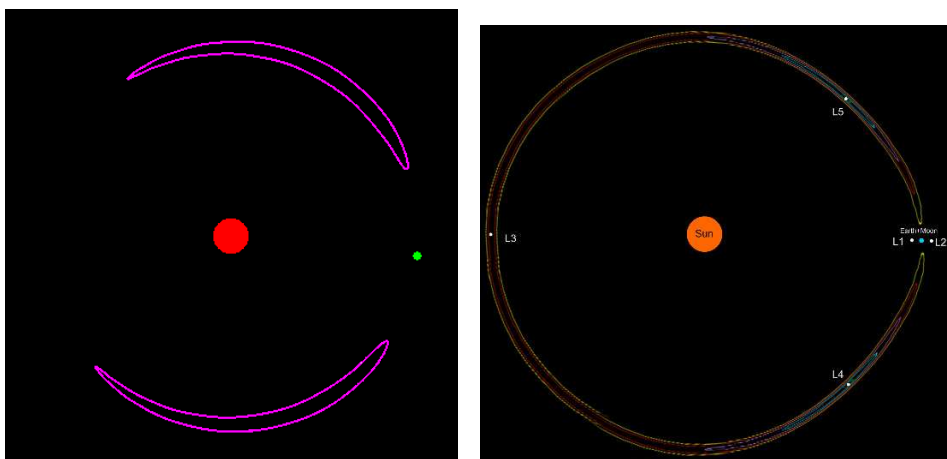


FIGURE 3.5:
Exemples d'orbites
de type tadpole et
horseshoe.

On trouve par ce procédé que les points L_1 , L_2 et L_3 sont toujours instables. On trouve en revanche que L_4 et L_5 peuvent être stables uniquement si

$$\mu < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.03852 \quad . \quad (3.33)$$

Dans ce cas, l'astéroïde effectue des oscillations autour du point considéré appelées *librations*. Un certain nombre de remarques s'imposent :

- Les points de Lagrange correspondent nécessairement à des points singuliers du potentiel U . On peut également se rendre compte que les points L_4 et L_5 sont des *maxima* de U . Ceci peut sembler paradoxal, car les points stables correspondent habituellement à des minima de potentiel. En fait ici, nous ne sommes pas en présence d'un vrai potentiel à cause des termes de Coriolis dans le système (3.29). C'est la force de Coriolis qui assure la stabilité des points L_4 et L_5 .
- Il peut également paraître surprenant de constater que la planète ne doit pas être *trop massive* si on veut que les points L_4 et L_5 soient stables. Typiquement il n'y aura aucun point de Lagrange stable dans un système binaire.
- Lorsque L_4 et L_5 sont stables, des petits corps peuvent rester autour de ces points. C'est typiquement le cas du système Jupiter–Soleil. Il existe une concentration d'astéroïdes à 60° en avant et en arrière de Jupiter. Ces objets sont appelés *troyens*, car on leur a donné les noms des héros de la guerre de Troie. Par extension, on a tendance à appeler *troyen* d'une planète tout corps bloqué en libration de faible amplitude autour des points L_4 ou L_5 de la planète. Il existe d'autres exemples moins nombreux avec d'autres planètes du Système Solaire. Il ne faut cependant pas oublier que nous raisonnons ici dans le référentiel tournant. Dans le référentiel fixe, un troyen avancera à 60° en avant ou en arrière presque sur la même orbite que la planète et à la même vitesse en moyenne.
- La libration peut être importante. Dans ce cas, on parle d'orbite *tadpole* (têtard). Si la libration va jusqu'au point L_3 , les deux îlots de libration autour de L_4 et L_5 fusionnent

et l'astéroïde effectue des librations autour des deux points ensemble (Fig.3.5). On parle alors d'orbite *horseshoe* (fer à cheval). Dans cette configuration, l'astéroïde, tout en suivant la planète sur son orbite, partant d'un côté de la planète, effectue tout un tour de l'orbite pour réapparaître de l'autre côté et repartir après dans l'autre sens.

- Les points L_1 , L_2 et L_3 sont toujours instables. Dans le cas du système Terre–Soleil, L_1 et L_2 (en fait surtout L_2) sont fortement utilisés depuis quelques années pour y placer des satellites d'observation. Ceci peut paraître paradoxal. En fait les satellites en question sont aisément *entretenus* sur des petites orbites verticales autour de L_2 au moyen de propulseurs. Une fois la mission d'un satellite terminée, il suffit de cesser d'entretenir l'orbite et le satellite quitte la zone.

3.3.5 La sphère de Hill

On se place dans un cas planétaire où la « planète » est réellement une planète, c'est-à-dire un objet nettement moins massif que l'étoile. Concrètement, cela signifiera pour nous $\mu \ll 1$. Intuitivement, on devinera que dans ce cas, les points L_1 et L_2 sont relativement proches de la planète (Fig. 3.4). Ces points délimitent en quelque sorte une « zone d'influence » de la planète, à l'intérieur de laquelle il est possible pour un satellite d'être en orbite autour de la planète. Cette zone d'influence est encore appelée *sphère de Hill*.

Reprenons le calcul des points de Lagrange. Pour les points L_1 et L_2 , l'équation en x déterminant leur position est

$$x(1 - \alpha) + a\beta = 0 \quad . \quad (3.34)$$

La planète est quant à elle en $x_p = a(1 - \mu)$. Considérons le point L_1 , et posons

$$s = \frac{a(1 - \mu) - x}{a} \quad . \quad (3.35)$$

s est une quantité sans dimension et as représente la distance entre la planète et le point cherché. Avec ces définitions, on tire aisément $\rho_1 = 1 - s$ et $\rho_2 = s$, de telle sorte que l'équation donnant le point L_1 se réécrit

$$1 - \mu - s - \frac{1 - \mu}{(1 - s)^2} + \frac{\mu}{s} = 0 \quad (3.36)$$

La solution de cette équation en s fournit la position du point L_1 . Le seul problème est qu'il s'agit d'une équation algébrique du 5^{ème} degré qui n'a pas de solution analytique. Nous avons supposé $\mu \ll 1$, c'est-à-dire $1 - \mu \simeq 1$. L'équation se simplifie en

$$1 - s - \frac{1}{(1 - s)^2} + \frac{\mu}{s} = 0 \quad . \quad (3.37)$$

De même, nous aurons nécessairement $s \ll 1$ (le point L_1 est proche de la planète). Nous pouvons donc utiliser l'approximation $1/(1 - s)^2 \simeq 1 + 2s$. Une fois ceci écrit, l'équation se résout. Il vient

$$s \simeq \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \quad . \quad (3.38)$$

On peut prouver plus rigoureusement que cette forme constitue la forme asymptotique de la racine pour $\mu \rightarrow 0$. La distance L_1 –planète porte le nom de *rayon de Hill* (R_H). On trouve

$$R_H \simeq a \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \simeq a \left(\frac{m_p}{3m_*}\right)^{1/3} \quad . \quad (3.39)$$

C'est sous cette forme qu'on présente habituellement le rayon de Hill. On peut faire le même calcul pour L_2 , en posant cette fois

$$s = \frac{x - a(1 - \mu)}{a} . \quad (3.40)$$

On trouve exactement la même forme asymptotique au premier ordre pour s , et donc pour la distance planète- L_2 . Ces deux points délimitent donc bien au premier ordre une sphère dite de Hill. Son rayon donne l'ordre de grandeur de la plus grande orbite possible pour un satellite autour de la planète. A plus grande distance, l'étoile empêche le satellite de rester stable autour de la planète. Nous pouvons donner quelques exemples d'application :

Système Soleil-Jupiter ($a = 9.6$ AU, $m_p/m_* = 1/1047$) : $R_H = 0.65$ AU ; demi-grand axe du satellite le plus extérieur de Jupiter = 3×10^7 km = 0.2 AU ;

Système Soleil-Terre ($a = 1$ AU, $m_p/m_* = 1/333000$) : $R_H = 0.01$ AU ; distance Terre-Lune = 384000 km = 0.0026 AU ;

Système Terre-Lune ($a = 384000$ km, $m_p/m_* = 1/81$) : $R_H = 61500$ km.

On voit que dans les cas réels, la distance des satellites des planètes est significativement en-dessous du rayon théorique de Hill.

3.3.6 Extension au cas du problème elliptique

La difficulté avec les cas concrets d'application exposés ci-dessus (Soleil-Jupiter, etc) est que dans tous les cas, l'orbite des deux primaires n'est pas circulaire. En toute rigueur, la théorie présentée ci-dessus vaut pour le problème restreint circulaire. Le cas où les deux primaires ont une orbite elliptique est nécessairement plus complexe. Il est possible de dégager des équations du mouvement similaires au système (3.29). Reprenons tout d'abord ce système, et commençons par simplifier les équations en changeant l'unité de temps. Concrètement, si ν désigne l'anomalie vraie dans l'orbite des deux primaires, on va dériver par rapport à ν au lieu du temps. Comme ν est ici proportionnelle au temps (orbite circulaire ; $\nu = M = n(t - t_p)$), on aura pour toute quantité X

$$\frac{dX}{dt} = n \frac{dX}{d\nu} . \quad (3.41)$$

On choisit également de rapporter toutes les longueurs (x, y, z) au demi-grand axe fixe a . Ces quantités deviennent donc sans dimension. Dans ces conditions, le système (3.29) peut s'écrire plus simplement :

$$\begin{cases} x'' - 2y' = (1 - \alpha)x + \beta \\ y'' + 2x' = (1 - \alpha)y \\ z'' = -\alpha z \end{cases} , \quad (3.42)$$

où on a formellement noté ' et '' les dérivées $d/d\nu$ et $d^2/d\nu^2$; α et β gardent les mêmes définitions que précédemment.

Dans le cas du problème elliptique, on peut aussi se placer en référentiel tournant à la vitesse des deux primaires. Ceci impose donc que le référentiel tourne à vitesse non constante. Par ailleurs, on choisit de rapporter les longueurs non plus au demi-grand axe fixe des primaires, mais à leur distance mutuelle instantanée. On peut alors montrer (Szebehely & Giacaglia 1964)

qu'on obtient le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \frac{1}{1 + e \cos \nu} [(1 - \alpha)x + \beta] \\ y'' + 2x' = \frac{1}{1 + e \cos \nu} (1 - \alpha)y \\ z'' = \frac{1}{1 + e \cos \nu} (-\alpha - e \cos \nu) z \end{cases}, \quad (3.43)$$

où on a encore dérivé par rapport à l'anomalie vraie ν , et où e désigne l'excentricité de l'orbite des primaires. Ce système est proche du système précédent. On retrouve en particulier des points de Lagrange qui ont la particularité de pulser en même temps que l'orbite des primaires. C'est la raison pour laquelle des astéroïdes troyens existent sur l'orbite de Jupiter. Néanmoins, la stabilité de ces positions est une affaire plus complexe ici. Globalement, si e est faible, on retrouve l'essentiel des résultats précédents, en particulier la notion de sphère de Hill. Une manière conservative de calculer une distance de Hill dans le cas elliptique est tout simplement de considérer à chaque instant dans la formule (3.39) la distance réelle variable entre les deux primaires, et de prendre la plus petite possible, c'est à dire le périastre. On obtient alors l'approximation classique

$$R_H \simeq a(1 - e) \left(\frac{m_p}{3m_*} \right)^{1/3} \quad (3.44)$$

qui est valable lorsque e n'est pas trop grand.

Il faut cependant se garder de généraliser tous les résultats précédents au cas elliptique. En effet, le membre de droite du système (3.43) ne dérive pas d'un potentiel, car il dépend maintenant explicitement du temps via l'anomalie vraie ν . Il n'y a donc plus de constante de Jacobi, ce qui interdit toute considération sur les régions de mouvement. On montre cependant que si e est faible, la « constante » de Jacobi, sans être rigoureusement constante, subit des variations de faible amplitude, et c'est ce qui fait qu'une bonne partie des résultats précédents continue à s'appliquer.

Chapitre 4

Le problème Képlérien perturbé

4.1 Equations de Gauss et de Lagrange

4.1.1 Equation du mouvement et mouvement Képlérien osculateur

Le problème Képlérien perturbé est central dans l'étude de la dynamique des systèmes planétaires et des systèmes stellaires. Les mouvements des divers corps dans tous ces systèmes se résument la plupart du temps en une collection de mouvements de ce type. Ainsi, dans le Système Solaire, les planètes suivraient des orbites Képlériennes pures si elles ne subissaient d'interaction gravitationnelle que de la part du Soleil. Ce sera le cas dans un système planétaire où il n'y a qu'une seule planète. Ce serait aussi le cas s'il y avait plusieurs planètes et si leurs masses respectives étaient complètement négligeables par rapport à celle du Soleil. Cette situation correspondra par exemple à l'ensemble des satellites artificiels autour de la Terre, dont les masses sont très largement négligeables par rapport à celle de la Terre. Mais si on se penche sur le cas des planètes du Système Solaire, leur masses sont certes faibles par rapport à celle du Soleil, mais pas dans les mêmes proportions. Il en résulte que chaque planète dans le Système Solaire subit bien sûr l'attraction du Soleil, mais également celle de toutes les autres planètes. Le mouvement de la planète n'est donc pas rigoureusement Képlérien à cause de ces termes additionnels.

Bien entendu, dans la plupart des cas, l'interaction avec le Soleil est dominante. C'est la raison pour laquelle il est avantageux de continuer à utiliser la solution du problème à deux corps afin de décrire le mouvement. Dans la pratique, le mouvement sera décrit comme un mouvement Képlérien, mais dont les éléments orbitaux vont lentement se modifier. C'est précisément l'objet de la théorie des perturbations de décrire ces lentes modifications.

Dans le cas général, un mouvement Képlérien perturbé obéira à une équation du type

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{P} \quad \text{avec} \quad |\vec{P}| \ll \frac{\mu}{r^2} \quad . \quad (4.1)$$

\vec{P} est la perturbation qui peut prendre des formes diverses. Supposons le mobile à un instant t . Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, on appelle *mouvement Képlérien osculateur* l'unique orbite dans l'espace des phases qui à l'instant t correspond aux vecteurs position et vitesse du mobile. Nous avons vu qu'il est formellement équivalent de décrire un mouvement quelconque par l'évolution dans le temps de ses coordonnées de position et de vitesse ou l'évolution de son mouvement Képlérien osculateur. Physiquement, le mouvement Képlérien osculateur à l'instant t correspond à l'orbite Képlérienne pure que le mobile suivrait à partir de l'instant t si la perturbation \vec{P} disparaissait instantanément à ce moment là.

4.1.2 Equations de Gauss

Afin de pouvoir décrire le mouvement du mobile en termes d'évolution dans le temps des éléments orbitaux de son mouvement Képlérien osculateur, il est nécessaire de disposer d'équations d'évolution de ces mêmes éléments sous l'effet de la perturbation \vec{P} , sachant que si \vec{P} est nul, ils restent logiquement constants. L'approche pour déterminer ces équations diffère suivant que la perturbation \vec{P} dérive ou non d'un potentiel. Commençons par le cas le plus général où \vec{P} ne dérive pas d'un potentiel, et partons des constantes fondamentales du mouvement Képlérien que sont l'énergie h , la constante des aires \vec{C} et le vecteur de Laplace (ou excentricité) \vec{E} :

$$h = \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r} \quad ; \quad \vec{C} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{C}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \quad . \quad (4.2)$$

On calcule ensuite leur taux de variation à partir de l'équation (4.1) :

$$\frac{dh}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^2} \dot{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{P} \cdot \dot{\vec{r}} \quad ; \quad (4.3)$$

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \vec{P} \quad ; \quad (4.4)$$

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{1}{\mu} \left(\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{C} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{C}}{dt} \right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} = \frac{1}{\mu} \left(2 (\vec{P} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - (\vec{P} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{P} \right) \quad (4.5)$$

On peut à partir de là en déduire des équations de variation pour les éléments orbitaux classiques $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$. Pour cela, réintroduisons le *paramètre* de l'orbite p se calcule comme $p = C^2/\mu$. On peut donc tirer le taux de variation de p :

$$\mu \frac{dp}{dt} = 2\vec{C} \cdot \frac{d\vec{C}}{dt} = 2r^2 (\vec{P} \cdot \dot{\vec{r}}) - 2 (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{P}) \quad . \quad (4.6)$$

L'excentricité est reliée à h et p par l'équation (3.11). On en déduit

$$2e \frac{de}{dt} = \frac{2}{\mu} \left(\frac{dh}{dt} p + h \frac{dp}{dt} \right) \quad , \quad (4.7)$$

ce qui fournit le taux de variation de l'excentricité en fonction des éléments calculés précédemment. Ces équations sont valables quelle que soit la nature du mouvement, elliptique, hyperbolique ou parabolique. Lorsque le mouvement est elliptique, le demi-grand axe a vérifie $h = -\mu/(2a)$, ce qui permet de déduire les variations de a en fonctions de celles de h . Si le mouvement est hyperbolique, la relation est $h = \mu/(2a)$. On procède donc de même. On peut aussi passer par $p = a(1 - e^2)$. Il vient aisément dans le cas elliptique

$$\frac{\mu}{a^2} \frac{da}{dt} = 2\vec{P} \cdot \dot{\vec{r}} \quad . \quad (4.8)$$

Pour les éléments angulaires (i, Ω, ω) , il est nécessaire de se référer à leur définition (Fig. 3.1). Commençons par noter $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ la base orthonormée locale du mouvement : $\vec{u} = \vec{r}/r$, \vec{v} lui est

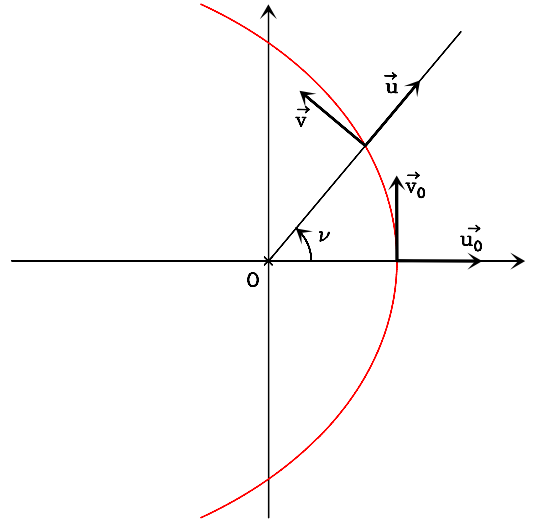


FIGURE 4.1: Définition des vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{u}_0, \vec{v}_0)

perpendiculaire dans le plan de l'orbite, et \vec{k} est perpendiculaire à l'orbite (voir Fig. 3.1). On introduit également les vecteurs (déjà introduits au chapitre précédent) \vec{u}_0 et \vec{v}_0 qui correspondent à \vec{u} et \vec{v} au périastre.

On a logiquement $\vec{C} = C\vec{k} = \sqrt{\mu p}\vec{k}$. On en déduit

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{dp}{dt}\vec{k} + \sqrt{\mu p}\frac{d\vec{k}}{dt} \quad , \quad (4.9)$$

ce qui permet d'en déduire $d\vec{k}/dt$. Le vecteur \vec{k} ayant pour composantes $(\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i)$ dans le repère fixe $OXYZ$, on en déduit les variations de i et de Ω . Enfin, le vecteur de Laplace vérifie $\vec{E} = e\vec{u}_0$. La connaissance de ses variations (voir plus haut) et de celles de e permet d'en déduire $d\vec{u}_0/dt$. \vec{u}_0 est fonction de i , Ω et ω (il définit la direction du périastre). On en tire les variations de ω . Mis bout-à-bout, on finit par arriver au système d'équations suivant qui porte le nom d'*équations de Gauss* :

$$C \frac{da}{dt} = 2a^2(\vec{P} \cdot \vec{v} + e\vec{P} \cdot \vec{v}_0) \quad ; \quad (4.10)$$

$$C \frac{de}{dt} = r(e + \cos \nu) \vec{P} \cdot \vec{v} + p\vec{P} \cdot \vec{v}_0 \quad ; \quad (4.11)$$

$$C \frac{di}{dt} = r \cos(\omega + \nu) \vec{P} \cdot \vec{k} \quad ; \quad (4.12)$$

$$C \sin i \frac{d\Omega}{dt} = r \sin(\omega + \nu) \vec{P} \cdot \vec{k} \quad ; \quad (4.13)$$

$$Ce \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = (r \sin \nu) \vec{P} \cdot \vec{v} - p\vec{P} \cdot \vec{u}_0 \quad , \quad (4.14)$$

ν désignant comme précédemment l'anomalie vraie. Les variations du temps de passage au périastre t_p sont moins aisées à obtenir. On préfère souvent écrire celles de l'anomalie moyenne M , les deux étant reliées par $M = n(t - t_p)$. Pour trouver dM/dt , on part de l'équation de Képler (3.12) qui permet de relier les variations de M à celles de e et de l'anomalie excentrique u . Les variations de u se déduisent de l'expression de r en fonction de u . Au bout de calculs assez longs, il vient

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \left[2r\vec{P} \cdot \vec{u} + C \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) \right] \quad , \quad (4.15)$$

où n est le moyen mouvement. En l'absence de perturbation, on trouve bien $dM/dt = n$. La différence est due à la variation des éléments orbitaux et au déplacement du périastre de l'orbite.

Les équations de Gauss peuvent prendre plusieurs formes. Une autre écriture classique est d'utiliser la décomposition de \vec{P} dans la base locale $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$:

$$\vec{P} = R\vec{u} + S\vec{v} + W\vec{k} \quad (R = \vec{P} \cdot \vec{u}, S = \vec{P} \cdot \vec{v}, W = \vec{P} \cdot \vec{k}) \quad . \quad (4.16)$$

Après quelques calculs, on tire

$$C \frac{da}{dt} = 2a^2 [Re \sin \nu + S(1 + e \cos \nu)] \quad ; \quad (4.17)$$

$$C \frac{de}{dt} = p [R \sin \nu + S(\cos \nu + \cos u)] \quad ; \quad (4.18)$$

$$C \frac{di}{dt} = rW \cos(\omega + \nu) \quad ; \quad (4.19)$$

$$C \sin i \frac{d\Omega}{dt} = rW \sin(\omega + \nu) \quad ; \quad (4.20)$$

$$Ce \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = -pR \cos \nu + (r+p)S \sin \nu (r \sin \nu) \quad ; \quad (4.21)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \left[2rR + C \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) \right] \quad , \quad (4.22)$$

ce qui constitue une autre forme des mêmes équations.

Les équations de Gauss sont typiquement utilisées lorsque la perturbation \vec{P} ne dérive pas d'un potentiel, par exemple pour modéliser l'effet du frottement atmosphérique sur des satellites en orbite basse autour de la Terre, ou encore les effets dynamiques du dégazage sur des comètes lors de leur passage au périhélie.

4.1.3 Equations de Lagrange

Les équations de Gauss sont en principe valables quelle que soit la forme de la perturbation \vec{P} . Lorsque celle-ci dérive d'un potentiel U ¹, on préfère largement une approche hamiltonienne. Supposons donc que nous puissions écrire $\vec{P} = -\nabla U$ pour un certain potentiel U , et partons de la description hamiltonienne du mouvement Képlérien, avec les éléments de Delaunay $(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta)$ introduits au chapitre précédent (Eqs. 3.16). Nous pouvons écrire alors le Hamiltonien total du mouvement

$$H = H_{\text{kep}} + U = -\frac{\mu^2}{2L^2} + U(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta) \quad , \quad (4.23)$$

où H_{kep} est le Hamiltonien du mouvement Képlérien, et où dans la dernière expression on a implicitement supposé que U pouvait s'exprimer en fonction des éléments de Delaunay. C'est théoriquement possible, car U n'est a priori fonction que du temps et de la position du mobile, lesquels peuvent s'exprimer en fonction des éléments de Delaunay. A supposer donc qu'on puisse faire cette opération, dans la mesure où les éléments de Delaunay sont canoniquement conjugués, on en déduit immédiatement les équations du mouvement sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{\partial U}{\partial L} & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial M} = -\frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial G} = \frac{\partial U}{\partial G} & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Theta} = \frac{\partial U}{\partial \Theta} & \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \Omega} = -\frac{\partial U}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad . \quad (4.24)$$

Il est ensuite possible de transformer ces équations en équations de variations des éléments orbitaux $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$, à supposer qu'on exprime la perturbation U en fonction de ces mêmes éléments. Mathématiquement, c'est un changement différentiel de variables. On en tire les *équations de Lagrange* :

$$\sqrt{\mu a} \frac{da}{dt} = -2a \frac{\partial U}{\partial M} \quad ; \quad (4.25)$$

$$\sqrt{\mu a} e \frac{de}{dt} = -(1-e^2) \frac{\partial U}{\partial M} + \sqrt{1-e^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \quad ; \quad (4.26)$$

$$C \sin i \frac{di}{dt} = -\cos i \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \Omega} \quad ; \quad (4.27)$$

1. et c'est assez souvent le cas!

$$C \sin i \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial i} \quad ; \quad (4.28)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \left(2a \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial U}{\partial e} \right) \quad ; \quad (4.29)$$

$$Ce \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = -(1-e^2) \frac{\partial U}{\partial e} \quad . \quad (4.30)$$

Ces équations sont de forme plus complexe que les équations (4.24) écrites en éléments de Delaunay. Ceci est dû au fait que les éléments d'orbite ne constituent pas un jeu de variables canoniquement conjuguées. Les équations de Lagrange sont néanmoins souvent utilisées telles quelles dès que la perturbation dérive d'un potentiel. Par rapport aux équations de Gauss, elles ont l'avantage d'être scalaires.

4.2 Variations séculaires : Moyennes et développements

4.2.1 Les approximations

Les équations du mouvement Képlérien perturbé, même exprimées sous forme d'équations de Gauss ou de Lagrange, ne sont la plupart du temps malheureusement pas solubles telles quelles. Tout ceci est au passage très logique, car sinon les problèmes de type N corps seraient intégrables, ce qui n'est pas le cas. Pour pouvoir dégager analytiquement des comportements, nous sommes obligés de faire des approximations. Il faut bien comprendre que faire une approximation dans un mouvement de type Képlérien perturbé sous-tend un certain nombre d'hypothèses qui doivent être validées a posteriori, et si possible confirmées par une étude numérique lorsque l'approche analytique rigoureuse n'est pas possible. Toutes sortes d'approximations peuvent être faites, en fonction de la nature du problème. De manière assez générale, on peut les classer en deux familles : les opérations des *moyennisation* et celles de *développement asymptotique*.

La justification de ces approximations repose en général sur deux hypothèses de base. Premièrement, la perturbation \vec{P} est supposée petite par rapport au terme Képlérien principal. C'est bien entendu le cadre de base de tout mouvement Képlérien perturbé. Mais l'hypothèse suppose également que cette propriété *restera* vérifiée tout le temps de l'étude. Il s'agit là d'une supposition gratuite pas nécessairement évidente et dont il convient de vérifier la validité après l'étude. Prenons l'exemple de la Terre dans le Système Solaire perturbée par Jupiter. On peut raisonnablement supposer que la perturbation qu'elle ressent de la part de Jupiter est petite par rapport à l'attraction du Soleil, et c'est bien le cas. Dans la mesure où la Terre reste à peu près à sa place dans le Système Solaire et Jupiter aussi, l'hypothèse consiste à dire que cette affirmation restera vérifiée tout le temps. Nous verrons plus loin que dans ce cas, le cadre théorique du théorème KAM permet de le dire.

Prenons maintenant l'exemple d'une sonde automatique d'exploration type *Voyager* ou *New Horizons*. Une fois envoyés, ces engins sont la plupart du temps dans la même situation que la Terre vis-à-vis de Jupiter ou des autres planètes, c'est-à-dire faiblement perturbés dans leur mouvement orbital autour du Soleil. Sauf que ledit mouvement orbital a été justement calculé pour qu'il les amène à un moment donné proche de ces planètes. A ce moment là, la perturbation \vec{P} due à la planète ne peut plus être considérée comme petite par rapport au terme solaire, et toutes les approximations qui vont suivre tombent. Ce cas particulier porte le nom de *rencontre proche*. D'autres corps naturels comme des comètes peuvent subir occasionnellement ce type de rencontre.

La deuxième hypothèse sous-jacente à la première est que les variations non Képlériennes dues à la perturbation \vec{P} interviennent sur un temps caractéristique long. Par long, on entend significativement plus long que la période orbitale du mouvement Képlérien principal. Cette hypothèse est directement liée à la première, vu que les variations des éléments orbitaux sont proportionnelles à la perturbation supposée petite. Il faut quand même faire attention au fait que même quand la perturbation est petite, certains éléments orbitaux peuvent parfois varier vite. Ce sera par exemple le cas de l'argument du périastre ω si l'excentricité s'approche de zéro.

4.2.2 Moyennisation

L'échelle de temps sur laquelle on veut étudier l'effet de la perturbation est longue, mais la perturbation elle-même peut varier sur une échelle de temps beaucoup plus courte. En effet, prenons par exemple la perturbation d'une planète sur une autre. Elle dépendra naturellement de leur position relative, laquelle varie sur l'échelle de temps des périodes orbitales des planètes en question. On va alors remplacer la perturbation par sa *moyenne* sur la ou les orbites Képlériennes concernées. Considérons le potentiel U de la perturbation écrit en fonction des éléments de Delaunay $U(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta)$. Parmi toutes ces variables, seule l'anomalie moyenne M est variable sur une courte échelle de temps. Tous les autres éléments vont varier sur une échelle de temps beaucoup plus longue. On développe alors U en série de Fourier de M :

$$U(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta) = U_0(\omega, \Omega, L, G, \Theta) + \sum_{k=1}^{+\infty} [U_{k,c}(\omega, \Omega, L, G, \Theta) \cos(kM) + U_{k,s}(\omega, \Omega, L, G, \Theta) \sin(kM)] \quad . \quad (4.31)$$

Le terme U_0 représente la moyenne de U sur l'orbite Képlérienne, soit

$$U_0 = \bar{U} = \frac{1}{P} \int_0^P U(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(M) dM \quad . \quad (4.32)$$

Dans cette expression, la moyenne est calculée en laissant les éléments autres que M constants dans l'intégrale, partant du principe que ceux-ci varient beaucoup plus lentement. Remplacer U par \bar{U} pour la suite de l'étude revient à faire l'hypothèse que l'effet des termes qui suivent dans la somme (4.31) est nul sur le long terme. En fait, la solution du mouvement peut aussi se développer de manière formelle en série de Fourier. Les termes variant rapidement sont de faible amplitude et ont une moyenne temporelle nulle. Donc sur le long terme, seul l'effet de \bar{U} compte. On peut donc remplacer U par sa moyenne temporelle. \bar{U} est appelé terme *séculaire*.

Cette approximation sous-entend en fait une hypothèse de type *ergodique*, à savoir que l'effet moyen de U sur le long terme est identique à celui de sa moyenne spatiale sur l'orbite. D'un point de vue hamiltonien, remplacer U par \bar{U} dans l'étude du mouvement revient à substituer une solution à une autre. Dit autrement, sous l'effet de U sans approximation, on obtient une certaine solution temporelle pour les éléments orbitaux ; sous l'effet de \bar{U} , on en obtient une autre. Conceptuellement, le passage d'une solution à l'autre peut-être vue comme une transformation canonique qui fait passer des éléments réels avec des fluctuations rapides de faible amplitude à des éléments moyennés sans ces même fluctuations. Le cadre formel décrivant ce type de transformation canonique s'appelle théorie de Von Zeipel.

Nous avons décrit ici le cas d'une perturbation moyennée sur la seule anomalie moyenne de l'orbite. Dans des situations plus réelles, une perturbation dépendra de la position de plusieurs

planètes². Dans ce cas, on moyenne sur toutes les variables de ce type :

$$U \quad \Longrightarrow \quad \bar{U} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} U(M_1, \dots, M_p) dM_1 \dots dM_p \quad . \quad (4.33)$$

Plus généralement, une perturbation U pourra dépendre d'un certain nombre de *variables rapides* (ici les anomalies vraies) et de *variables lentes* (ici, les autres éléments de Delaunay). Le processus de moyennisation revient essentiellement à moyenniser sur l'ensemble des variables rapides. Là aussi, on peut formaliser ce processus dans le cadre d'une transformation canonique de Von Zeipel.

Il y a toutefois une difficulté supplémentaire lorsqu'il s'agit de moyenner sur plus d'une variable rapide. Il faut absolument s'assurer que toutes ces variables sont *indépendantes* les unes des autres pour garantir l'ergodicité. En effet, les variables rapides sur lesquelles on moyenne sont presque toujours des angles susceptibles de tourner rapidement. C'est bien entendu typiquement le cas avec des anomalies moyennes. En effectuant une moyenne de type (4.33) indépendamment sur l'ensemble des variables concernées, on moyenne sur toutes les configurations spatiales possibles des variables M_1, \dots, M_p dans tout $[0, 2\pi]^p$. Pour que cette moyenne représente une approximation correcte de la perturbation sur le long terme, il faut s'assurer au préalable que toutes ces configurations sont équiprobables sur le même terme. Ce sera assurément le cas si les variables M_1, \dots, M_p sont indépendantes les unes des autres et *sans rapport rationnel simple*. Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas. Nous verrons plus loin qu'il existe dans les systèmes planétaires de nombreuses situations de *résonances* où deux ou plusieurs planètes qui se perturbent mutuellement ont des périodes orbitales présentant des rapports rationnels très simples. Dans ce cas, les anomalies moyennes M_i correspondantes ne sont pas indépendantes les unes des autres. Prenons un exemple simple, où deux planètes ont un rapport de 1 à 2 dans leur périodes orbitales, la planète 1 ayant une période exactement égale à la moitié de celle de la deuxième située plus à l'extérieur. La planète 1 tournant donc en moyenne deux fois plus vite que planète 2, les anomalies moyennes correspondantes seront reliées par une relation de type

$$M_1 - 2M_2 = \text{cte} \quad . \quad (4.34)$$

Dans une situation réelle, cette égalité n'est vérifiée qu'approximativement et en moyenne, car les planètes se perturbent mutuellement et les orbites évoluent. Nous verrons cela en détail plus loin. Quoi qu'il en soit, avec cette relation liant M_1 et M_2 , toutes leurs configurations mutuelles dans $[0, 2\pi]^2$ ne sont pas équiprobables. Si on trace un diagramme plan³ (M_1, M_2) dans $[0, 2\pi]^2$, une relation de type (4.34) confine les deux variables sur une *courbe de Lissajous* fermée. En situation réelle, comme la relation (4.34) n'est vérifiée qu'approximativement et en moyenne, les deux variables seront confinées non pas exactement sur la courbe, mais dans une petite bande l'entourant. Quoi qu'il en soit, le résultat reste le même. En effet, pour que toutes les configurations de (M_1, M_2) soient équiprobables sur le long terme, il faudrait que la courbe les reliant finisse par envahir tout le carré $[0, 2\pi]^2$. Dans la mesure où la courbe de Lissajous se referme sur elle-même, ce ne sera pas le cas. A l'inverse si les dérivées temporelles de M_1 et M_2 ⁴ ne sont pas reliées par un rapport rationnel, dans ce cas la courbe de Lissajous ne se referme pas et finit par parcourir tout le carré $[0, 2\pi]^2$. Dans ce cas, l'hypothèse ergodique est vérifiée, et la moyennisation indépendante sur M_1 et M_2 est licite. Dans la situation inverse, ce n'est pas possible. Nous verrons plus loin comment procéder dans ce cas.

2. comme par exemple la perturbation d'une planète sur une autre

3. M_1 en abscisse et M_2 en ordonnée par exemple...

4. c'est-à-dire les moyens mouvements n_1 et n_2

4.2.3 Développements

En général, moyenner ne suffit pas pour mener une étude analytique des perturbations. La perturbation est en effet la plupart du temps une fonction non linéaire faisant intervenir typiquement l'inverse d'une distance entre deux planètes. Moyenner directement ce type de fonction sur les mouvements orbitaux est souvent impossible analytiquement⁵. On procède donc au préalable à des développements asymptotiques de la perturbation avant de moyenner chaque terme.

Un développement asymptotique sera toujours tronqué (ce sera un développement limité) à un certain ordre afin de pouvoir procéder ultérieurement à la moyennisation. Il convient toutefois de s'assurer que cette opération est licite, et ne conduit pas à de trop grosses approximations. En général, un développement se fait sur la base d'un ou plusieurs paramètres supposés petits, et également supposés le rester sur le long terme. Là encore, il s'agit d'une hypothèse d'étude dont il convient de vérifier la validité a posteriori, en s'étant assuré au préalable que le développement est convergent.

De manière générale, les hypothèses liées à la troncation des développements asymptotique sont beaucoup plus restrictives que celles liées au processus de moyennisation. En dehors des situations de rencontres proches et de résonances évoquées plus haut et qui nécessitent un traitement particulier, l'erreur que l'on commet en procédant à la moyennisation d'une perturbation est minime. On ne fait qu'éliminer des fluctuations à courte période et de faible amplitude sans altérer le comportement moyen à long terme. En revanche, en tronquant un développement asymptotique à un ordre donné, on supprime le rôle additionnel des termes d'ordre supérieur certes petits mais dont l'effet cumulatif à très long terme peut être non négligeable. Il faut donc bien garder cela à l'esprit avant de procéder à ce type d'opération.

Les termes de perturbation à développer sont presque toujours des termes de potentiel entre deux corps qui se perturbent. Il y a essentiellement deux types de développement en fonction des situations rencontrées, les développements en *polynômes de Legendre*, et les développements en *coefficients de Laplace*.

Développement en polynômes de Legendre

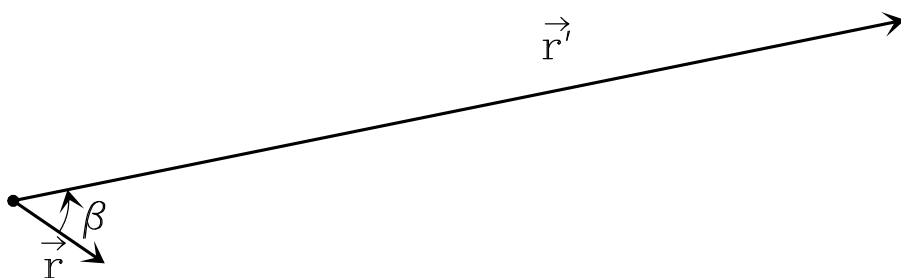


FIGURE 4.2: Situation de deux orbites de taille très différentes se perturbant.

Ce type de développement est utilisé lorsqu'on a affaire à des orbites de tailles très différentes. Ce sera typiquement le cas dans des systèmes stellaires hiérarchiques, mais on peut aussi les utiliser dans des situations planétaires entre des planètes pourvu qu'elles ne soient pas trop proches. Ce type développement repose sur la propriété mathématique suivante. Pour tout réel $x < 1$ et tout réel β , on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\beta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\beta)x^n, \quad (4.35)$$

5. mais numériquement si ! C'est l'objet des études dites semi-analytiques

où les $(P_n)_{n \geq 0}$ sont les *polynômes de Legendre* déjà introduits au chapitre 1. Le développement est convergent dès que $x < 1$, et pour x suffisamment petit il l'est rapidement, ce qui autorise à tronquer à un ordre assez bas. Cette propriété signifie que la fonction développée ici est la *fonction génératrice* des polynômes de Legendre. Elle peut se démontrer par récurrence.

Considérons maintenant deux orbites qui se perturbent mutuellement, repérées par leurs rayons vecteurs \vec{r} et \vec{r}' , et appelons β l'angle entre ces deux vecteurs (Fig. 4.2). Faisons en outre l'hypothèse que ces deux orbites sont de tailles très différentes, avec $r \ll r'$, comme représenté sur figure 4.2. Le terme de potentiel perturbatif entre ces deux orbites peut prendre des formes diverses, mais au bout du compte il restera toujours inversement proportionnel à la distance entre les deux corps, c'est à dire $|\vec{r} - \vec{r}'|$. Nous écrivons donc

$$U(\vec{r}, \vec{r}') \propto \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \beta}} \quad . \quad (4.36)$$

Utilisons maintenant l'hypothèse $r \ll r'$. On introduit le paramètre $x = r/r'$. L'hypothèse se traduit par $x \ll 1$. Le développement se fait alors en puissances de x . Il vient

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \beta}} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos \beta) x^n \quad . \quad (4.37)$$

Comme $x \ll 1$, on peut alors tronquer le développement à un ordre assez bas et procéder ensuite à une moyennisation. Traditionnellement, on qualifie de *quadrupolaire* un développement tronqué à l'ordre 2 et d'*octupolaire* un développement tronqué à l'ordre 3. On trouve parfois le terme *hexapolaire* pour un développement à l'ordre 4. Remarquons qu'en vertu de ce qui a été dit au chapitre 1, chacun des termes du développement précédent vu comme fonction de r' ou de r est harmonique (réintroduire la définition de x), ce qui est en accord avec les propriétés du potentiel.

Ces développements ont pour avantage de ne faire aucune hypothèse quant aux excentricités et inclinaisons des orbites concernées et permettent par conséquent l'analyse de phénomènes non linéaires comme par exemple la résonance de Kozai que nous verrons plus loin. Ils conduisent parfois à des calculs lourds mais toujours tractables. En revanche, il convient de toujours vérifier que le paramètre x qui sert au développement reste suffisamment petit afin que la troncation reste valable. C'est la principale limitation inhérente à cette technique.

Développement en coefficients de Laplace

Lorsque le paramètre x introduit plus haut est trop proche de 1, le développement en polynômes de Legendre ne converge pas assez rapidement pour autoriser la troncation à un ordre suffisamment bas. Ce sera typiquement le cas dans un système planétaire où x peut atteindre des valeurs voisines de 0.8. Avec une valeur aussi élevée, le développement (4.35) tronqué à l'ordre 60 atteint une précision relative de l'ordre de quelques 10^{-5} , ce qui est tout juste acceptable pour un traitement précis. Il n'est pas pensable de développer en polynômes de Legendre à un ordre aussi élevé.

Dans ce cas, on se tourne plutôt vers un développement en série de Fourier. Vue comme fonction de β (et non plus de x), l'inverse de la distance $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ est clairement une fonction 2π -périodique. Elle admet donc un développement en série de Fourier. En gardant les mêmes notations, et en supposant toujours $x < 1$ ⁶, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \beta}} = \frac{1}{2r'} b_{1/2}^{(0)}(x) + \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{+\infty} b_{1/2}^{(n)}(x) \cos(n\beta) \quad . \quad (4.38)$$

6. Si ce n'est pas le cas, on échange le rôle des deux orbites.

Dans cette expression les $b_{1/2}^{(n)}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $\beta \rightarrow 1/\sqrt{1+x^2-2x\cos\beta}$ et portent le nom de *coefficients de Laplace*. Notons que dans ce développement il n'apparaît aucun terme en $\sin(n\beta)$. Ceci est dû à la parité de la fonction développée. De manière générale, on définit les $b_s^{(n)}$ comme les coefficients de Fourier de la fonction $\beta \rightarrow 1/(1+x^2-2x\cos\beta)^s$, soit

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{2s}} = \frac{1}{r'} \frac{1}{(1+x^2-2x\cos\beta)^s} = \frac{1}{2r'} b_s^{(0)}(x) + \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{+\infty} b_s^{(n)}(x) \cos(n\beta) \quad . \quad (4.39)$$

Dans les applications, on trouve souvent ces coefficients avec $s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$. En tant que coefficients de Fourier, les coefficients de Laplace ont une définition intégrale. En utilisant la parité de la fonction, il vient

$$b_s^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) d\theta}{(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^s} \quad . \quad (4.40)$$

La technique consiste ensuite à tronquer le développement (4.38) à un certain ordre et à moyenniser ensuite. La difficulté est de savoir dans quelle mesure il est possible de tronquer sans affecter le résultat. On peut prouver que $b_{1/2}^{(n)} \propto x^2$ pour $x \rightarrow 0$ et que $b_{1/2}^{(n)} \propto \ln(1-x)$ pour $x \rightarrow 1$. Par conséquent pour x petit les coefficients de Laplace ne valent pas mieux que les coefficients du développement en polynômes de Legendre, et ils divergent logarithmiquement au voisinage de $x = 1$. Le gain du développement (4.38) apparaît avec la moyennisation. En effet, supposons que les deux orbites étudiées soient coplanaires et toutes deux circulaires. Dans ce cas, l'angle β correspondra tout simplement à la différence d'anomalie vraie $\nu' - \nu$ entre les deux orbites (à cause du caractère coplaire), et sera proportionnel au temps (à cause des excentricités nulles). Si β est proportionnel au temps, la moyenne temporelle de tous les termes $\cos(n\beta)$ sera identiquement nulle, ce qui fait que le développement (4.38) se réduit au premier terme. De manière générale, si les excentricités et les inclinaisons des deux orbites sont faibles, les termes du développement (4.38) *après moyennisation* sont rapidement décroissants, ce qui autorise une troncation à un ordre bas, même pour x proche de 1. Dans la pratique, ces termes une fois simplifiés apparaissent comme des polynômes de puissances croissantes des excentricités et des inclinaisons, ou de manière équivalente et plus rigoureuse des éléments de Poincaré (q'_2, p'_2, q'_3, p'_3) correspondants.

Aspect technique : Coefficients de Hansen

On considère un mouvement Képlérien elliptique avec des éléments d'orbite $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$. Pour n et m entiers, on écrit le développement en série de Fourier de la quantité périodique $(r/a)^n \times \exp(im\nu)$ en tant que fonction de l'anomalie moyenne M :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(im\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m}(e) \exp(ikM) \quad (4.41)$$

Les coefficients de Fourier qui apparaissent ici, notés $X_k^{n,m}(e)$ sont appelés *coefficients de Hansen*. Ce sont des fonctions de l'excentricité uniquement et peuvent se calculer individuellement et sont tabulés. Ils correspondent à la moyenne temporelle des quantités $(r/a)^n \times \exp(im\nu) \times \exp(-ikM)$:

$$X_k^{(n,m)}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(im\nu) \exp(-ikM) dM \quad . \quad (4.42)$$

Ces coefficients apparaissent assez naturellement lorsqu'on cherche à moyenner des expressions développées dans le cadre des théories exposés ci-dessus. On a même le plus souvent affaire au cas $k = 0$ pour lequel une expression générale existe à partir de la fonction hypergéométrique.

Pour calculer explicitement les coefficients de Hansen, on est amené à changer de variable, c'est à dire passer à l'anomalie vraie ν ou l'anomalie excentrique u . Pour cela, on utilise l'équation de Képler et la deuxième loi de Képler qui conduisent à

$$M = u - e \sin u \implies n dt = (1 - e \cos u) du \quad ; \quad (4.43)$$

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = C = na^2 \sqrt{1 - e^2} \implies n dt = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \nu)^2} \quad . \quad (4.44)$$

Pour les coefficients d'ordre zéro, cela donne

$$\begin{aligned} X_0^{n,m}(e) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(im\nu), dM = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(im\nu)}{(1 + e \cos \nu)^{n+2}} d\nu \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u)^n (\cos u - e + i\sqrt{1 - e^2} \sin u) du \quad . \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.3 Justification théorique : théorème KAM

Faire des approximations et des développements revient à simplifier le problème Képlérien perturbé pour le rendre intégrable. En fait un problème Képlérien perturbé est par nature proche d'un système intégrable. La question théorique est de savoir à quelles conditions la solution du problème réel va rester proche de celle du problème intégrable voisin. Le théorème KAM est un résultat théorique qui fournit une justification et un cadre d'applications aux approximations.

4.3.1 Systèmes intégrables et tores multidimensionnels

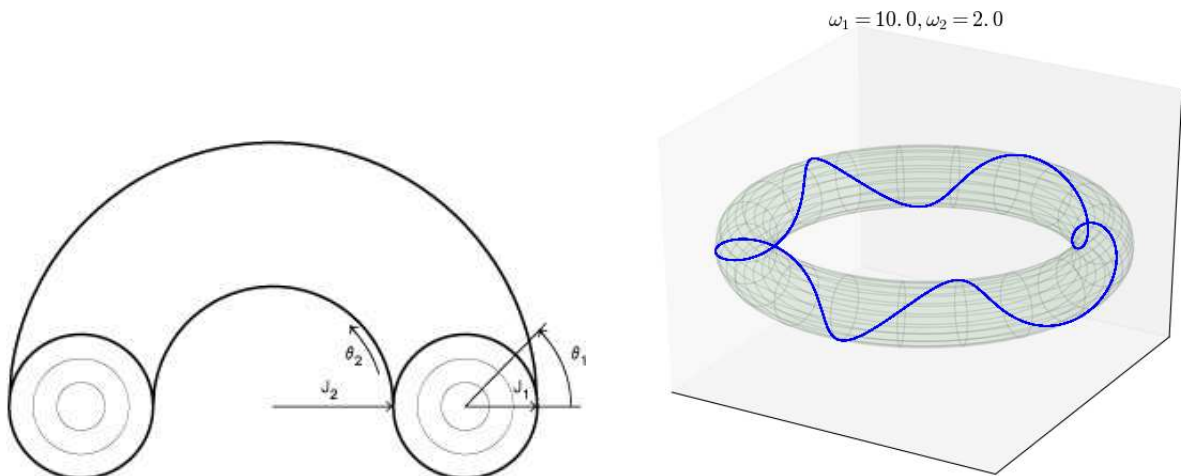


FIGURE 4.3: Illustrations d'un mouvement sur un tore multidimensionnel : plusieurs variables angulaires évoluent chacun avec sa propre fréquence.

Un système hamiltonien est dit intégrable s'il existe une transformation canonique telle que dans les nouvelles variables, le Hamiltonien résultant ne dépend plus que des moments. On aura

$H(Q, P) = H(-, P)$. Dans ce cas, comme nous l'avons déjà vu, la résolution du problème est immédiate :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_i = \text{cte} \quad ; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \text{cte} = n_i \quad \Longrightarrow \quad q_i = n_i t + K \quad . \quad (4.46)$$

Les moments sont donc constants et les coordonnées avancent linéairement dans le temps. La transformation canonique qui mène à cette forme n'est pas forcément facile à trouver. Par exemple, nous avons vu que dans le cas du mouvement Képlérien, la bonne transformation canonique est celle qui mène aux éléments de Delaunay.

Souvent, les variables conjuguées (Q, P) sont des variables de type angle-action. C'est le cas du mouvement Képlérien, mais on pourrait multiplier les exemples. Les angles q_i deviennent alors périodiques et les n_i sont des fréquences. Ce sont les *fréquences fondamentales* du système. Topologiquement, un tel mouvement est confiné à un *tore multidimensionnel* dans l'espace des phases (Fig. 4.3). Si les fréquences n_i ne sont pas commensurables, tout le tore finit par être parcouru. Sinon, le mouvement est dégénéré et se trouve restreint sur une surface de dimension moindre. C'est typiquement le cas du mouvement Képlérien pur où il n'y a plus qu'une seule variable angulaire qui tourne.

4.3.2 Systèmes quasi-intégrables et condition diophantienne

On dira d'un système hamiltonien qu'il est *quasi-intégrable* s'il est suffisamment « proche » d'un système intégrable, c'est-à-dire qu'il existe un jeu de variable conjuguées (Q, P) dans lequel le Hamiltonien peut se mettre sous la forme

$$H(Q, P) = H_0(-, P) + \epsilon H_1(Q, P) \quad , \quad (4.47)$$

où H_0 et H_1 sont deux Hamiltoniens du même ordre de grandeur et ϵ un « petit » paramètre, c'est à dire concrètement $\epsilon \ll 1$. Dans cette définition, H_0 est par construction un Hamiltonien intégrable. Le mouvement Képlérien perturbé est un exemple typique de mouvement quasi-intégrable lorsque la perturbation \vec{P} dérive d'un potentiel qui reste petit devant le Hamiltonien Képlérien.

Considérons le cas particulier où on a en plus $\|\epsilon H_1\| = O(\|P\|)$. Un tel système n'est toujours pas intégrable sauf pour $P = 0$. On peut néanmoins montrer que dans ce cas, le mouvement induit par $H(Q, P)$ possède des tores invariants exactement comme si le système était intégrable. La dynamique est dite *régulière*. Considérant pour H un système Képlérien perturbé et prenant pour H_0 le système Képlérien osculateur à un instant donné, la condition $\|\epsilon H_1\| = O(\|P\|)$ n'est en général pas vérifiée. La raison à cela est que le mouvement Képlérien osculateur au mouvement réel change avec le temps sous l'effet des perturbations. Donc même si H_0 représente le mouvement Képlérien osculateur un instant donné, par construction proche du mouvement réel, rien ne dit que ce même mouvement avec les mêmes éléments orbitaux représentera correctement la réalité plus tard.

Considérons maintenant un point particulier P_0 de l'espace des actions. On définit alors les fréquences associées $(n_{0,i})_{1 \leq i \leq n}$ (ou le vecteur de fréquences N_0) par

$$n_{0,i} = \frac{\partial H_0(P_0)}{\partial p_i} \quad . \quad (4.48)$$

Comme nous l'avons vu plus haut, en ce point P_0 , la dynamique sous l'effet du seul H_0 laisserait le vecteur $P = P_0$ invariant, alors que les angles Q avanceraient linéairement aux fréquences

$(n_{0,i})_{1 \leq i \leq n}$. On dira alors que le vecteur de fréquences N_0 vérifie la *condition diophantienne* pour les constantes $\gamma > 0$ et $\tau > 0$ si

$$\forall K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad |K \cdot N_0| > \frac{\gamma}{\|K\|^\tau} \quad . \quad (4.49)$$

Dans cette expression, on a noté $K \cdot N_0 = \sum k_i n_{0,i}$, où K est un vecteur fait de nombres entiers positifs ou négatifs; $\|K\|$ note la norme du vecteur K , peu importe laquelle. Cette condition signifie que le vecteur de fréquences N_0 est suffisamment éloigné d'une situation de commensurabilité qui correspondrait à $K \cdot N_0 = 0$ pour un K donné. Nous avons déjà évoqué le cas de résonance entre les périodes orbitales (ou les moyens mouvements n_1 et n_2) de deux planètes. Une telle situation se traduit par l'existence de deux entiers k_1 et k_2 tels que $k_1 n_1 + k_2 n_2 = 0$, c'est à dire une condition de type $K \cdot N_0 = 0$ pour des vecteurs de dimension deux. Considérant plus généralement un vecteur de fréquences N_0 de taille n , une configuration de commensurabilité ou de résonance signifiera l'existence d'un vecteur d'entiers K tel que $K \cdot N_0 = 0$.

La condition diophantienne signifie que le vecteur de fréquences N_0 est suffisamment éloigné de $K \cdot N_0 = 0$ pour tout vecteur d'entiers K . Il faut bien comprendre que de la même manière qu'il est toujours possible d'approcher n'importe quel nombre réel aussi proche qu'on veut au moyen de rationnels, pour tout vecteur de fréquences N_0 donné, pour tout $\epsilon > 0$, il est toujours possible de trouver un vecteur d'entiers K tel que $|K \cdot N_0| < \epsilon$. Mais logiquement les entiers composant K vont être de plus en plus grands si on veut s'approcher suffisamment près de $K \cdot N_0 = 0$. Donc $\|K\|$ va être de plus en plus grand. C'est la raison de la présence de $\|K\|^\tau$ dans la condition diophantienne. Dire qu'un vecteur de fréquences vérifie la condition diophantienne signifie donc que le vecteur n'est pas anormalement proche d'une situation de commensurabilité à faible $\|K\|$.

4.3.3 Théorème KAM

Le théorème KAM (Kolmogorov–Arnold–Moser), démontré en 1963, est un résultat fondamental sur l'existence de solutions régulières dans le voisinage d'un système intégrable. Il s'énonce comme suit :

Considérons un système quasi-intégrable vérifiant l'équation (4.47) au voisinage d'un point particulier P_0 de l'espace des actions. Supposons également qu'en ce point, le vecteur de fréquences N_0 vérifie la condition diophantienne pour des constantes γ et τ , et que H_0 est non-dégénéré en P_0 (ce qui signifie que la matrice Hessienne $(\partial^2 H_0 / \partial p_i \partial p_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est régulière). Alors il existe une limite $\epsilon_m > 0$ telle que pour tout $\epsilon < \epsilon_m$, on peut trouver une transformation canonique $(Q, P) \rightarrow (Q', P')$ pour laquelle le Hamiltonien s'écrit toujours de manière quasi-intégrable, mais où on a en plus $\|\epsilon H_1\| = O(\|P'\|)$.

Par conséquent, compte tenu de ce qui a été dit plus haut, le système reste durablement proche d'un système intégrable possède des tores invariants appelés *tores de KAM*. La dynamique est régulière et quasi-périodique.

- Dans le contexte du mouvement Képlérien perturbé, ce résultat s'interprète comme suit :
- La dynamique périodique proche du système réel évoluant sur les tores de KAM correspond au système moyenné (et pas au mouvement Képlérien osculateur). Le théorème KAM justifie que la dynamique moyennée est une bonne approximation de la dynamique réelle, le mouvement réel s'effectuant sur des tores invariants de manière quasi-périodique.

- Pour construire explicitement la transformation canonique correspondant à la moyennisation, on utilise des méthodes itératives (von Zeipel, 1916) fondées sur un développement du Hamiltonien en série de Taylor.
- Ces propriétés de régularité disparaissent si ϵ devient trop grand, c'est-à-dire si la perturbation n'est pas trop forte ou si la condition diophantienne n'est plus vérifiée. Une perturbation trop forte correspondra par exemple à une rencontre proche ou plus généralement à l'approche d'une zone chaotique. La condition diophantienne cessera d'être valide typiquement au voisinage d'une résonance entre les fréquences fondamentales.

Le théorème KAM montre donc que dans la plupart des configurations, suffisamment loin des résonances, et pour des perturbations suffisamment faibles, la dynamique d'ensemble garde la même topologie que dans le système intégrable. Les tores invariants sont déformés, les fréquences fondamentales légèrement affectées, mais c'est tout. Dans le cas d'un mouvement Képlérien perturbé, il ne faut pas oublier qu'il ne subsiste plus en éléments de Delaunay qu'une fréquence non-nulle, à savoir le moyen mouvement. Les deux autres sont nulles. En perturbant ce système tout en restant sur un tore de KAM, on se retrouve avec une évolution quasi périodique, mais les fréquences se trouvent légèrement affectées. En particulier, les deux fréquences qui étaient nulles avant se trouvent maintenant non nulles mais faibles. Retraduit en terme d'éléments de Delaunay, cela signifie que les angles Ω et ω vont évoluer de manière quasi-périodique à basse fréquence. En d'autres termes, l'orbite va précesser. L'étude moyennée de cas particuliers nous confirmera ce fait, mais la force du théorème KAM est de montrer que ce résultat est général et de justifier les approximations.

4.4 Applications : Résonance de Kozai et théories planétaires

4.4.1 Problèmes à N corps de type planétaire

Dans le traitement du problème Képlérien perturbé tel que nous l'avons décrit ci-dessus, nous avons toujours supposé que le problème étudié pouvait se mettre naturellement sous la forme (4.1), et c'est de là que nous sommes partis. Si nous considérons maintenant un problème réel de type N -corps partant des équations (3.1), la mise sous forme d'un problème Képlérien perturbé n'est pas forcément immédiate. Déjà, si $N > 2$, le problème complet devra comporter *plusieurs* mouvements Képlériens indépendants assortis de perturbations mutuelles de moindre importance. Fondamentalement, le traitement de cette situation repose sur les mêmes techniques que celles vues plus haut, à savoir développement et moyennisation des perturbations mutuelles. Nous en verrons une application concrète avec les théories planétaires.

Mais auparavant, la mise d'un système N -corps sous la forme d'une collection de mouvements Képlériens qui se perturbent mutuellement n'est pas évidente. En fait, elle n'est même pas toujours possible. Elle nécessite de faire des hypothèses sur l'architecture du système étudié. Ce sera par exemple le cas d'un système planétaire autour de son étoile ou d'un système stellaire hiérarchique. Même dans ces situations, la manière de mettre le problème N -corps sous la forme recherchée n'est pas unique. Nous allons nous pencher désormais sur le cas d'un système planétaire.

Considérons donc le cas particulier d'un système à N corps correspondant à un système planétaire, c'est-à-dire où un des corps est nettement plus massif que tous les autres. Ce corps que nous appellerons par pure commodité « Soleil », sera numéroté 0 dans la liste. Tous les autres seront appelé « planètes ». Le référentiel de base est le référentiel barycentrique de

l'ensemble, dans lequel on repère chaque corps par son vecteur position \vec{u}_k . Dans ce référentiel, les équations du mouvement de chaque corps sont les équations (3.1). Pour chaque planète k , cela donne en séparant la contribution du Soleil de celle des autres planètes et en simplifiant par la masse m_k :

$$\ddot{\vec{u}}_k = -\frac{Gm_0}{|\vec{u}_k - \vec{u}_0|^3} (\vec{u}_k - \vec{u}_0) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{Gm_i}{|\vec{u}_k - \vec{u}_i|^3} (\vec{u}_k - \vec{u}_i) \quad (4.50)$$

Pour le Soleil, il vient :

$$\ddot{\vec{u}}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{|\vec{u}_i - \vec{u}_0|^3} (\vec{u}_i - \vec{u}_0) \quad . \quad (4.51)$$

Le but est de décrire le mouvement de chaque planète autour du Soleil comme un mouvement Képlérien perturbé. Pour cela, pour toute planète k on désigne par $\vec{r}_k = \vec{u}_k - \vec{u}_0$ le rayon vecteur qui le joint au Soleil, et nous allons décrire l'évolution de chaque \vec{r}_k et ces termes. On dit qu'on passe en *variables héliocentriques*.

Il faut garder à l'esprit que cette description n'est pas la seule possible. Une autre description toute aussi valide est celle des *coordonnées de Jacobi*, où on décrit le mouvement de chaque planète comme la perturbation d'un mouvement Képlérien non pas autour du seul Soleil, mais autour du centre de masse du Soleil et des planètes plus proches du Soleil qu'elle. Cette description conduit à des équations plus compliquées, essentiellement parce qu'il est plus difficile d'exprimer la distance entre deux planètes à l'aide des seules coordonnées de Jacobi. C'est la raison pour laquelle traditionnellement, on préfère la description héliocentrique. Il faut cependant savoir qu'en termes de formulation Hamiltonienne, cette description est considérée comme supérieure. C'est la raison pour laquelle on l'utilise dans de nombreux codes numériques, car elle garantit une meilleure stabilité de l'intégration. Par ailleurs, elle s'étend naturellement à des systèmes stellaires hiérarchiques, ce qui n'est pas le cas de la description héliocentrique.

Reprenant les variables héliocentriques, on en déduit immédiatement leurs équations d'évolution, en utilisant le fait que $\vec{r}_k - \vec{r}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$:

$$\ddot{\vec{r}}_k = \ddot{\vec{u}}_k - \ddot{\vec{u}}_0 = -\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{Gm_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_i) - \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_0|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \quad . \quad (4.52)$$

Ceci se réorganise, en tenant compte du fait que $\vec{r}_0 = \vec{0}$:

$$\ddot{\vec{r}}_k = \underbrace{-\frac{G(m_0 + m_k)}{r_k^3} \vec{r}_k}_{\text{Mouvement Képlérien}} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n Gm_i \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right)}_{\text{Perturbation}} \quad . \quad (4.53)$$

Cette écriture fait clairement apparaître l'équation du mouvement de la planète k sous la forme de deux termes. Le premier terme est l'équation d'un mouvement Képlérien de type deux corps entre le Soleil et la planète. S'il n'y avait que la planète k , ce terme serait le seul présent ; et on retrouverait le problème des deux corps tel qu'il a été décrit précédemment. Le deuxième terme représente une perturbation, composée d'une somme de termes représentant la perturbation de chaque planète $i \neq k$ sur la planète k . Dans la mesure où la masse du Soleil domine, le terme Képlérien domine clairement tous les autres. On a donc bien affaire à un mouvement Képlérien perturbé.

On peut écrire tout cela sous une forme potentielle :

$$\ddot{\vec{r}}_k = -\frac{G(m_0 + m_k)}{r_k^3} \vec{r}_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \vec{\nabla} U_{k,i} \quad , \quad (4.54)$$

avec

$$U_{k,i} = -Gm_i \left(\underbrace{\frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}}_{\text{Terme direct}} - \underbrace{\frac{\vec{r}_k \cdot \vec{r}_i}{r_i^3}}_{\text{Terme indirect}} \right) \quad . \quad (4.55)$$

La perturbation qui agit sur l'orbite de la planète k dérive donc d'un potentiel somme des potentiels $U_{k,i}$. Nous allons donc pouvoir appliquer les techniques Hamiltoniennes spécifiques à ce cas. Notons auparavant que chaque $U_{k,i}$ est composé de deux termes. On reconnaît dans le premier le potentiel gravitationnel de la planète i à la position de la planète k , inversement proportionnel à la distance entre les deux planètes. Ce terme est appelé *terme direct*. Le deuxième terme, appelé *terme indirect*, a une origine différente. Il provient du fait que le référentiel héliocentrique dans lequel nous travaillons n'est pas galiléen. En effet, le seul vrai référentiel galiléen est le référentiel barycentrique dans le quel nous avons écrit les équations pour les \vec{u}_k . Le référentiel lié au Soleil n'est pas galiléen car le Soleil ne se situe pas au centre de masse du système. Il effectue au contraire un petit mouvement autour à cause de la masse non nulle des planètes, ce qui rend le référentiel non galiléen. Il en résulte la présence de forces d'inerties additionnelles dans les équations. C'est exactement la signification des termes indirects de potentiel.

4.4.2 Résonance de Kozai dans le problème restreint des 3 corps

Nous allons revenir sur le problème restreint des 3 corps que nous avons abordé au chapitre 3, mais en l'abordant sous l'angle du problème Képlérien perturbé. Considérons donc un astéroïde de masse négligeable en orbite autour d'une étoile de masse M , et perturbé par une planète de masse m en orbite elle aussi autour de l'étoile, mais à plus grande distance. Nous supposons en outre que l'orbite de la planète autour de l'étoile est circulaire. Contrairement à l'étude du chapitre 3, nous raisonnerons ici en référentiel héliocentrique lié à l'étoile. En effet, l'astéroïde sera considéré comme en orbite autour de l'étoile, mais perturbé par la planète. Pour faire le lien avec l'étude précédente, l'astéroïde est ici dans la configuration correspondant au diagramme de gauche dans la figure 3.3, dans la zone blanche autorisée autour de l'étoile.

Nous fixerons le plan horizontal XOY comme correspondant au plan orbital de la planète autour de l'étoile. Dans ce référentiel, l'inclinaison orbitale de la planète vaut rigoureusement 0. Il n'en ira pas de même en revanche pour l'astéroïde que nous autoriserons à avoir une orbite inclinée. Quoi qu'il en soit, nous sommes ici dans le cadre d'un problème de type N corps planétaire avec $N = 3$ et un corps de masse négligeable. Nous pouvons donc écrire l'équation du mouvement de l'astéroïde en variables héliocentriques :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} - \vec{\nabla} U \quad \text{avec} \quad U = -Gm \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \quad . \quad (4.56)$$

Ici, \vec{r} et \vec{r}' désignent les rayons vecteurs héliocentriques de l'astéroïde et de la planète respectivement. De manière générale, dans ce qui suivra, les quantités non primées se référeront aux

coordonnées orbitales de l'astéroïde autour du Soleil, et les quantités primées à celles de la planète.

Le mouvement de l'astéroïde se décrit donc comme un mouvement Képlérien perturbé où la perturbation dérive d'un potentiel. Nous allons donc pouvoir appliquer les techniques vues précédemment afin d'étudier l'effet séculaire de la perturbation, à savoir développement limité et moyennisation. Nous supposons ici que l'astéroïde orbite suffisamment à l'intérieur de celle de la planète pour pouvoir considérer que $r \ll r'$ et développer en polynômes de Legendre. Dans ces conditions, le développement s'écrit

$$U = -\frac{Gm}{r'} \left[1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos \beta) \left(\frac{r}{r'} \right)^n \right] \quad , \quad (4.57)$$

où comme précédemment β désigne l'angle entre \vec{r} et \vec{r}' , et P_n le n -ième polynôme de Legendre. A ce niveau de notre étude, une comparaison avec le développement (4.37) s'impose. On remarque qu'ici le développement commence au terme $n = 2$ alors qu'en (4.37) il commençait à $n = 0$. Il est facile de voir que le coefficient "1" présent devant la somme dans (4.57) correspond exactement au terme $n = 0$ du développement (4.37). Un calcul simple montre ensuite que le terme $n = 1$ dans la somme est exactement compensé par le terme indirect présent dans U (on rappelle que $P_1(X) = X$). Il est donc logique que la somme dans le développement (4.57) commence à $n = 2$, premier terme non nul.

A l'ordre le plus bas, on tronque la somme à $n = 2$ (approximation quadrupolaire). En explicitant le polynôme P_2 , il vient

$$U \simeq -\frac{Gm}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \right) \right] \quad . \quad (4.58)$$

Afin d'aller plus loin, il convient d'expliciter cette expression en fonction des éléments orbitaux pour ensuite moyenner sur les deux orbites. Avant cela, remarquons que le potentiel une fois moyenné ne dépendra plus de la position de la planète et de l'astéroïde sur leurs orbites, donc plus des anomalies vraies ν et ν' ni des anomalies moyennes. Or en éléments de Delaunay, l'anomalie moyenne est conjuguée avec $L = \sqrt{\mu a}$. Par conséquent, si le Hamiltonien moyenné ne dépend pas de l'anomalie moyenne, nécessairement le moment conjugué L est constant ; donc le demi-grand axe a est constant. Ce résultat est général, et nous le retrouverons dans les théories planétaires. On dit que le demi-grand axe a de l'astéroïde est un invariant séculaire. Dans ces conditions, en se souvenant que nous avons supposé que l'orbite de la planète est circulaire (donc $r' = a'$), il est avantageux de réécrire la perturbation (4.58) sous la forme

$$U = -\frac{Gm}{a'} \left[1 + \left(\frac{a}{a'} \right)^2 u_2 \right] \quad \text{avec} \quad u_2 = \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (4.59)$$

Remarquons à ce niveau que dans la mesure où a est une constante, toute la dépendance de U en fonction du temps est contenue dans le terme u_2 . Pour moyenner U il suffit de moyenner u_2 . Pour cela, il faut exprimer $\cos \beta$ en fonction des éléments orbitaux. Nous avons supposé que l'orbite de la planète était circulaire et que son orbite était contenue dans le plan XOY . Son rayon vecteur \vec{r}' peut donc s'écrire dans le repère $OXYZ$

$$\vec{r}' = a' \begin{vmatrix} \cos \nu' \\ \sin \nu' \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad (4.60)$$

où ν' est l'anomalie vraie. Pour l'orbite de l'astéroïde c'est plus compliqué. On trouve en définitive

$$\vec{r} = r \begin{cases} \cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + \nu) \\ \sin \Omega \cos(\omega + \nu) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + \nu) \\ \sin i \sin(\omega + \nu) \end{cases}, \quad (4.61)$$

où les éléments orbitaux ont leur notation habituelle. On en déduit

$$\cos \beta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{rr'} = \cos \nu \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \cos \nu' \sin(\omega + \nu) \cos i \sin \Omega \\ + \sin \nu' \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \sin \nu' \sin(\omega + \nu) \cos i \cos \Omega \quad . \quad (4.62)$$

L'expression de u_2 en fonction des éléments orbitaux en découle. L'orbite de la planète étant circulaire, on commene par moyenner sur son orbite. Il vient

$$\overline{u_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 i - 3 \cos \omega \sin \omega \sin^2 i \sin(2\nu) + \left(3 \cos^2 \omega - \frac{3}{2} \right) \sin^2 i \cos(2\nu) \right] . \quad (4.63)$$

Ensuite, il faut moyenner sur l'orbite de l'astéroïde. L'expression de $\overline{U_2}$ montre que cela va se résumer à calculer les moyennes temporelles de $(r/a)^2$, $(r/a)^2 \cos(2\nu)$ et $(r/a)^2 \sin(2\nu)$. Ces quantités sont reliées aux coefficients de Hansen $X_0^{2,0}(e)$, $X_0^{2,2}(e)$ et $X_0^{-2,2}(e)$. Tous calculs faits, on trouve

$$\overline{\overline{u_2}} = -\frac{1}{8} - \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{8}\cos^2 i - \frac{15}{8}e^2 \cos^2 i \cos^2 \omega + \frac{3}{2}e^2 \cos^2 i + \frac{15}{8}e^2 \cos^2 \omega \quad . \quad (4.64)$$

Le Hamiltonien moyenné correspondant s'écrit

$$\overline{\overline{H}} = H_{\text{kep}} + \overline{\overline{U}} = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm}{a'} \left[1 + \left(\frac{a}{a'} \right)^2 \overline{\overline{u_2}} \right] \quad (4.65)$$

Ce Hamiltonien porte le nom de Hamiltonien de Kozai. Il est important de noter qu'en dehors du demi-grand axe que nous savons déjà constant, toute la dépendance en fonction des autres éléments orbitaux de l'astéroïde est contenue dans le terme $\overline{\overline{u_2}}$. Remarquons maintenant que $\overline{\overline{u_2}}$ ne dépend pas non plus de la longitude du nœud ascendant Ω . Ce paramètre a tout simplement disparu dans le processus de moyennisation. Ce n'est pas un hasard. C'est lié au caractère circulaire de l'orbite de la planète. Il suffit de regarder la définition de Ω (Fig. 3.1). Ω est l'angle entre l'axe OX et la ligne des nœuds de l'astéroïde. Il dépend donc de la définition que nous nous fixons de l'axe OX . Or l'orbite de la planète est circulaire et contenue dans le plan XOY . Du point de vue de l'astéroïde, le problème sera donc rigoureusement le même quelle que soit la direction que nous nous fixons pour l'axe OX qui est donc arbitraire. On dit que le problème est *invariant par rotation* autour de l'axe OZ . Il est donc logique que le Hamiltonien moyenné qui régit l'évolution orbitale de l'astéroïde ne dépende pas de Ω .

Quoi qu'il en soit, Ω est un des éléments de Delaunay. Le Hamiltonien ne dépendant pas de ce paramètre, le moment conjugué Θ est constant. On en déduit :

$$\Theta = \sqrt{aGM(1-e)^2} \cos i = \text{cte} \quad \implies \quad \boxed{h = \sqrt{1-e^2} \cos i = \text{cte}} \quad . \quad (4.66)$$

Nous avons donc trouvé avec h une nouvelle constante du mouvement (un invariant séculaire pour être plus exact).

Les constantes du mouvement réduisent l'ordre du mouvement. Nous sommes partis d'un Hamiltonien à 3 degrés de liberté, en élément de Delaunay $(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta)$. Or le Hamiltonien

ne dépend ni de l'anomalie moyenne ni de Ω , et les moments conjugués sont constants. Par conséquent, il ne reste plus dans le Hamiltonien que la dépendance en (ω, G) . Le Hamiltonien est donc réduit à un seul degré de liberté. De ce fait il devient intégrable.

Concrètement, le Hamiltonien est aussi lui-même une constante du mouvement, car une fois moyenné, il devient conservatif. Compte tenu du fait que le demi-grand axe a est lui-aussi constant, cela se ramène à dire que la quantité $\overline{u_2}$ est également une constante. $\overline{u_2}$ est fonction de e, i et ω . Or nous savons que $h = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ est une constante. Le fait que h soit constant nous autorise à exprimer $\cos i$ en fonction de h et e et donc $\overline{u_2}$ en fonction des seules variables e et ω et de la valeur constante de h .

Nous pouvons également écrire les équations de Lagrange qui décrivent les variations des éléments orbitaux qui restent :

$$\sqrt{aGMe} \frac{de}{dt} = (1 - e^2) \frac{\partial \overline{U}}{\partial M} - \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial \omega} = \frac{Gma^2}{a'^3} \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial \omega} \quad ; \quad (4.67)$$

$$C \sin i \frac{di}{dt} = \cos i \frac{\partial \overline{U}}{\partial \omega} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial \Omega} = -\frac{Gma^2}{a'^3} \cos i \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial \omega} \quad ; \quad (4.68)$$

$$C \sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial i} = -\frac{Gma^2}{a'^3} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial i} \quad ; \quad (4.69)$$

$$Ce \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = (1 - e^2) \frac{\partial \overline{U}}{\partial e} = -\frac{Gma^2}{a'^3} (1 - e^2) \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial e} \quad . \quad (4.70)$$

Si on injecte maintenant dans ces équations l'expression de $\overline{u_2}$, on tire après calculs

$$\frac{de}{dt} = \frac{15}{4} \left(\frac{m}{M} \right) \frac{a^{3/2} \sqrt{GM(1 - e^2)} ee \cos \omega \sin \omega \sin^2 i}{a'^3} \quad ; \quad (4.71)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{15}{4} \left(\frac{m}{M} \right) \frac{a^{3/2} \sqrt{GM} e^2 \cos i \sin i \cos \omega \sin \omega}{a'^3 \sqrt{1 - e^2}} \quad ; \quad (4.72)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{4} \left(\frac{m}{M} \right) \frac{a^{3/2} \sqrt{GM} (5e^2 \cos^2 \omega - 4e^2 - 1) \cos i}{a'^3 \sqrt{1 - e^2}} \quad ; \quad (4.73)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{4} \left(\frac{m}{M} \right) \frac{a^{3/2} \sqrt{GM(1 - e^2)} (1 + \sin^2 i - 5 \sin^2 i \sin^2 \omega)}{a'^3} \quad . \quad (4.74)$$

Ceci constitue un système différentiel régissant l'évolution des éléments orbitaux de l'astéroïde. Il va de soi que tel quel, ce système différentiel n'est pas soluble analytiquement. C'est pourquoi on préfère souvent l'analyse hamiltonienne. On pourra vérifier à titre d'exercice que les équations ci-dessus donnent bien $dh/dt = 0$. Nous allons examiner trois situations :

1. $i = 0$ initialement. Dans ce cas, les équations de Lagrange donnent immédiatement $di/dt = 0$. Autrement dit si l'inclinaison est nulle, elle va le rester. Il est en effet assez intuitif par symétrie que si l'astéroïde gravite dans le plan orbital de la planète, il va y rester. Nous le retrouvons ici par le calcul. Nous trouvons également $de/dt = 0$. L'excentricité est constante, ce qui pouvait se voir aussi avec $h = cte$. L'inclinaison étant nulle, la longitude du nœud ascendant Ω et l'argument du périastre ω ne sont pas définis. Par contre la longitude du périastre $\varpi = \Omega + \omega$ est définie. Il vient alors pour $i = 0$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \left(\frac{m}{M} \right) \frac{a^{3/2} \sqrt{GM(1 - e^2)}}{a'^3} = \frac{3}{4} n \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \sqrt{1 - e^2} \ll n \quad . \quad (4.75)$$

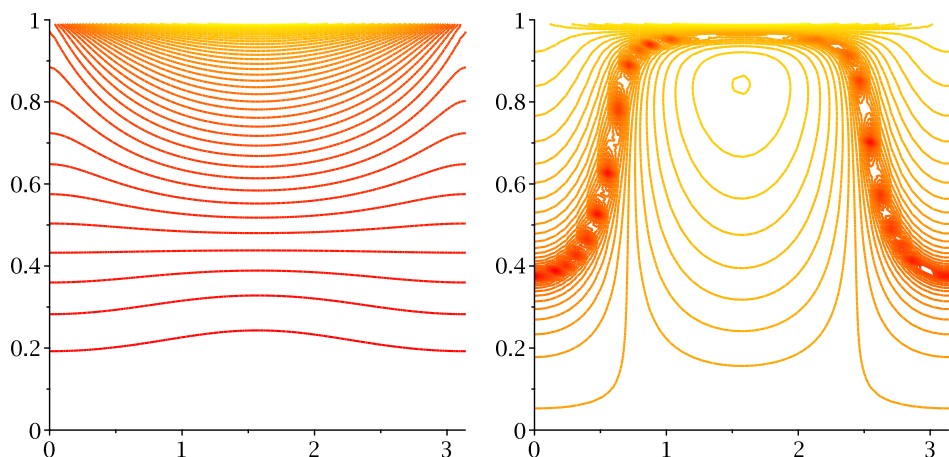


FIGURE 4.4: Diagrammes de phase de l'Hamiltonien de Kozai dans un plan (ω, e) dans deux situations : $h \simeq 1$ (à gauche) et $h \simeq 0$ (à droite).

Dans la dernière expression, on a fait réapparaître le moyen mouvement n en utilisant la troisième loi de Képler. Cette quantité est constante. Par conséquent l'évolution séculaire de l'orbite se résume à une avance de ϖ à vitesse constante, autrement dit une *précession* de l'orbite. On remarquera également que compte tenu de $m \ll M$ et de $a \ll a'$, cette vitesse de précession est petite devant n . La période de précession de l'orbite sera donc beaucoup plus grande que sa période orbitale. On voit donc que l'orbite précède *lentement* dans son plan.

2. $i \neq 0$ mais $h \simeq 1$. Cette condition implique nécessairement que i et e sont de petites quantités⁷ et vont donc le rester. Quoiqu'il en soit, résoudre le système différentiel ci-dessus n'est pas possible analytiquement. Par contre on sait que $\overline{u_2}$ est constant. On a aussi $h = \sqrt{1 - e^2} \cos i$. En remplaçant $\cos i$ par $h/\sqrt{1 - e^2}$ dans l'expression de $\overline{u_2}$, on trouve une certaine fonction de e et ω qui doit rester constante. Il est alors possible de tracer dans un plan (ω, e) des courbes de niveau de cette fonction, sachant que si à $t = 0$, l'astéroïde se trouve sur une de ces courbes, il va y rester, ce qui permet de décrire qualitativement le mouvement. Un tel diagramme est appelé diagramme de phase. Deux d'entre eux sont représentés sur la figure 4.4. Le diagramme de gauche correspond à la situation $h = 0.95$. Nous avons dit que dans cette configuration, l'excentricité de départ est forcément petite. Donc à $t = 0$, l'astéroïde se situe sur une des courbes du bas du diagramme. L'orbite va évoluer ensuite en restant sur cette même courbe. Nous constatons donc qu'en suivant cette courbe (de la gauche vers la droite), l'angle ω précède tout comme dans la situation $i = 0$, et l'excentricité subit de faibles variations. L'inclinaison aussi variera faiblement, de manière à garder $h = \text{cte}$. Au bout du compte la dynamique de l'astéroïde est peu différente de la situation $i = 0$. L'orbite précède à vitesse quasi constante, et l'excentricité et l'inclinaison ne subissent que de très faibles variations.
3. $i \neq 0$ et $|h| \ll 1$. Si nous supposons que l'excentricité est faible au départ, alors nécessairement l'inclinaison est élevée pour garantir h petit. Cette situation ($h = 0.05$) est représentée sur le diagramme de droite de la figure 4.4. La topologie des courbes est ici très différente. Si l'excentricité est petite au départ, cela veut dire que l'astéroïde part d'une des courbes du bas du diagramme. Mais peu importe le point de départ, on voit en suivant les courbes qu'à un moment donné, l'astéroïde va se trouver en haut du diagramme, ce qui correspond à une excentricité proche de 1. A ce moment là, l'inclinaison est nécessairement plus petite, de manière à conserver la valeur de départ

7. On remarquera qu'on a toujours $-1 \leq h \leq 1$.

de h . Par ailleurs, on voit en suivant les courbes que le mouvement est périodique. L'astéroïde finit par revenir à son point de départ (c'était déjà le cas pour $h \simeq 1$). Le passage au maximum d'excentricité se passe à $\omega = 90^\circ$ et $\omega = 270^\circ$, car le diagramme est π -périodique en ω . L'évolution de l'orbite se présente donc comme une alternance de phases à basse excentricité et haute inclinaison et de phases à très haute excentricité et moindre inclinaison.

Le mouvement décrit pour h petit porte de nom de *résonance (ou mécanisme) de Kozai-Lidov* (Kozai 1962). Il correspond à un échange de moment cinétique entre les deux orbites. C'est un mécanisme d'évolution majeur pour les comètes du Système Solaire. C'est par ce procédé que des comètes perturbées par Jupiter deviennent *sungrazers*, c'est-à-dire à très faible périhélie. En effet, lorsque l'orbite de l'astéroïde passe en phase de haute excentricité, dans la mesure où le demi-grand axe reste constant, nécessairement le périastre $q = a(1 - e)$ est tout petit. La comète s'approche fortement du Soleil. Certaines y sont détruites.

Ce mécanisme est aussi présent et important dans les systèmes stellaires triples hiérarchiques, avec comme situation standard une binaire au centre, avec une troisième étoile en orbite autour de l'ensemble à plus grande distance. L'évolution de l'orbite de la binaire centrale est sujette à la résonance de Kozai si l'inclinaison mutuelle est suffisamment élevée au départ ($\gtrsim 50^\circ$). Dans ce cas, nous ne sommes pas dans le cas d'un problème à 3 corps restreint, mais face à un problème à 3 corps classique où les 3 corps sont massifs. L'étude est plus compliquée, mais le résultat est le même. En fait, la résonance de Kozai se met en place si le rapport de moment cinétique entre les deux orbites est suffisamment élevé ($\gtrsim 5$). Combiné aux effets de marée, ce mécanisme a pour conséquence principale la création de binaires serrées, avec des périodes orbitales n'excédant pas quelques jours. Il a été aussi envisagé comme moteur pour générer des Jupiters chauds, à savoir des planètes géantes très proches de leurs étoiles. Mais dans ce dernier cas, ce n'est pas le seul mécanisme envisagé.

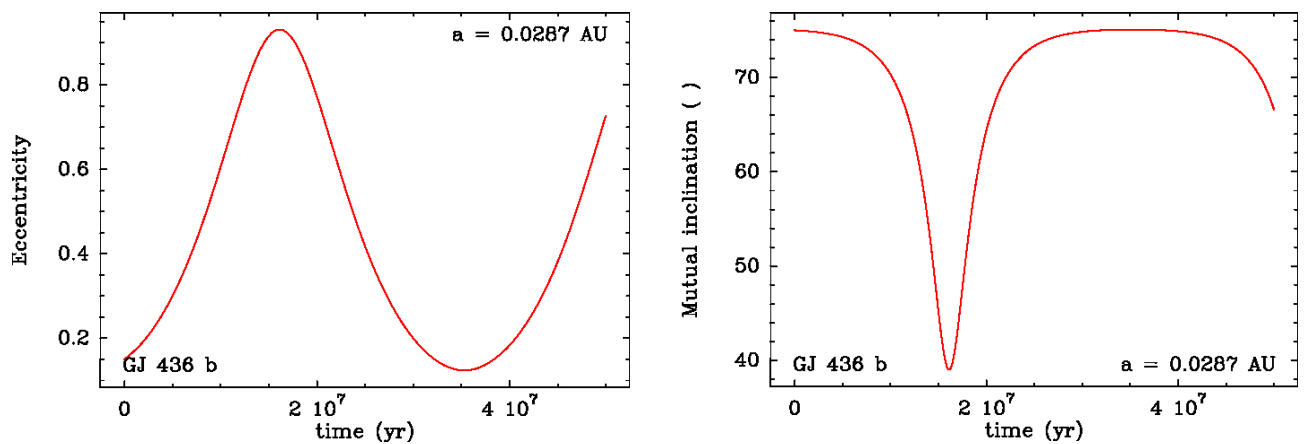


FIGURE 4.5: Exemple d'évolution orbitale sous l'effet de la résonance de Kozai dans un système stellaire triple. Evolution temporelle de l'excentricité de l'orbite interne (à gauche) et de l'inclinaison mutuelle entre les deux orbites (à droite) sur 5×10^7 ans.

La figure 4.5 montre un exemple d'évolution orbitale calculée numériquement dans un système stellaire triple soumis à la résonance de Kozai. On montre ici l'évolution de l'excentricité de la binaire interne et de l'inclinaison mutuelle entre les deux orbites, sachant que c'est là encore l'orbite interne qui est la plus affectée. On reconnaît un pic d'excentricité au-delà de 0.9 vers $t = 1.6 \times 10^7$ ans, couplé avec une chute de l'inclinaison, caractéristique d'une résonance de Kozai. La même évolution calculée sur un temps plus long montre une succession de pics de même nature appelés cycles de Kozai.

A ce point de l'étude, nous pouvons noter que l'invariant séculaire u_2 ne dépend pas de la masse m de la planète perturbatrice. De fait, la topologie des courbes de niveau dans les diagrammes de phase (ω, e) de la figure (4.4) est totalement indépendante de m . Ce paramètre intervient par contre dans la *vitesse* à laquelle l'évolution orbitale fait parcourir ces courbes à l'astéroïde. Plus la masse de la planète est élevée, plus l'évolution sera rapide. La période des cycles de Kozai ne se calcule pas analytiquement⁸, mais on peut montrer (Ford et al. 2000 ; Krymolowski & Mazeh 1999) qu'elle peut se mettre sous la forme

$$P_{\text{Kozai}} = \frac{M}{m} \frac{n}{n'^2} \times f = \frac{M}{m} \frac{P'^2}{P} \times \frac{f}{2\pi} \quad (4.76)$$

où f est un facteur a priori de l'ordre de l'unité, et où P et P' désignent les périodes orbitales. On voit donc que plus la masse de la planète est grande, plus la période des cycles est petite. On voit aussi que plus la planète est lointaine (P' grand), plus les cycles sont longs. La validité de cette dynamique a ses limites lorsque P_{Kozai} devient trop grande. Dans ce cas, la précession de ω induite par la dynamique de Kozai devient petite devant celle engendrée par la Relativité Générale que nous avons négligée ici. La précession relativiste prend alors le dessus et les cycles de Kozai n'existent plus.

Dans le cas d'un système triple où aucune masse n'est négligeable, on obtient une expression similaire pour P_{Kozai} , à condition de prendre pour M la masse totale du système, somme des masses des trois corps.

Pour mener cette étude, nous avons été amenés à faire un certain nombre d'approximations : développement et troncation à l'ordre 2, puis moyennisation. Comme nous le disions plus haut, l'approximation la plus rude est la troncation à l'ordre 2. Il est toutefois possible de tronquer le développement (4.57) à des ordres plus élevés que 2, en utilisant les polynômes de Legendre d'ordre supérieur et en moyennant ensuite chaque terme. Ce peut bien entendu être utile dans le cas où le rapport a/a' n'est pas assez petit. Conceptuellement, l'opération ne représente pas plus de difficultés que la troncation à l'ordre 2, à ceci près que les calculs sont significativement plus lourds⁹. On montre déjà par symétrie que la moyennisation annule les termes d'ordre impair. Suivant l'ordre auquel on s'arrête, la perturbation s'écrira sous la forme

$$\overline{\overline{U}} = -\frac{Gm}{a'} \left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \overline{\overline{u_2}} + \left(\frac{a}{a'}\right)^4 \overline{\overline{u_4}} + \left(\frac{a}{a'}\right)^6 \overline{\overline{u_6}} + \dots \right] \quad (4.77)$$

où $\overline{\overline{u_4}}, \overline{\overline{u_6}} \dots$ sont des termes similaires à $\overline{\overline{u_2}}$, dépendant eux aussi des seuls e, i et ω , mais faisant intervenir des puissances plus élevées de ces paramètres. En revanche, l'invariance par rotation est toujours présente, ce qui a pour conséquence que ces termes ne contiennent pas Ω . Ainsi la constante h subsiste. Au bout du compte l'essentiel de la dynamique de Kozai décrite plus haut reste qualitativement inchangée même à des ordres plus élevés. Seules les *périodes* des mouvements séculaires associés comme P_{Kozai} sont légèrement changées.

A ce niveau d'approximation, il convient toutefois de se rappeler que d'autres effets potentiellement plus importants ont peut-être déjà été négligés. Ainsi dans un système réel, la planète perturbatrice aura toujours une petite excentricité e' . Si e' est de l'ordre de quelques centièmes comme c'est le cas des planètes du Système Solaire (Table 3.1), pousser l'étude précédente à l'ordre 4 voire 6 est inutile tant qu'on néglige l'effet de l'excentricité de la planète. On peut donc se demander ce que devient l'étude précédente dans le cas $e' \neq 0$. Techniquement, le

8. c'est une expression intégrale assez compliquée

9. A ce titre, l'utilisation de logiciels de calcul formel comme MAPLE ou MATHEMATICA peut se révéler fort utile !

développement (4.57) reste valable, mais lorsqu'on moyenne sur les deux orbites, il faut tenir compte de l'excentricité de la planète. Nécessairement intervient alors la longitude du périastre ϖ' de la planète. En fait, comme l'axe OX est arbitraire, on ne restreint en rien l'étude en le choisissant dans la direction du périastre de la planète, c'est-à-dire en fixant $\varpi' = 0$. Une fois ce choix effectué, le processus de moyennisation de la perturbation n'est qu'une affaire de (longs) calculs d'intégrales.

La principale conséquence de tout cela est que la longitude du nœud ascendant de l'astéroïde Ω ne disparaît plus dans le processus de moyennisation. Il n'y a donc logiquement plus d'invariance par rotation. Par conséquent la quantité h n'est plus une constante du mouvement. Dans la pratique, les études numériques montrent que tant que e' reste faible, typiquement de l'ordre des excentricités de planètes du Système Solaire, la dynamique de Kozai reste peu affectée, la quantité h subissant des variations de faible amplitude relative. Là encore, les paramètres les plus affectés sont les périodes des mouvements séculaires associés. On montre par exemple qu'il faut rajouter à l'ordre le plus bas un facteur $(1 - e'^2)^{3/2}$ dans l'expression de la période P_{Kozai} .

4.4.3 Théories planétaires

On appelle théorie planétaire tout modèle du mouvement d'un ensemble de planètes autour de son étoile sous l'effet de leurs perturbations mutuelles. Bien entendu, le Système Solaire sera le premier sujet d'application de ces théories, mais tout ce qui suit reste en principe applicable à tout système planétaire ayant une structure comparable. Le cadre d'application sera donc exactement le problème à N corps de type planétaire vu plus haut. En reprenant les mêmes notations, à savoir un « Soleil » numéroté 0 et n planètes en orbites échelonnées autour de lui, les équations du mouvement des planètes ne sont rien d'autre que les équations (4.54). Ce système constitue le point de départ de toute théorie planétaire. On part des termes de potentiel $U_{k,i}$ et on va chercher à les développer, puis les moyenner afin de dégager un système différentiel résolvable.

Il n'y a pas qu'une seule théorie planétaire. On trouve toutes sortes de théories de précision et de complexité variables, prenant en compte ou non les résonances, etc. Nous allons présenter la théorie de Laplace-Lagrange qui est la théorie linéaire la plus simple, initialement développée par Laplace à la fin du XVIII^e siècle. Nous n'allons pas développer les termes $U_{k,i}$ en polynômes de Legendre, car les rapports de demi-grands axes entre planètes voisines dans le Système Solaire peuvent être parfois trop proches de 1. Nous allons au contraire développer les $U_{k,i}$ en coefficients de Laplace, faisant implicitement l'hypothèse que les excentricités et les inclinaisons sont des quantités petites et qui le resteront. Il conviendra bien entendu de vérifier la validité de cette hypothèse a posteriori.

Dans la mesure où les excentricités et les inclinaisons des planètes sont petites, leurs éléments orbitaux Ω_i et ω_i ne sont pas bien définis. Il en résulte que les éléments de Delaunay ne sont pas les mieux adaptés au développement des théories planétaires. Nous partons donc des éléments de Poincaré (3.19) introduits au chapitre 3, et qui restent réguliers aux petites excentricités et inclinaisons. Nous aurons donc pour chaque planète k :

$$\left(\begin{array}{l} q_{1,k} = \lambda_k = \omega_k + \Omega_k + M_k \quad \leftrightarrow \quad p_{1,k} = L_k = \sqrt{G(M_* + m_k)} a_k \\ q_{2,k} = -\sqrt{2L_k(1 - \sqrt{1 - e_k^2})} \sin(\Omega_k + \omega_k) \quad \leftrightarrow \quad p_{2,k} = \sqrt{2L_k(1 - \sqrt{1 - e_k^2})} \cos(\Omega_k + \omega_k) \\ q_{3,k} = -\sqrt{2L_k \sqrt{1 - e_k^2} (1 - \cos i_k)} \sin \Omega_k \quad \leftrightarrow \quad p_{3,k} = \sqrt{2L_k \sqrt{1 - e_k^2} (1 - \cos i_k)} \cos \Omega_k \end{array} \right), \quad (4.78)$$

où M_* est la masse de l'étoile. Notons que si les excentricités et les inclinaisons sont petites, il

en va tout autant de toutes les variables $(q_{2,k}, p_{2,k}, q_{3,k}, p_{3,k})$. Le principe de la théorie planétaire est donc de développer les $U_{k,i}$ en puissances croissantes de ces variables puis de moyenniser le résultat. Dans la théorie de Laplace-Lagrange, les développements sont tronqués au degré 2 dans ces variables, puis moyennés sur l'orbite de toutes les planètes indépendamment. La validité de cette opération suppose donc que le théorème KAM s'applique à notre système planétaire, donc que la condition diophantienne est vérifiée, ce qui revient à dire que nous sommes loin de toute résonance entre les planètes. Nous verrons plus loin que cette hypothèse est loin d'être vérifiée partout. Quoi qu'il en soit, une fois les termes de potentiels perturbatifs moyennés, ils ne dépendent naturellement plus de la position des planètes sur leurs orbites, donc des longitudes moyennes $q_{1,k}$. Les moments conjugués L_k sont donc constants, ce qui revient à dire comme précédemment que les demi-grands axes a_k sont des constantes. Ce résultat est important. Les demi-grands axes sont en effets les éléments les plus stables dans le Système Solaire, en dehors des rencontres proches et des situations de résonances, ce que l'étude numérique confirme bien. Par conséquent le Hamiltonien se réduit naturellement à deux degrés de libertés par planète. La suite de l'étude portera donc pour chaque planète sur les seules variables $(q_{2,k}, p_{2,k}, q_{3,k}, p_{3,k})$

A ce point, il est utile d'apporter une précision. Les théories planétaires traditionnelles ont été développées historiquement en utilisant pour chaque planète les variables suivantes :

$$k = e_k \cos(\Omega_k + \omega_k) ; \quad h = e_k \sin(\Omega_k + \omega_k) ; \quad q = \sin\left(\frac{i_k}{2}\right) \cos \Omega_k ; \quad p = \sin\left(\frac{i_k}{2}\right) \sin \Omega_k . \quad (4.79)$$

Si nous considérons que les excentricités et les inclinaisons sont petites, il est facile de voir au moyen d'un développement limité que ces variables sont très proches à un facteur $\sqrt{L_k}$ ou $\sqrt{L_k}/2$ près constant des variables de Poincaré $(q_{2,k}, p_{2,k}, q_{3,k}, p_{3,k})$. De plus, à l'ordre 2 du développement, les expressions seront les mêmes dans les deux jeux de variables.

Nous n'allons pas détailler les calculs de développement et de moyennisation. On pourra trouver des détails dans Bretagnon (1974). Au bout du compte, on arrive au résultat suivant¹⁰ :

— Pour $i < k$:

$$\begin{aligned} \overline{U_{k,i}} &= \frac{Gm_i}{2a_k} b_{1/2}^{(0)}\left(\frac{a_i}{a_k}\right) + \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_i}{a_k^2 L_k} \left[-b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_i}{a_k}\right) \times (q_{2,k} q_{2,i} + p_{2,k} p_{2,i}) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_i}{a_k}\right) \times (q_{2,k}^2 + p_{2,k}^2 + q_{2,i}^2 + p_{2,i}^2 - (q_{3,k} - q_{3,i})^2 - (p_{3,k} - p_{3,i})^2) \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

— Pour $i > k$:

$$\begin{aligned} \overline{U_{k,i}} &= \frac{Gm_i}{2a_i} b_{1/2}^{(0)}\left(\frac{a_k}{a_i}\right) + \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_k}{a_i^2 L_k} \left[-b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_k}{a_i}\right) \times (q_{2,k} q_{2,i} + p_{2,k} p_{2,i}) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_k}{a_i}\right) \times (q_{2,k}^2 + p_{2,k}^2 + q_{2,i}^2 + p_{2,i}^2 - (q_{3,k} - q_{3,i})^2 - (p_{3,k} - p_{3,i})^2) \right] \end{aligned} \quad (4.81)$$

On remarquera au passage que l'argument des coefficients de Laplace est toujours inférieur à 1. A partir de là, on écrit les équations du mouvement pour chaque planète k et pour $j = 2, 3$:

$$\overline{U_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \overline{U_{k,i}} \quad ; \quad \frac{dq_{j,k}}{dt} = \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial p_{j,k}} \quad ; \quad \frac{dp_{j,k}}{dt} = -\frac{\partial \overline{U_k}}{\partial q_{j,k}} \quad . \quad (4.82)$$

On remplace ensuite les $\overline{U_{k,i}}$ par leurs expressions. Il vient :

$$\frac{dq_{2,k}}{dt} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_i}{a_k^2 L_k} \left[-b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_i}{a_k}\right) \times p_{2,i} + b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_i}{a_k}\right) \times p_{2,k} \right] - \frac{6GM_* L_k}{c^2 a_k^3} p_{2,k}$$

10. On suppose les planètes numérotées dans l'ordre des demi-grands axes croissants

$$+ \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_k}{a_i^2 L_k} \left[-b_{3/2}^{(2)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) \times p_{2,i} + b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) \times p_{2,k} \right] ; \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{2,k}}{dt} &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_i}{a_k^2 L_k} \left[b_{3/2}^{(2)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) \times q_{2,i} - b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) \times q_{2,k} \right] + \frac{6GM_* L_k}{c^2} \frac{1}{a_k^3} q_{2,k} \\ &+ \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_k}{a_i^2 L_k} \left[-b_{3/2}^{(2)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) \times q_{2,i} - b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) \times q_{2,k} \right] ; \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\frac{dq_{3,k}}{dt} = - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_i}{a_k^2 L_k} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) (p_{3,k} - p_{3,i}) - \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_k}{a_i^2 L_k} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) (p_{3,k} - p_{3,i}) \quad (4.85)$$

$$\frac{dp_{3,k}}{dt} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_i}{a_k^2 L_k} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) (q_{3,k} - q_{3,i}) + \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_k}{a_i^2 L_k} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) (q_{3,k} - q_{3,i}) . \quad (4.86)$$

Ces équations constituent le système différentiel régissant les variations des éléments orbitaux des n planètes. Elles paraissent complexes, mais ce n'est qu'apparent, car dans la mesure où les demi-grands axes sont constants, tous les coefficients qui apparaissent en facteur des $(q_{2,k}, p_{2,k}, q_{3,k}, p_{3,k})$ sont des constantes, y compris les coefficients de Laplace. Nous avons donc affaire à un système différentiel *linéaire* à coefficients constants qu'on sait résoudre a priori. On remarquera dans les deux premières équations deux termes additionnels en GM_*/c^2 , où c est la vitesse de la lumière. Ces termes constituent à l'ordre le plus bas de l'approximation la correction provenant de la prise en compte de la Relativité Générale. On les inclut habituellement sous cette forme dans le système linéaire. Nous pouvons d'ailleurs comparer l'ordre de grandeur de ces termes. A supposer que les demi-grands axes a_i et a_k soient du même ordre de grandeur¹¹, et en supposant les coefficients de Laplace de l'ordre de l'unité, tous les termes du système différentiel sont de l'ordre de $Gm_i/a_k L_k = (m_i/M_*)n_k$, où n_k est le moyen mouvement de la planète k . Le terme relativiste peut s'écrire quant à lui $(6GM/a_k c^2)n_k = 3(R_s/a_k)n_k$, où R_s est le *rayon de Schwarzschild* de l'étoile. Pour une étoile comme le Soleil, R_s est de l'ordre de 3 km. Les termes R_s/a_k s'échelonnent entre 5×10^{-8} pour Mercure et 7×10^{-9} pour Neptune. Les termes m_i/M_* varient entre 1.7×10^{-7} pour Mercure et près de 10^{-3} pour Jupiter. On remarque donc que les termes principaux dominent toujours les termes relativistes qui constitueront une correction. Mais pour une planète comme Mercure, on voit que le terme relativiste ne sera pas si petit que cela. Il faut donc en tenir compte. Ceci est lié au fait que Mercure est la planète qui a la vitesse orbitale la plus élevée.

Nous remarquons également que le système des variables d'excentricité $(q_{2,k}, p_{2,k})_{1 \leq k \leq n}$ se découple de celui des variables d'inclinaison $(q_{3,k}, p_{3,k})_{1 \leq k \leq n}$. Plus précisément, commençons par définir des vecteurs colonnes (Q_2, P_2, Q_3, P_3) regroupant les variables de même nature pour chaque planète :

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_{2,1} \\ \vdots \\ q_{2,n} \end{pmatrix} ; \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{2,n} \end{pmatrix} ; \quad Q_3 = \begin{pmatrix} q_{3,1} \\ \vdots \\ q_{3,n} \end{pmatrix} ; \quad P_3 = \begin{pmatrix} p_{3,1} \\ \vdots \\ p_{3,n} \end{pmatrix} . \quad (4.87)$$

Le système entier peut alors se représenter sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dQ_2}{dt} &= -\mathbf{E}P_2 & \frac{dP_2}{dt} &= \mathbf{E}Q_2 \\ \frac{dQ_3}{dt} &= -\mathbf{J}P_3 & \frac{dP_3}{dt} &= \mathbf{J}Q_3 \end{aligned} , \quad (4.88)$$

11. Ce que nous faisons là est très approximatif...

où \mathbf{E} et \mathbf{J} sont deux matrices $n \times n$. On remarquera que les coefficients de ces matrices ont la dimension de l'inverse d'un temps, c'est à dire d'une fréquence.

Nous nous retrouvons donc avec deux systèmes différentiels découplés. La résolution des équations (4.88) passe par la diagonalisation des matrices \mathbf{E} et \mathbf{J} qui se trouvent avoir toutes leur valeurs propres réelles pour des situations classiques de systèmes planétaires. En combinant les équations entre elles, nous aboutissons à des systèmes simplifiés pour Q_2 et Q_3 ¹² :

$$\frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\mathbf{E}^2 Q_2 \quad ; \quad \frac{d^2 Q_3}{dt^2} = -\mathbf{J}^2 Q_3 \quad (4.89)$$

Si on se place dans la base de diagonalisation de \mathbf{E} , la résolution du système d'équations en Q_2 est immédiate. Chacune des composantes du vecteur correspondant à un mouvement d'oscillateur harmonique, à la fréquence égale à la valeur propre correspondante de la matrice \mathbf{E} . Revenant via une matrice de passage dans la base de départ, nous voyons que l'évolution de Q_2 est une combinaison linéaire de mouvements sinusoïdaux dont les fréquences sont les valeurs propres, ou fréquences fondamentales du système. On procède de même pour le système en inclinaison. En définitive, la solution de Laplace-Lagrange s'écrit pour chaque planète k en fonction du temps t :

$$\begin{aligned} q_{2,k} &= -\sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i \cos(g_i t + \beta_i) & p_{2,k} &= \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i \sin(g_i t + \beta_i) \\ q_{3,k} &= -\sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i \cos(s_i t + \delta_i) & p_{3,k} &= \sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i \sin(s_i t + \delta_i) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Dans ces expressions, (g_1, \dots, g_n) représentent les valeurs propres de la matrice \mathbf{E} , (s_1, \dots, s_n) celles de la matrice \mathbf{J} ; $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \dots, \lambda_{n,i})$ est le vecteur propre associé à la valeur propre g_i ; $(\mu_{1,i}, \mu_{2,i}, \dots, \mu_{n,i})$ est le vecteur propre associé à la valeur propre s_i ; enfin, les amplitudes $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$, ainsi que les phases $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des constantes d'intégration déterminées de manière à ce que les solutions de Laplace-Lagrange coïncident à $t = 0$ avec les valeurs initiales.

TABLE 4.1: *Fréquences fondamentales du Système Solaire dans la solution de Laplace-Lagrange et périodes associées*

Indice j	Fréquence g_j ("/an)	Période associée (ans)	Fréquence s_j ("/an)	Période associée (ans)
1	5.859090	221195	-5.200748	249195
2	7.459556	173737	-6.570095	197257
3	17.398552	74489	-18.745560	69136
4	18.052003	71793	-17.635849	73487
5	3.711292	349205	0	-
6	22.284414	58157	-25.738267	50353
7	2.701372	479756	-2.903761	446318
8	0.633134	2046960	-0.677390	1913226

Les données physiques importantes sont les fréquences fondamentales $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$, c'est à dire les valeurs propres des deux matrices. Ce sont les fréquences caractéristiques de variation des éléments orbitaux des planètes du système planétaire.

12. On aurait les mêmes pour P_2 et P_3 .

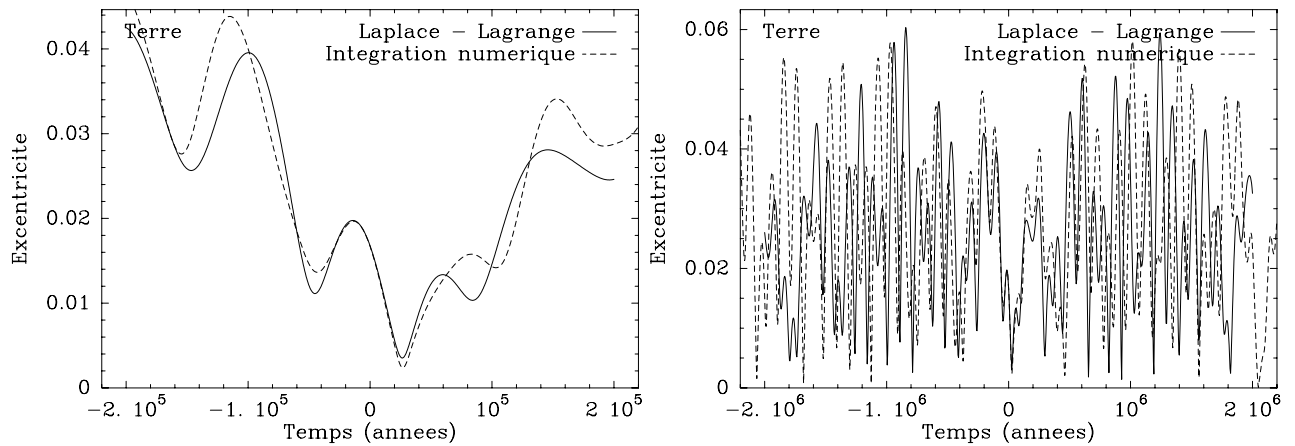


FIGURE 4.6: Evolution de l'excentricité de l'orbite terrestre, de -200000 ans à $+200000$ ans à partir d'aujourd'hui (à gauche), et sur 4 millions d'années (à droite). Le trait plein représente ce que prévoit la solution de Laplace-Lagrange, le trait pointillé une solution numérique très précise.

Les valeurs dans le cas du Système Solaire, ainsi que les périodes associées, sont listées dans la table 4.1. Il est connu que les g_i 's sont tous positifs, et que les s_i 's sont tous négatifs sauf un qui est nul. Pour le Système Solaire, on a choisi par convention de fixer $s_5 = 0$ ¹³. Cette valeur propre nulle signifie dans le système (4.90) que les éléments $q_{k,3}$ et $p_{k,3}$ sont définis à une constante près, et même plus précisément que les longitudes des nœuds Ω_k sont déterminés à une constante près, la même pour tous (la phase β_5). Ceci ne fait que traduire l'invariance par rotation du système. Une fois que le système d'axes est fixé, tourner arbitrairement tout le système d'un angle fixe autour de l'axe OZ ne change rien à la position relative des planètes, donc à leur dynamique. Seules les longitudes de nœuds Ω_k sont déplacées, mais physiquement, rien n'est changé. C'est ce que traduit donc le fait de trouver une valeur propre nulle, et ce sera le cas dans tout système planétaire.

On voit dans le cas du Système Solaire que que les périodes sont typiquement de l'ordre de quelques centaines de milliers d'années. Concrètement, les longitudes de nœuds et longitudes de périastres vont précesser plus ou moins régulièrement à ces vitesses, tandis que les excentricités et les inclinaisons vont subir des fluctuations plus ou moins erratiques sur les mêmes échelles de temps, tout en restant faibles. Les hypothèses de base sont donc vérifiées a posteriori. Ces mouvements lents se font sur une échelle de temps bien supérieure aux périodes orbitales des planètes. Dans la table 4.1, la numérotation des valeurs propres a été choisie de telle manière que chaque g_i corresponde grossièrement à la fréquence principale de précession du périhélie de la planète de même numéro, et chaque s_i à la principale de précession du nœud de la même planète. Ceci est surtout vrai pour les planètes géantes, le mouvement de précession des planètes telluriques étant plus complexe.

Un exemple d'évolution est donné sur la figure 4.6. Il concerne l'évolution de l'excentricité de l'orbite terrestre, dans le passé et dans le futur, calculé à partir des valeurs actuelles. On a superposé les valeurs obtenues à partir de la solution de Laplace-Lagrange, et les « vraies » valeurs, c'est à dire celles déterminées par intégration numérique très précise des équations de base, sans approximation. On voit que sur une échelle de 10000 à 20000 ans, les solutions coïncident, puis divergent au-delà. Passé 800 000 ans dans un sens comme dans l'autre, les deux solutions sont

13. La numérotation des valeurs propres est arbitraire et ne fait a priori pas référence à la numérotation des planètes. Dans la pratique, ce sera quand même un peu le cas...

complètement décorréées, même si la limite supérieure (~ 0.06) ne change pas. Ces variations lentes de l'orbite terrestre sont loin d'être négligeables. En effet, combinées à la précession des équinoxes et aux variations d'obliquité (voir chapitre 6), elles ont un impact considérable sur le climat terrestre. Selon la théorie de Milankovic, ces effets déterminent le cycle d'apparition et de disparition des glaciations.

On peut toutefois se demander pourquoi la solution de Laplace-Lagrange ne semble valable que quelques dizaines de milliers d'années. Tout simplement à cause des approximations qui ont été faites. Au-delà de ce délai, les termes non-linéaires et aussi dans une moindre mesure les termes à courte période induisent des variations par rapport à la solution à l'ordre 1 qui, cumulées, finissent par faire diverger les solutions. Cependant, même si l'information sur les phases semble perdue au bout d'un certain temps, la borne supérieure des oscillations semble rester inchangée (Fig. 4.6). Ce résultat, confirmé par étude numérique, a un fondement théorique. La solution de Laplace-Lagrange représente en fait dans le contexte du théorème KAM le système intégrable dont la véritable solution reste durablement proche. Par conséquent, si la condition diophantienne est vérifiée, ce qui signifie que nous ne sommes pas dans une résonance¹⁴, alors la solution réelle est régulière, possède des tores invariants et ne s'éloigne pas trop de la solution intégrable. Ce résultat se traduit entre autres ici par le fait que les bornes des oscillations restent inchangées.

Il est possible de développer des théories planétaires valables sur un plus long terme, et faisant intervenir des termes d'ordre plus élevé et à courte période. Cela a en particulier été fait à un degré très sophistiqué de développement par P. Bretagnon et J. Laskar (IMCCE, Paris). Techniquement, bâtir une théorie à un ordre supérieur revient toujours d'abord à introduire des termes de développement supplémentaires dans le système différentiel régissant les variations des éléments orbitaux à un ordre inférieur, puis à y substituer la solution à l'ordre inférieur à laquelle on a rajouté des termes additionnels avec des coefficients inconnus. Ensuite on identifie les coefficients et constantes décrivant les termes perturbatifs à l'aide des termes supplémentaires dans le système différentiel. Une méthode (Bretagnon 1974) est décrite dans l'annexe pour introduire des termes d'ordre 4 dans le développement du Hamiltonien.

4.5 Les résonances

4.5.1 Généralités

Nous avons déjà évoqué les situations de résonances où des périodes orbitales se trouvaient dans un rapport rationnel simple, avec pour conclusion que dans ce cas, la moyennisation des perturbations de manière indépendante sur les orbites n'était pas appropriée. Nous allons maintenant nous pencher plus en détail sur ces situations et les méthodes spécifiques d'étude qui s'y rattachent. De manière plus générale une configuration de résonance sera caractérisée par l'arrêt de la circulation d'un angle caractéristique. Au lieu de précéder toujours dans le même sens et de faire des tours, l'angle en question se met à osciller comme un pendule autour d'une position d'équilibre. Nous avons déjà rencontré des situations de ce type. C'est par exemple le cas d'une particule qui effectue des librations autour d'un point de Lagrange avec une planète perturbatrice dans la cadre du problème restreint des 3 corps. Dans ce cas, l'angle qui cesse de précéder est la différence d'anomalie vraie $\nu - \nu'$ entre le petit corps et la planète, ou de manière complètement équivalente la différence d'anomalie moyenne $M - M'$ ou la différence de longitude moyenne $\lambda - \lambda'$. Le même petit corps non calé dans son mouvement autour d'un

14. C'est que nous avons implicitement fait en moyennant la perturbation indépendamment sur tous les moyens mouvements.

point de Lagrange verra ces mêmes angles faire des tours. On opposera donc pour un angle donné les mouvements de *circulation* et les mouvements de *libration*.

En mécanique céleste, on distingue habituellement 4 types de résonances¹⁵ :

La résonance de Kozai : Nous avons déjà étudié cette configuration, qui correspond à un arrêt de la précession de l'argument du périastre ω (Fig. 4.4) qui occasionne des variations périodiques très importantes d'excentricité et d'inclinaison. Pour être précis et pour répondre à la définition, la situation de *résonance* correspondra au cas où l'angle ω effectue des librations autour de $\pm 90^\circ$, mais nous avons vu que les grandes oscillations d'excentricité et d'inclinaison existent également même lorsque l'angle ω circule.

Les résonances de moyen mouvement : Il s'agit là de la situation classique d'une résonance entre deux où plusieurs corps dont les périodes orbitales (donc les moyens mouvements) présentent des rapports rationnels simples. Nous verrons plus loin que l'angle caractéristique qui cesse de précesser correspond à la position de conjonction. Techniquement, le mouvement de libration autour des points de Lagrange est une résonance de moyen mouvement 1 : 1, où en moyenne les périodes orbitales de deux corps concernés sont égales.

Les résonances séculaires : Ce sont les pendants des résonances de moyen mouvement, mais cette fois vis-à-vis des fréquences fondamentales $(g_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(s_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'évolution séculaire que nous avons vues dans le cadre des théories planétaires. Dans une telle configuration, certaines de ces fréquences se trouvent dans un rapport rationnel simple. Dans la pratique, ces résonances sont plus faibles et agissent sur des temps beaucoup plus longs. Elles ne sont importantes que dans le cas d'*égalité* entre les fréquences concernées (résonance 1 : 1), et l'angle caractéristique est la différence de longitude du périastre ou de longitude du nœud correspondante.

Les résonances spin-orbite : Ce sont des résonances entre le mouvement orbital d'un corps et son mouvement de rotation sur lui-même. Le cas le plus emblématique est celui de la Lune qui présente toujours la même face à la Terre dans son mouvement orbital. Il s'agira là encore d'une résonance 1 : 1 (cas le plus fréquent), mais d'autres configurations comme la résonance 3 : 2 de Mercure sont possibles. Ces résonances sont intimement liées aux effets de marée que nous aborderons au chapitre 6.

4.5.2 Résonances de moyen mouvement

Cette situation correspondra à une commensurabilité entre les moyens mouvements de deux corps (ou éventuellement plus) en orbite autour d'un même astre central. Cette situation est extrêmement fréquente dans le Système Solaire et ailleurs. La table 4.2 donne quelques exemples de résonances dans le Système Solaire. Cette situation est trop fréquente pour n'être que le résultat du hasard. Les choses sont encore plus nettes quand on regarde la répartition des petits corps du Système Solaire. La figure 4.7 illustre cela. Le diagramme du haut représente tous les objets connus de la ceinture de Kuiper au-delà de Neptune dans un plan (demi-grand axe, excentricité). On voit clairement apparaître des zones très fines de surpeuplement qui correspondent aux principales résonances de moyen mouvement extérieures avec Neptune. La plus caractéristique d'entre elles juste en-dessous de 39 AU correspond à la résonance 2 : 3. La planète naine Pluton est située dedans, mais elle n'est pas seule. Par extension, on a donné le nom de *plutinos* aux autres objets plus petits présents dans cette même résonance.

15. Nous en verrons d'autres en dynamique galactique

TABLE 4.2: Exemples de commensurabilités dans le Système Solaire et ailleurs. La liste est loin d'être exhaustive.

Planètes :	
5 périodes de Jupiter	= 2.013 périodes de Saturne
3 périodes de Saturne	= 1.052 périodes d'Uranus
2 périodes d'Uranus	= 1.020 périodes de Neptune
3 périodes de Neptune	= 1.990 périodes de Pluton
Satellites de Jupiter :	
2 périodes de Io	= 1 période d'Europe
2 périodes d'Europe	= 1 période de Ganymède
Satellites de Saturne :	
2 périodes de Mimas	= 1 période de Téthys
2 périodes d'Encelade	= 1 période de Dioné
4 périodes de Titan	= 3 périodes d'Hypérion
Systèmes extrasolaires :	
Gliese 876	= Résonance 4 : 2 : 1 entre trois planètes

Le diagramme du bas illustre à l'inverse l'effet repoussoir de certaines résonances. Il montre un histogramme de la répartition des astéroïdes par bins de demi-grand axe dans la ceinture principale entre Mars et Jupiter. On y voit clairement apparaître des « trous » correspondant aux principales résonances internes de moyen mouvement avec Jupiter, indiquées dans le haut du graphe. Une situation similaire de résonances avec de satellites est en partie à l'origine des principales divisions dans les anneaux de Saturne.

La structure réelle de la ceinture principale d'astéroïdes est en fait encore plus complexe que la figure 4.7 ne le laisse supposer. Ainsi, il existe dans la ceinture d'astéroïdes d'autres endroits vides de l'espace des phases, car ils correspondent non pas à des résonances moyen-mouvement, mais à des résonances séculaires. Des astéroïdes dans cette zone auraient leur fréquence principale de précession du périhélie égale à celle à celle de Jupiter (la fréquence g_5 de la table 4.1 ; on parle alors de résonance ν_5), ou à celle de Saturne (résonance ν_6). Au bout du compte, la structure dynamique de la ceinture d'astéroïde est entièrement quadrillée par les diverses résonances avec Jupiter et Saturne principalement.

4.5.3 Théorie simplifiée des résonances de moyen mouvement

Les configurations de commensurabilité sont par conséquent trop fréquentes pour n'être dues qu'au hasard. On peut dès lors se demander quelle est l'origine de ces effets. Comme nous l'avons évoqué plus haut, les résonances de moyen mouvement empêchent les systèmes à plusieurs corps d'être ergodiques, car toutes les configurations mutuelles ne sont pas équiprobables. Lorsque c'est le cas, les perturbations entre deux corps vont se répartir sur toutes les orbites au fil du temps, car toutes les configurations mutuelles se réalisent assez rapidement. En cas de résonance au contraire, les même configurations relatives reviennent périodiquement sans que l'espace des phases soit exploré. Les perturbations ont alors tendance à s'additionner vectoriellement dans le même sens au lieu de se moyennner. C'est précisément ce qui interdit la moyennisation en cas de résonance.

Considérons pour simplifier le cas d'un petit corps de type astéroïde en orbite autour d'une

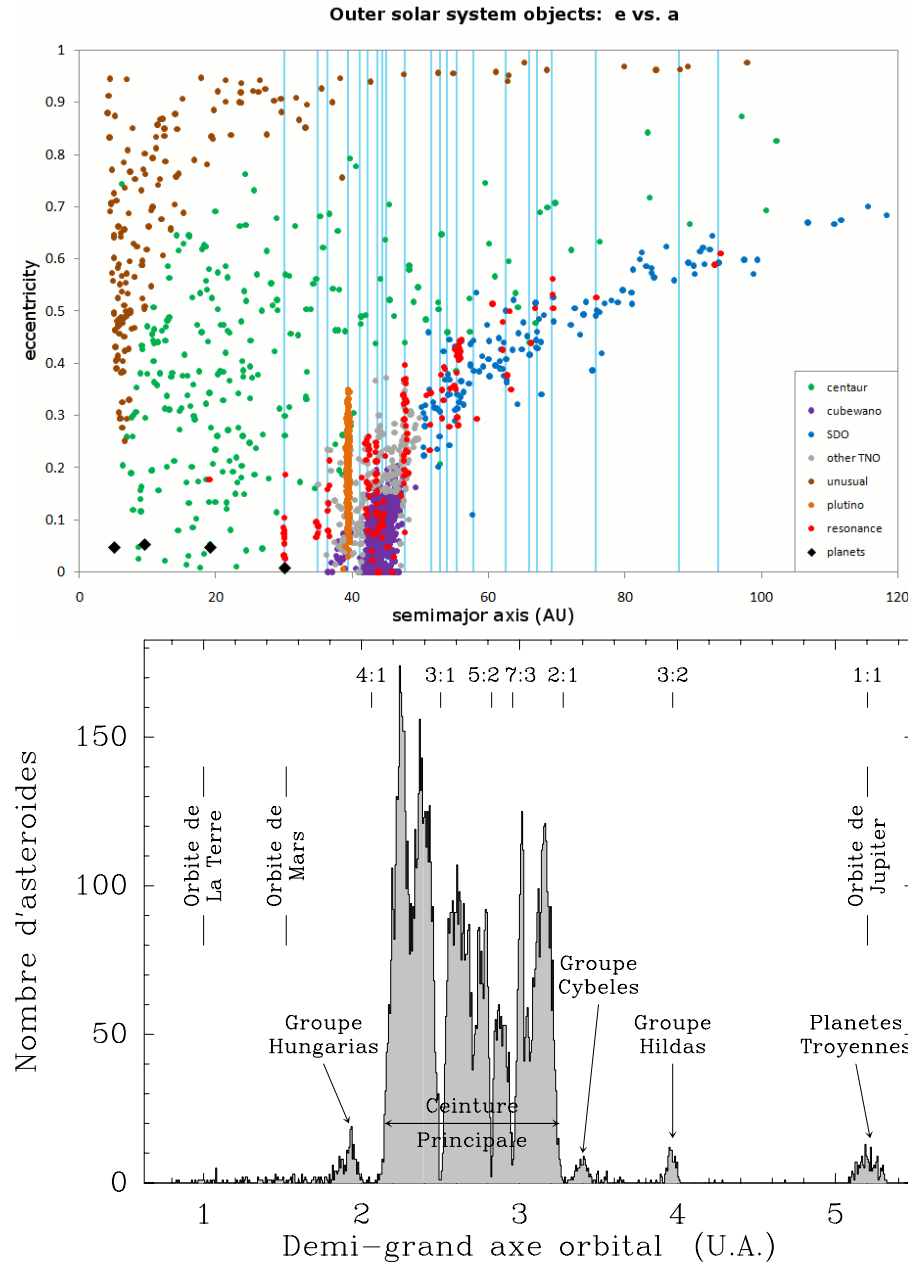


FIGURE 4.7: *Illustration des effets des résonances dans le Système Solaire. Haut* : Diagramme (demi-grand axe, excentricité) des objets connus de la ceinture de Kuiper. Les barres verticales bleues sont les principales résonances de moyen mouvement avec Neptune qui concentrent des objets. *Bas* : Répartition des astéroïdes dans la ceinture principale entre Mars et Jupiter. Des trous dans la répartition correspondent aux principales résonances de moyen mouvement avec Jupiter.

étoile et perturbée par une planète de masse m également en orbite autour de l'étoile. Par là même, nous nous plaçons dans le cadre du problème restreint à 3 corps que nous avons déjà étudié. En reprenant les mêmes notations que plus haut, notre point de départ pour l'étude du mouvement du petit corps sera comme pour la résonance de Kozai le Hamiltonien

$$H = -\frac{GM}{2a} - Gm \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^j|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}^j}{r^3} \right) \quad (4.91)$$

Nous allons en outre supposer pour simplifier l'étude que l'astéroïde a une orbite coplanaire avec celle de la planète, ce qui nous permettra de nous affranchir des variables d'inclinaison (inclinaison et longitude du nœud ascendant). Cette supposition en restreint que très peu la généralité, car aux faibles inclinaisons, les variables d'excentricité ont tendance à être découplées de celles d'inclinaison, comme nous l'avons vu dans la théorie de Laplace-Lagrange. Nous

partirons donc des éléments de Delaunay *plans* qui s'écrivent avec les notations habituelles

$$\left(\begin{array}{l} q_1 = \lambda = \Omega + \omega + M \\ q_2 = \varpi = \omega + \Omega \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} p_1 = L = \sqrt{\mu a} \\ p_2 = P = L(\sqrt{1-e^2} - 1) \end{array} \right) . \quad (4.92)$$

λ est la longitude moyenne et ϖ est la longitude du périastre. Bien entendu, nous aurons ici $\mu = GM$, où M est la masse de l'étoile. Les mêmes variables pour la planète seront systématiquement primées. Les éléments de Delaunay plans s'obtiennent aisément à partir des éléments spatiaux (3.16) par transformation canonique linéaire en prenant λ et ϖ comme nouvelles coordonnées. La transformation des moments suit naturellement. Cette transformation canonique est en fait la première étape qui conduit aux éléments de Poincaré (3.19). Mais pour les besoins de notre étude, nous nous arrêterons à la première étape.

Nous supposons en outre que l'astéroïde est dans une configuration de résonance de moyen mouvement $(p+q) : p$ où p et q sont des entiers. Cela signifie que les moyens mouvements n et n' , et par conséquent les périodes orbitales P et P' vérifient

$$\frac{n}{n'} \simeq \frac{p+q}{p} \iff \frac{P'}{P} \simeq \frac{p}{p+q} . \quad (4.93)$$

L'entier $|q|$ est appelé *ordre* de la résonance. On aura toujours $p > 0$. Si $q > 0$, alors $n' > n$, donc l'orbite de l'astéroïde est interne à celle de la planète. On parle alors de résonance interne. À l'inverse, si $q < 0$ l'astéroïde gravite à l'extérieur et on parle de résonance externe¹⁶.

L'idée fondamentale est que du fait même de la résonance, il n'est pas possible de moyenner directement le Hamiltonien sur les longitudes moyennes comme nous l'avons fait dans les études précédentes. Les deux variables rapides λ et λ' ne sont justement pas indépendantes *du fait même de la résonance*. Toutes les configurations (λ, λ') dans $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ ne sont pas équiprobables.

Nous allons devoir procéder différemment et faire une transformation canonique avant de moyenner. Au passage, remarquons que le Hamiltonien (4.91) dépend du temps par l'intermédiaire de la position de la planète r' . Il n'est donc pas conservatif.

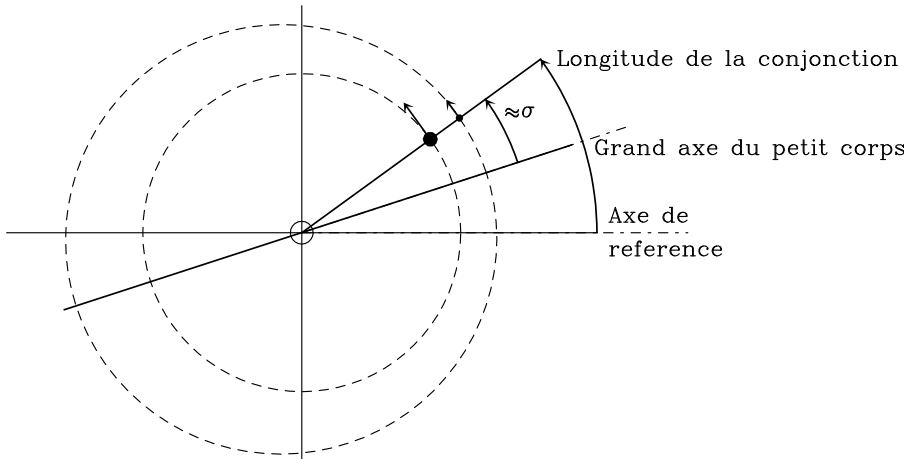


FIGURE 4.8: Orbites relatives de la planète à l'intérieur et de l'astéroïde à l'extérieur.

Nous allons maintenant introduire les deux variables suivantes :

$$\boxed{\sigma = \frac{p+q}{q}\lambda' - \frac{p}{q}\lambda - \varpi \quad \text{et} \quad \nu = -\frac{p+q}{q}\lambda' + \frac{p}{q}\lambda + \varpi'} . \quad (4.94)$$

16. Bien entendu, cette distinction est sans équivoque ici parce que nous étudions le mouvement d'un petit corps perturbé par une planète massive. Dans le cas de deux planètes de masses comparables se perturbant mutuellement, le fait qu'une résonance donnée soit interne ou externe est une notion beaucoup plus floue.

$\nu + \sigma$ n'est autre que la position relative des périastres respectifs des deux corps ; c'est une variable variant lentement. σ est appelé *angle caractéristique de la résonance*. C'est lui qui va avoir un comportement de circulation ou de libration suivant qu'on est en situation de résonance ou non. Il est aisé de trouver une signification physique à ce paramètre. Remarquons d'abord que σ est une variable lente, car *du fait même de la résonance*, on a $(p + q)\lambda' - p\lambda \simeq \text{cte}$.

On appelle *conjonction* la configuration où les deux corps se retrouvent du même côté de l'étoile, et où l'un des deux corps « double » l'autre (Fig. 4.8). Bien entendu, les conjonctions se répètent régulièrement au gré des mouvements orbitaux. En dehors de toute situation de résonance, les conjonctions se produisent à tous les endroits de l'orbite de l'astéroïde. Mais dans la mesure où nous sommes justement dans une résonance, les conjonctions reviennent toujours aux mêmes endroits. Il est facile de voir que dans ce cas, l'ordre $|q|$ de la résonance correspond exactement au nombre de positions de conjonction. La figure 4.8 représente la situation d'une résonance extérieure d'ordre 1 avec une seule position de conjonction qui revient régulièrement. Désignons par ϕ la longitude de la conjonction telle qu'elle est définie sur la figure 4.8. On a aisément

$$(p + q)(\lambda' - \phi) - p(\lambda - \phi) \simeq 0 \quad , \quad (4.95)$$

du fait de la résonance. Il vient donc

$$\sigma \simeq \phi - \varpi \quad . \quad (4.96)$$

En d'autres termes, σ représente la position de la conjonction par rapport au grand axe de l'orbite de l'astéroïde. ν est l'équivalent pour l'orbite de la planète.

Nous allons maintenant effectuer une transformation canonique où les coordonnées ($q_1 = \lambda, q_2 = \varpi$) vont être remplacées par les nouvelles ($q'_1 = \sigma, q'_2 = \nu$). Il s'agit là encore d'une transformation linéaire. Elle se prolonge naturellement en une transformation des moments (L, P) \rightarrow (S, N) qui la rend canonique. On trouve en définitive

$$\begin{aligned} q'_1 = \sigma &= \frac{p+q}{q}\lambda' - \frac{p}{q}\lambda - \varpi & \longleftrightarrow & p'_1 = S = L(1 - \sqrt{1 - e^2}) \quad (= P) \\ q'_2 = \nu &= -\frac{p+q}{q}\lambda' + \frac{p}{q}\lambda + \varpi' & \longleftrightarrow & p'_2 = N = L\left(\sqrt{1 - e^2} - \frac{p+q}{p}\right) \end{aligned} \quad . \quad (4.97)$$

Comme la transformation fait intervenir λ' , elle dépend explicitement du temps. Il en résulte une modification du Hamiltonien. Le nouvel Hamiltonien H' vaut

$$H' = H - \frac{p+q}{p}n'L \quad . \quad (4.98)$$

La remarque importante est qu'au contraire de λ , les deux nouvelles coordonnées σ et ν sont des variables lentes à cause de la résonance. Il n'y a donc plus qu'une seule variable rapide en présence, à savoir la longitude moyenne de la planète λ' . Le Hamiltonien H' peut maintenant être moyenné sur cette seule variable rapide, et non plus indépendamment sur les deux orbites. Nous définissons donc le Hamiltonien moyenné

$$\overline{H'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H'(\lambda') d\lambda' \quad . \quad (4.99)$$

Cet Hamiltonien ne dépend pas du temps, il est donc conservatif et sera un invariant séculaire.

Faisons maintenant l'hypothèse que l'orbite de la planète perturbatrice est circulaire. Nous nous plaçons donc dans le cadre du problème restreint circulaire (et plan). Dans ce cas, l'angle ϖ'

n'est pas défini, car on ne peut pas définir de périastre pour la planète. Ceci se traduit par le fait que le Hamiltonien $\overline{H'}$ ne dépend pas de la variable ν . Ceci peut d'ailleurs se vérifier directement sur l'expression explicite de $\overline{H'}$. Il en résulte immédiatement que le moment conjugué N est une constante du mouvement. Ceci peut se réécrire sous la forme (en laissant tomber un coefficient)

$$N = \sqrt{a} \left(\frac{p+q}{p} - \sqrt{1-e^2} \right) = \text{cte} \quad . \quad (4.100)$$

On a donc deux constantes de mouvement, N et $\overline{H'}$. Comme e va varier, on aura donc du fait

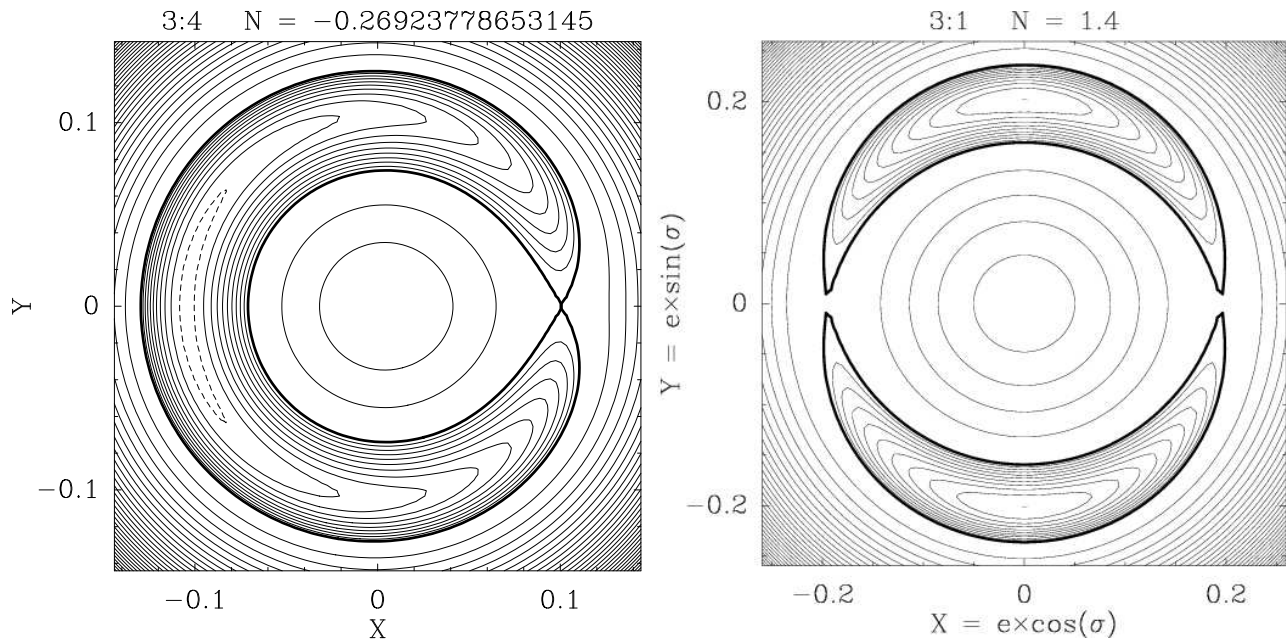


FIGURE 4.9: Exemples de diagrammes de phase résonants correspondant au Hamiltonien moyenné $\overline{H'}$ pour deux exemples de résonances et des valeurs précises de la constante N . **Gauche** : Résonance extérieure 3 :4 (d'ordre 1) dans la configuration correspondant au cas Titan – Hypérion. La courbe pointillée correspond à la trajectoire actuelle d'Hypérion. **Droite** : Résonance intérieure 3 :1 (d'ordre 2) pour $N = 1.4$.

que N soit constant une évolution séculaire (une oscillation) du demi-grand axe, contrairement au cas non-résonant. Notre Hamiltonien $\overline{H'}$ se réduit donc à un seul degré de liberté paramétré par la constante N avec comme variables conjuguées le couple (σ, S) . Pour une valeur de N donnée, on peut tracer des lignes de niveau de $\overline{H'}$ dans un plan (σ, S) comme nous l'avons fait pour la résonance de Kozai. Alternativement, on peut tracer un diagramme dans un plan $(\sqrt{2S} \cos \sigma, \sqrt{2S} \sin \sigma)$, ou carrément dans un plan $(X = e \cos \sigma, e \sin \sigma)$, ce qui revient à un diagramme polaire en (e, σ) . Dans une telle représentation, la distance au centre correspond à l'excentricité, et l'angle polaire à l'angle σ . La figure 4.9 illustre cet exercice, dans deux situations de résonance distinctes. Le diagramme de gauche correspond à une situation réelle, celle des satellites de Saturne Titan et Hypérion. Ces deux corps ont des orbites quasi-coplanaires autour de Saturne. L'orbite du satellite extérieur, Hypérion, est sensiblement excentrique ($e = 0.104$), alors que Titan a une orbite quasi-circulaire. La masse d'Hypérion étant quelque 1400 fois plus faible que celle de Titan, on peut considérer que Hypérion est une particule de masse négligeable perturbée par Titan. Par ailleurs, Titan est de loin le plus gros satellite de Saturne, de telle sorte qu'il est légitime dans une étude approximative de négliger l'influence des autres satellites. Ces hypothèses placent le mouvement d'Hypérion dans le cadre du problème restreint

circulaire que nous étudions ici. Hypérion se trouve de plus dans une situation de résonance 3 : 4 avec Titan. La figure 4.8 représente en fait la configuration relative approximative des orbites des ces deux satellites. Le diagramme de gauche de la figure 4.9 est un diagramme de phase du Hamiltonien \overline{H} , calculé avec la valeur de N correspondant à la situation réelle de Hypérion aujourd'hui. Tout petit corps régi par cette dynamique se verra contraint de rester sur la courbe de niveau de \overline{H} correspondant à sa situation initiale.

On remarque immédiatement deux familles de courbes dans le diagramme de part et d'autre d'une séparatrice soulignée en trait gras. Premièrement, pour e petit ou e grand, les courbes sont des cercles plus ou moins déformés. En parcourant ces courbes, l'angle σ varie de manière monotone, et prend toutes les valeurs possibles. σ effectue donc un mouvement de circulation sans être contraint. Ces orbites sont donc *en dehors de la résonance* pour la valeur de N choisie (d'autres valeurs donneraient d'autres résultats). En revanche, pour des valeurs d'excentricité intermédiaires, des courbes sont d'un autre type, en forme de croissant ou de fer à cheval. Le long de ces courbes, σ effectue un mouvement de libration avec plus ou moins d'amplitude autour de la valeur 180° . σ est donc contraint, l'orbite est bien en résonance. La zone de résonance pour la valeur de N choisie correspond à l'intérieur du « croissant » ainsi dessiné. Hypérion est précisément dedans. La courbe correspondant au mouvement d'Hypérion est représentée en pointillé sur la figure 4.9. σ oscille autour de 180° avec une amplitude de 36° . Compte tenu de la signification géométrique de σ , cela signifie précisément que la conjonction oscille autour de l'apocentre d'Hypérion avec la même amplitude, c'est à dire le résultat qualitatif annoncé plus haut. La période correspondante est de 1.75 ans.

L'oscillation se fait autour d'une position d'équilibre correspondant à $\sigma = 180^\circ$. Ce fait ne doit pas surprendre. En effet, en régime stable, on cherche à minimiser l'effet des rencontres entre les deux astres. Cet effet est maximal à la conjonction. Il est minimisé lorsque la conjonction a lieu lorsque la distance entre Titan et Hypérion est la plus grande possible pour une conjonction, c'est à dire à l'apocentre d'Hypérion. Le résultat serait inverse pour une résonance interne¹⁷. Quoi qu'il en soit, en moyenne, la position de la conjonction oscille autour de sa position la plus stable. Donc, comme la conjonction varie légèrement d'une fois sur l'autre, les périodes orbitales des deux corps ne sont jamais exactement dans le rapport rationnel $p/(p+q)$. Elle le sont cependant *en moyenne*. En fonction de la libration, la conjonction prend un peu d'avance à chaque orbite, puis ensuite elle prend du retard, mais en moyenne cela s'équilibre. La résonance *s'autoentretient* donc, et c'est ce qui explique en partie la fréquence de ces situations dans les systèmes astropysiques. Une fois que deux corps sont tombés dans une résonance suffisamment forte, les perturbations mutuelles tendent à entretenir cette configuration.

Le diagramme de droite de la figure 4.9 est équivalent à celui de gauche, mais il est calculé pour la résonance 3 : 1 et $N = 1.4$. La situation est la même, avec des orbites non résonantes et d'autres qui le sont. La différence est qu'il y a maintenant *deux* zones résonantes autour de deux positions d'équilibre à $\sigma = 90^\circ$. La résonance 3 : 1 étant une résonance interne, nous pourrions être tentés de penser que $\sigma = 0$ serait la position d'équilibre la plus stable. Mais la résonance 3 : 1 est une résonance d'ordre 2. Il est en effet facile de voir que si une conjonction à lieu à un moment donné au périastre de l'orbite de l'astéroïde, une autre aura lieu cette fois à l'apoastre une période et demi plus tard, soit $1/2$ période de la planète. Cette dernière conjonction à l'apoastre est très déstabilisante dans le cas d'une résonance interne. Finalement, le meilleur équilibre est trouvé pour deux positions de conjonction à $\pm 90^\circ$ qui alternent. Ceci se généralise assez aisément. Pour une résonance d'ordre $|q|$, il y aura $|q|$ positions d'équilibre pour σ séparées de $2\pi/|q|$.

Le mouvement de libration de l'angle σ a pour effet d'éviter le passage par les configurations

17. du premier ordre; 4 : 3 ou 2 : 1 par exemple

les plus instables caractérisées par les points selle de la séparatrice dans la figure 4.9. Dans le cas de la résonance 3 : 4, cela correspond à une conjonction au moment du périastre, donc le plus défavorable possible. Dans le cas de la résonance 3 : 1, cela correspondra à une conjonction à l'apoastre et une au périastre, avec le même résultat. Comme la libration permet d'éviter de passer par cette configuration, la résonance agit comme un mécanisme *protecteur* vis-à-vis des situations déstabilisantes. Ce fait est assez général. Ainsi, il est bien connu que Pluton, piégé en résonance 2 : 3 avec Neptune, a une excentricité telle que son périhélie est à l'intérieur de l'orbite de Neptune. Les passages successifs devraient alors amener Pluton à avoir un jour une rencontre proche avec Neptune¹⁸ et se faire éjecter. Mais du fait même de la résonance, cette situation ne se produit jamais, Neptune étant toujours à un autre endroit de son orbite quand Pluton passe au périhélie.

Le mouvement le long des courbes résonantes de la figure 4.9 se traduit également par une oscillation de l'excentricité entre un minimum et un maximum. Comme nous avons l'invariant séculaire $N = \text{cte}$, toute variation d'excentricité se traduira par une variation du demi-grand axe pour garder N constant. L'évolution en résonance se caractérisera donc par des fluctuations séculaires du demi-grand axe, au contraire de l'évolution séculaire non-résonante vue plus haut.

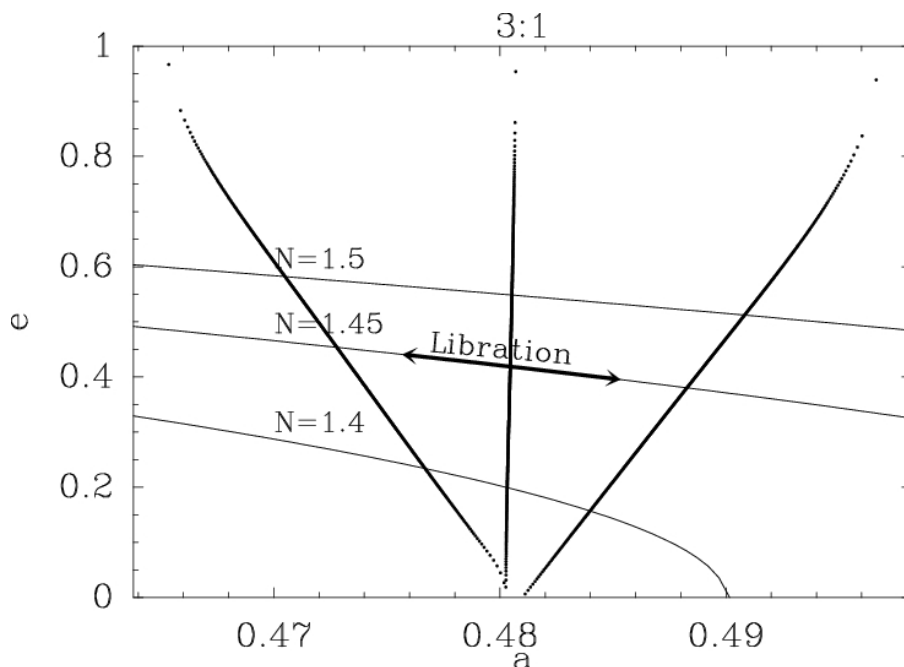


FIGURE 4.10: Représentation du mouvement de libration en résonance dans le plan (a, e) , dans le cas de la résonance 3 : 1. Le demi-grand axe est donné en rapport à celui de la planète perturbatrice.

Il est intéressant de représenter ces fluctuations dans un diagramme (demi-grand axe, excentricité) (a, e) . La figure 4.10 montre le résultat pour la résonance 3 : 1. Comme ces deux variables sont liées par la relation $N = \text{cte}$, pour une valeur de N donnée, le mouvement d'oscillation dans ce diagramme s'effectuera le long de la courbe $N = \text{cte}$ de part et d'autre d'une position d'équilibre. Suivant la courbe suivie dans le diagramme de phase de la figure 4.9, l'oscillation en (a, e) qui accompagne la libration de σ aura plus ou moins d'amplitude. L'amplitude maximale correspondra à la courbe séparatrice. Nous pouvons repérer cette libration d'amplitude maximale sur la courbe $N = \text{cte}$, et recommencer pour chaque valeur de N . Au passage, on se rendra compte les courbes $N = \text{cte}$ étant presque horizontales dans le diagramme (a, e) , chaque valeur de N définit en quelque sorte un « régime d'excentricité » donné, avec une fluctuation somme toute faible entre deux valeurs extrêmes. Il est possible ensuite de relier entre elles les positions d'amplitude maximale. C'est ce qui est fait dans la figure 4.10 où sont repérées en

18. Les deux planètes ne gravitent toutefois pas dans le même plan.

caractère gras les bornes des courbes de libration maximale, ainsi que les positions d'équilibre. Le résultat est en profil en V caractéristique qui délimite en quelque sorte la zone interne qui correspond à la résonance et la zone externe qui n'en fait pas partie. Nous pouvons faire deux remarques :

- La largeur de cette zone n'est pas nulle. La largeur augmente avec l'excentricité. Une situation de résonance ne correspondra donc pas forcément *exactement* à un rapport rationnel simple entre les demi-grands axes instantanés, mais seulement en moyenne. La largeur de la zone de résonance dépend de la masse de la planète perturbatrice m . Au premier ordre, elle est proportionnelle à \sqrt{m} .
- Même à $e = 0$, la résonance a une largeur non nulle. Ceci vaut ici pour la résonance 3 : 1 (Fig. 4.10), mais ne s'applique pas à toutes les résonances. Certaines ont une largeur nulle à faible excentricité.

4.5.4 Situations plus complexes

La théorie décrite ci-dessus vaut pour un problème plan et pour une planète d'excentricité nulle. Nous sommes en droit de nous demander ce qu'il advient lorsque ces conditions ne sont plus vérifiées. On se doutera bien que dans ce cas, l'étude est plus compliquée. En effet, c'est grâce au caractère plan du mouvement et à l'émergence de l'invariant séculaire N que nous avons pu réduire le Hamiltonien $\overline{H'}$ à un seul degré de liberté et donc tracer des diagrammes de phase. Lorsque cette réduction n'est pas possible, l'étude est nécessairement moins aisée et l'étude numérique devient alors souvent le seul échappatoire possible.

Lorsque le problème n'est pas plan, tout dépend si l'inclinaison est faible ou non. Pour un astéroïde faiblement incliné, comme dans le cas des théories planétaires, le mouvement en inclinaison a tendance à se découpler de celui en excentricité. Par conséquent, tout ce qui a été exposé plus haut continue à s'appliquer en s'accompagnant d'une légère fluctuation en inclinaison et d'une précession de la ligne des nœuds. Si l'inclinaison est forte, c'est différent. La résonance de moyen mouvement interfère alors avec la résonance de Kozai qui se met en place naturellement. Cette situation est génératrice de fort chaos.

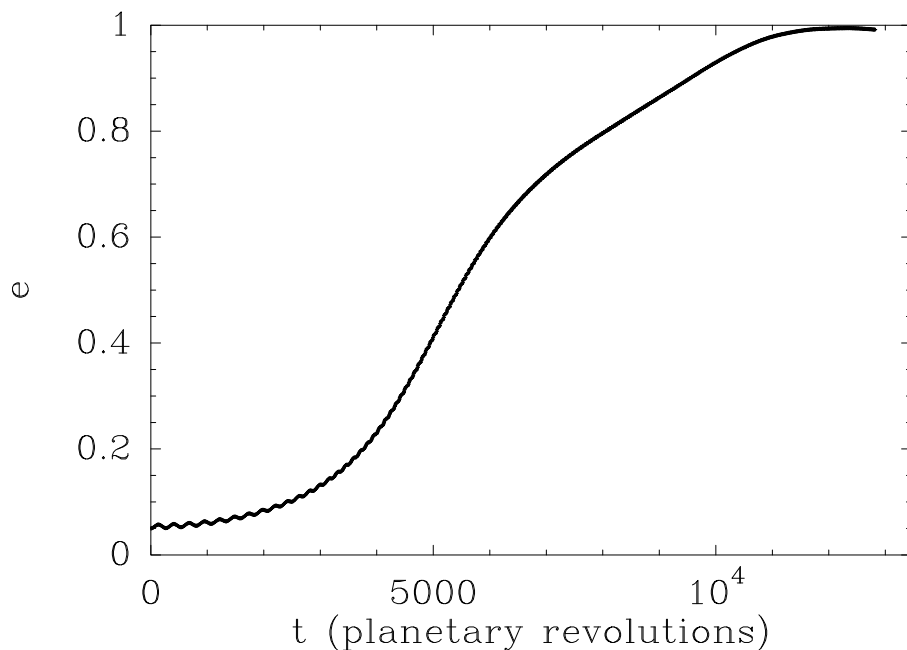


FIGURE 4.11: Exemple d'évolution calculée numériquement pour une particule dans la résonance 4 : 1 avec une planète d'excentricité $e' = 0.05$. On trace ici l'excentricité en fonction du temps qui atteint des valeurs très élevées.

Si la planète est excentrique, là encore tout dépend si son excentricité e' est forte ou non.

Dans tous les cas, $e' \neq 0$ implique $N \neq \text{cte}$. Le mouvement dans le plan (a, e) n'est donc plus confiné le long d'une courbe $N = \text{cte}$. Si e' est faible, on montre toutefois que qualitativement le mouvement de libration décrit plus haut est préservé. L'astéroïde continue à osciller dans le plan (a, e) le long d'une courbe $N \simeq \text{cte}$. Mais sur un temps plus long, la valeur de N peut dériver. La situation peut alors différer du tout au tout en fonction de l'excentricité e' et de la résonance considérée. Dans la plupart des cas, la valeur de N ne subira sur le long terme que de petites fluctuations, ce qui aura pour conséquence que le mouvement restera très proche du mouvement de libration décrit pour $e' = 0$. Mais dans certains cas, la valeur de N peut dériver très loin au fil du temps. Comme N définit essentiellement un régime d'excentricité, l'excentricité peut alors atteindre de grandes valeurs. La figure 4.11 illustre ce processus. On trace ici l'évolution en fonction du temps de l'excentricité d'une particule piégée en résonance 4 : 1 avec une planète de type Jovien ayant une excentricité $e' = 0.05$. L'excentricité atteint des valeurs très élevées.

Ce dernier type d'évolution orbitale concerne surtout des résonances internes, et a tendance à concerner d'autant plus de résonances que l'excentricité e' est élevée. Les premières résonances concernées sont les 4 : 1, 3 : 1, 5 : 2, 7 : 4 et 7 : 3 (Yoshikawa 1989). Ce mécanisme a pour effet d'extraire des particules des résonances en question. En effet, même si l'excentricité de la particule augmente, elle reste piégée dans la résonance et son demi-grand axe ne subit que de petites oscillations. Donc son périastre diminue fortement, au point de croiser la route d'éventuelles autres planètes sur des orbites plus internes et se faire éjecter par rencontre proche. Si tel n'est pas le cas, l'astéroïde poursuit sa route et finit par atteindre un périastre si faible qu'il est détruit au voisinage de l'étoile. Ce mécanisme a été actif dans les premiers âges du Système Solaire et il est toujours actif aujourd'hui dans une moindre mesure. Il a contribué à vider les principales résonances internes avec Jupiter (dont l'excentricité fluctue entre 0 et 0.08) et créer les lacunes de Kirkwood.

A l'inverse, ce mécanisme est quasiment absent des résonances externes. Les objets piégés dans ces résonances ont tendance à y rester en gardant des valeurs d'excentricité raisonnables. Ces résonances ne se vident pas et ont même tendance à concentrer des objets, comme les résonances 2 : 3 et 1 : 2 avec Neptune (Fig. 4.7).

Chapitre 5

Le chaos

5.1 Chaos et instabilité dans le Système Solaire

Le chaos est un phénomène très général dans de nombreux systèmes dynamiques. Il se caractérise principalement par une hypersensibilité aux conditions initiales et par voie de conséquence une forme d'imprédictibilité au bout d'un certain temps manque de connaissance des conditions initiales. Nous avons déjà rencontré ce phénomène dans les théories planétaires. La figure 4.6 montre l'évolution séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre, calculée à l'aide de la théorie de Laplace-Lagrange et numériquement à l'aide d'un ordinateur. Nous voyons que la validité de la solution de Laplace-Lagrange ne dépasse pas quelques centaines de milliers d'années. Au-delà, les termes non linéaires et à courte période que nous avons négligés faussent la solution linéaire et déphasent complètement les courbes. Si nous introduisons des termes d'ordre supérieur de la manière que nous avons vu au chapitre 3, la nouvelle solution obtenue aura bien entendu une validité supérieure. Mais cette validité restera limitée dans le temps, car par la force des choses, nous sommes toujours obligés de tronquer les développements de Hamiltoniens à un certain ordre, et au bout d'un certain temps (en avant ou en arrière), les termes négligés finissent par avoir un rôle notable.

La courbe en trait plein représente une solution numérique calculée en intégrant numériquement les équations différentielles du mouvement des planètes. Le problème, c'est que même avec des algorithmes numériques extrêmement précis, les erreurs d'arrondi et les approximations inhérentes à la méthode rendent les solutions informatiques peu fiables sur des temps très longs, de l'ordre de plusieurs centaines de milliers d'années. Prenez deux ordinateurs de marque et d'architecture différentes, et faites calculer la même solution sur chacun d'entre eux à partir de la même condition initiale. Au bout de plusieurs centaines de millions d'années, les deux solutions divergeront. Autrement dit, même la validité de la solution numérique est limitée dans le temps.

Tout ceci suppose en plus que nous connaissions avec précision les conditions initiales, c'est-à-dire la masse, la position et la vitesse de *tous* les objets du Système Solaire. La précision atteinte aujourd'hui dans notre connaissance de l'état actuel du Système Solaire est très grande, mais pas infinie. Un des derniers rebondissements dans ce domaine est l'hypothèse concernant la possible présence d'une planète supplémentaire de type super-Terre à plusieurs centaines d'AU du Soleil (Batygin & Brown 2016). Par ailleurs, on est loin de connaître avec toute la précision requise la position et la vitesse actuelle de *tous* les astéroïdes et objets de la ceinture de Kuiper au-delà de Neptune. En conséquence, aussi précise notre connaissance de l'état dynamique actuel du Système Solaire soit-elle, elle est nécessairement finie. Or cette situation est utilisée comme condition initiale dans toutes les théories planétaires et intégrations numériques, que

ce soit vers l'avenir ou à rebours vers le passé. Or au bout d'un certain temps d'intégration, le plus petit effet négligé joue un rôle. Prenez deux conditions initiales extrêmement voisines, mais toutes à l'intérieur de notre barre d'erreur d'imprécision, calculez l'évolution séculaire à partir de ces deux solutions, vous verrez les deux solutions diverger au bout d'un moment. Les études les plus récentes et les plus complexes dans ce domaine (Zeebe 2017 ; Laskar et al. 2011) montrent que dans l'état actuel des choses, notre connaissance des conditions initiales est limitée par notre méconnaissance des éphémérides de plusieurs astéroïdes et de leurs perturbations, ainsi que de l'hypothétique planète supplémentaire. La solution actuelle concernant l'excentricité de la Terre et de tous les autres paramètres des planètes principales est considérée comme fiable du point de vue de la phase sur ± 60 millions d'années en avant et en arrière (Zeebe 2017). La courbe bleue de la figure 4.6 peut être considérée comme précisément exacte sur cette durée, et raisonnablement fiable jusqu'à probablement ~ 100 millions d'années. Nous remontons tout juste jusqu'à l'âge des dinosaures ! Au passage cette question est importante, car l'étude des paléoclimats de la Terre dépend étroitement des évolutions de son orbite.

Est-ce à dire que nous ne connaissons rien de l'évolution du Système Solaire au-delà de cette limite ? Non, car comme nous l'avons déjà dit plus haut, le théorème KAM garantit dans une certaine mesure que les bornes de l'évolution de paramètres comme typiquement l'excentricité de l'orbite terrestre resteront inchangées tant que des événements exceptionnels (type rencontre proche) ne surviendront pas. Mais la phase de l'évolution est inévitablement perdue au bout d'un certain temps. En conséquence, la description du phénomène ne peut être que *statistique* au bout d'un certain temps. C'est ce comportement d'hypersensibilité aux conditions initiales qui caractérise un système chaotique.

Nous avons évoqué ici un chaos qui se développe dans la solution du Système Solaire au bout de plusieurs dizaines de millions d'années. Localement, ce temps caractéristique peut être beaucoup plus court, à cause entre autres de la survenue de rencontres proches, et dans les zones de recouvrement de résonances.

Nous sommes dès lors en droit de nous demander si le Système Solaire est instable. La réponse est probablement non, tout simplement car si c'était le cas, l'instabilité aurait déjà joué depuis longtemps. Le plus important à souligner est que *chaos n'implique pas nécessairement instabilité*. Les systèmes chaotiques peuvent conduire à l'instabilité, et le chaos constitue certainement une source majeure d'instabilité. Mais de nombreux systèmes dynamiques, à commencer par le Système Solaire, sont intrinsèquement chaotiques sans être forcément instables. Un système instable est caractérisé par une évolution majeure sur un temps très court, par conséquent une exploration rapide de *tout* l'espace des phases. Un système chaotique est avant tout caractérisé par une hypersensibilité aux conditions initiales qui invalide toute prédiction d'évolution au bout d'un certain temps, mais sans pour autant rendre le système instable. Le chaos existe dans le Système Solaire, mais il ne fait pas n'importe quoi. On parle de *chaos confiné*.

Le chaos se compare assez bien au célèbre « effet papillon » en météorologie qui veut que la plus infime perturbation (un battement d'ailes de papillon) puisse potentiellement avoir des conséquences importantes sur l'évolution météorologique quelques semaines plus tard. La météorologie terrestre est d'ailleurs l'exemple même d'un système chaotique, mais en comparaison avec la dynamique du Système Solaire, ce chaos se manifeste beaucoup plus vite, sur un échelle de quelques semaines. Ainsi, il est impossible de prévoir aujourd'hui exactement le temps qu'il fera dans un mois. Cependant là aussi, le chaos est confiné, et la météorologie terrestre n'est pas instable. Nous savons qu'en France, en janvier c'est l'hiver et que selon toute vraisemblance, avec le climat d'aujourd'hui nous n'aurons pas de canicule à cette époque, ni de tempête de neige sur le pays en juillet. Nous sommes également capables de calculer l'évolution des températures moyennes à la surface du globe d'ici 2100 sous l'effet du réchauffement

anthropique. C'est là toute la différence entre météorologie et climatologie. Tous les calculs de climatologie ont un caractère probabiliste, et la comparaison avec les études dynamiques du Système Solaire est assez frappante. Il nous est impossible de prédire exactement l'évolution de l'excentricité de l'orbite terrestre au-delà de 100 millions d'années, mais nous pouvons affirmer avec un degré élevé de probabilité que celle-ci ne dépassera jamais ~ 0.07 .

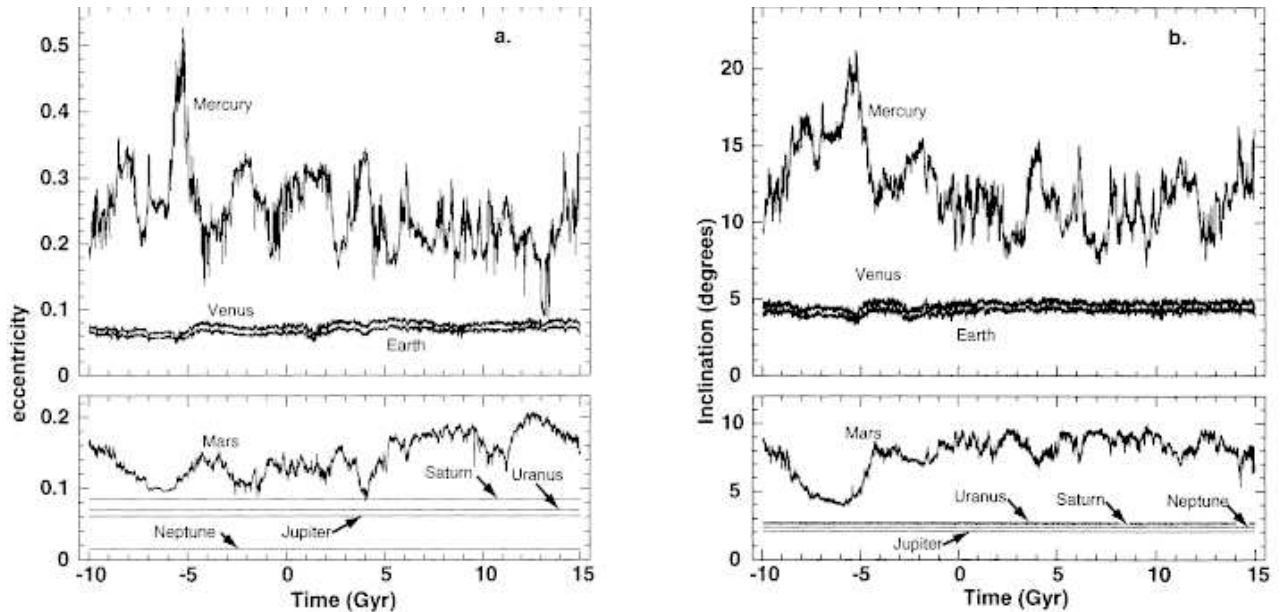


FIGURE 5.1: Evolution à long terme du Système Solaire calculée par Laskar (1994). On trace ici sur un intervalle de 25 milliards d'années les excentricités et inclinaisons maximales des planètes calculées sur des intervalles de 10 millions d'années. La date 0 correspond à aujourd'hui. La régularité de ces quantités révèle une dynamique régulière, alors que les variations erratiques sont révélatrices de chaos.

La figure 5.1 (Laskar 1994) illustre ces effets. On a calculé ici à partir de la situation actuelle l'évolution dynamique des planètes du Système Solaire sur un intervalle de 25 milliards d'années de part et d'autre de la situation actuelle. Précisons d'emblée que ce travail n'a aucune visée de prédiction. En effet, le Système Solaire est âgé de 4.65 milliards d'années seulement, et il lui en reste encore à peu près autant devant lui. Cette limitation est liée à l'évolution du Soleil en tant qu'étoile, et n'a donc aucun lien avec la dynamique. L'auteur a utilisé ici un intégrateur symplectique qui a pour propriété d'être rapide et stable. Cependant, les restrictions quant à la prédictibilité des choses évoquées s'appliquent toujours, et ce type d'intégration numérique a essentiellement une portée probabiliste. On trace ici l'évolution dans le temps de l'excentricité et de l'inclinaison *maximales* (sur 10 millions d'années) des planètes. C'est en quelque sorte l'enveloppe supérieure de la courbe très fluctuante de la figure 4.6. On s'est affranchi ici des variations séculaires qui interviennent sur des échelles de temps plus courtes. Que constate-t-on ? Les courbes pour les planètes géantes sont des droites. Ceci ne signifie pas que leurs excentricités sont constantes (on ne trace ici que l'enveloppe supérieure), mais que leur évolution séculaire est très stable dans le temps. Ceci trahit une dynamique régulière. Si on fait le même exercice avec les demi-grands axes, on trouve des droites similaires cette fois pour toutes les planètes. De fait, les demi-grands axes apparaissent de loin comme les éléments les plus stables du Système Solaire. L'enveloppe de l'évolution des excentricités et inclinaisons des planètes telluriques montre en revanche des fluctuations erratiques à long terme caractéristiques de chaos. Ce chaos reste très limité pour Vénus et la Terre. On voit donc bien que quoi qu'il arrive, même s'il

est impossible de calculer l'évolution exacte sur une telle échelle de temps, l'excentricité de la Terre ne dépasse pas $\sim 0.07-0.08$. Il en va tout autrement en revanche pour Mars et Mercure dont l'évolution est beaucoup plus chaotique. On remarque pour Mercure un pic à $e \simeq 0.5$ vers -5 milliards d'années. Cela ne signifie pas du tout que l'excentricité de Mercure atteignait cette valeur à cette époque. Cela signifie en revanche que si un calcul dynamique a été capable d'atteindre cette valeur, même à rebours dans le temps partant de la situation initiale actuelle, un autre pourrait l'atteindre dans le futur. En définitive, la probabilité est faible, mais Mercure pourrait atteindre un jour une telle excentricité. Mais à $e = 0.5$, l'orbite de Mercure couperait alors celle de Vénus. Les deux planètes pourraient alors subir une rencontre proche déstabilisante, qui aurait pour conséquence probable l'éjection de Mercure. Par conséquent, on *pourrait* aller jusqu'à perdre Mercure un jour, même si cette éventualité est très improbable. La conclusion de cette étude (Laskar 1994) est double : Premièrement, le Système Solaire interne est plein ! En effet, à cause de cette évolution chaotique, toute planète supplémentaire dans la zone des planètes telluriques croiserait un jour la route des autres et se verrait éjectée. Il est d'ailleurs bien connu que les astéroïdes géocroiseurs qui tournent dans cette zone ont typiquement un temps de vie dynamique moyen de l'ordre de 10 millions d'années avant de subir une rencontre proche avec la Terre ou Vénus et se faire éjecter. Deuxièmement, dans la mesure où on pourrait perdre Mercure, il est impossible de dire de manière ferme et définitive si le Système Solaire est stable ou non. Tout ce qu'on peut dire est que c'est très probable, et qu'il l'a été de manière sûre et certaine jusqu'alors. On voit donc que le chaos *peut* engendrer l'instabilité, mais pas de manière systématique.

La figure 5.2, extraite de Duncan et al. (1995), illustre l'extrême variabilité des conditions de stabilité dans le Système Solaire externe. On y représente ici le temps de vie dynamique avant éjection par rencontre proche de particules tests dans la ceinture de Kuiper au-delà de Neptune, en fonction de leur demi-grand axe et excentricité initiaux. Toutes les inclinaisons initiales ont été fixées à 1° . On voit clairement que la zone en bas à droite est la plus stable (couleur jaune). C'est logique, de tels objets gravitent loin de Neptune et sur des orbites peu excentriques. Ils ne sont jamais amenés à s'approcher de Neptune. Leur dynamique est régulière tout en étant intrinsèquement légèrement chaotique, ce qui suffit à garantir la stabilité. Les zones noires en revanche sont caractérisées par un très fort chaos qui engendre rapidement une instabilité, et comme on pouvait s'y attendre, plus un objet est amené à s'approcher de Neptune au périastre, plus il a de chances d'être éjecté rapidement. Entre les deux, nous remarquons une alternance d'îlots de stabilité et de zones plus instables. Certains de ces îlots correspondent à des résonances avec Neptune comme la $2 : 3$. La dynamique dans cette résonance y est certes chaotique, mais la stabilité y est cependant plus grande que dans les zones adjacentes. Ceci est dû au mécanisme protecteur de la résonance vis-à-vis des rencontres proches. Les objets situés dans les zones immédiatement adjacentes ne bénéficient pas de cet effet protecteur et subissent tôt ou tard une rencontre proche déstabilisante. Ceci explique au passage en partie pourquoi cette résonance et d'autres concentrent des objets (Fig. 4.7).

5.2 Quantification du chaos : Exposants de Lyapunov

5.2.1 Définition et exemples

Dès lors que nous savons qu'un système dynamique est intrinsèquement chaotique, il apparaît utile de pouvoir disposer d'outils permettant de quantifier le degré de ce chaos. L'exposant (ou le temps) de Lyapunov constitue un de ces outils.

Considérons deux évolutions dynamiques $q_1(t)$ et $q_2(t)$ partant de deux situations initiales

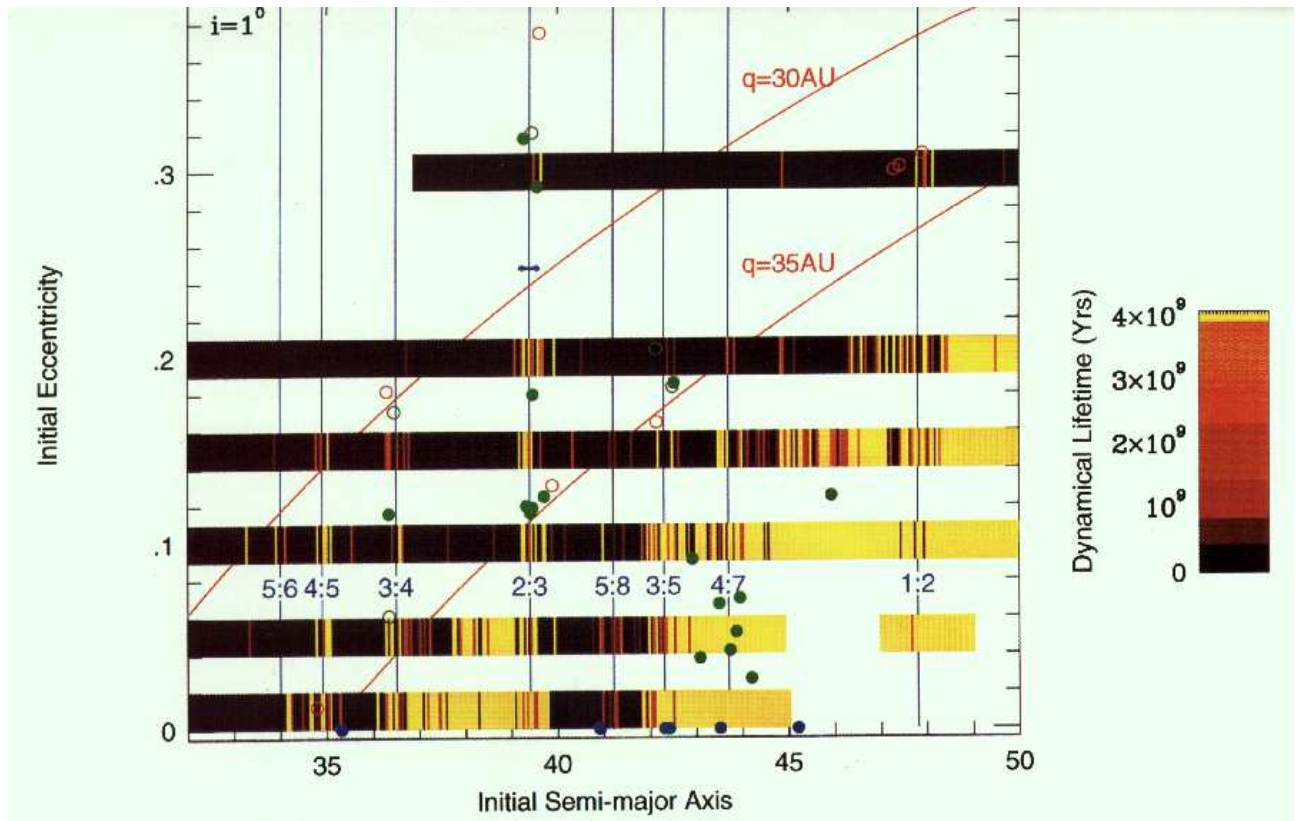


FIGURE 5.2: Temps de vie dynamique avant éjection de particules tests dans la ceinture de Kuiper au-delà de Neptune, dans un diagramme (demi-grand axe initial, excentricité initiale). La position des principales résonances de moyen mouvement avec Neptune est indiquée sur le graphique au moyen de barres verticales. Les courbes obliques sont des lignes de périhélie constant. Le code de couleur indique le temps de vie, du plus court (noir) au plus long (jaune).

très voisines. Nous ne précisons pas ici ce qu'il y a dans $q_1(t)$ et $q_2(t)$, ce peut être des éléments d'orbite d'un ou plusieurs corps, etc... Tout ce que nous aurons besoin de retenir, c'est qu'il s'agit de grandeurs multidimensionnelles caractérisant l'état dynamique du système étudié. Si le système étudié est intrinsèquement chaotique, les deux situations $q_1(t)$ et $q_2(t)$ vont inévitablement diverger exponentiellement avec le temps, même si les deux situations sont initialement très proches. Nous aurons donc

$$\|q_1(t) - q_2(t)\| \propto e^{\lambda t} \quad . \quad (5.1)$$

Dans cette expression, la norme mentionnée dépend du problème étudié. Nous aurons juste besoin de savoir qu'il s'agit d'une norme mesurant l'écart entre les deux situations. L'exposant λ qui apparaît dans cette expression est caractéristique de l'état dynamique du système. Plus il est grand, plus les solutions vont diverger rapidement. Cet exposant s'appelle *exposant de Lyapunov*. Son inverse $t_1 = 1/\lambda$ a la dimension d'un temps. Techniquement c'est le temps au bout duquel les deux solutions vont diverger significativement, donc le temps au bout duquel le chaos se développe. Le chaos sera d'autant plus important que t_1 sera petit. En météorologie terrestre, le temps de Lyapunov typique est de l'ordre de deux semaines. Ceci rend illusoire toute tentative de prédiction réaliste du temps au-delà de cette échelle. Concernant le système dynamique formé par les planètes principales du Système Solaire, le temps de Lyapunov est de plusieurs dizaines de millions d'années.

Les exposants de Lyapunov ne concernent pas que les évolutions chaotiques. Une orbite

non-chaotique aura aussi un exposant de Lyapunov, mais ce dernier sera nul ou même négatif. Ceci dit, en mécanique céleste, on aura jamais $\lambda < 0$. $\lambda < 0$ signifie que deux situations initialement différentes vont avoir tendance à se rapprocher. Un tel système possède donc un *attracteur*. Or un système Hamiltonien ne peut pas posséder d'attracteur. En effet, en vertu du théorème de Liouville, le volume dans l'espace des phases d'un flot Hamiltonien doit rester constant. Un système avec un attracteur verrait ce volume se contracter. Par conséquent, un système Hamiltonien aura nécessairement $\lambda \geq 0$. S'il est non chaotique, il vérifiera $\lambda = 0$. Ce sera par exemple le cas d'un mouvement Képélérien pur. Sinon, on aura $\lambda > 0$. Ce sera le cas de la plupart des systèmes gravitationnels, même si les exposants de Lyapunov peuvent varier considérablement d'un système à l'autre, et même à l'intérieur d'un même système. En général, le chaos est plus important au voisinage de résonances, et encore plus lorsqu'on s'approche des points de transition et de séparatrices comme dans le figure 4.9. Une orbite résonante à faible amplitude de libration sera toujours moins chaotique qu'une orbite à forte libration qui s'approche de la séparatrice.

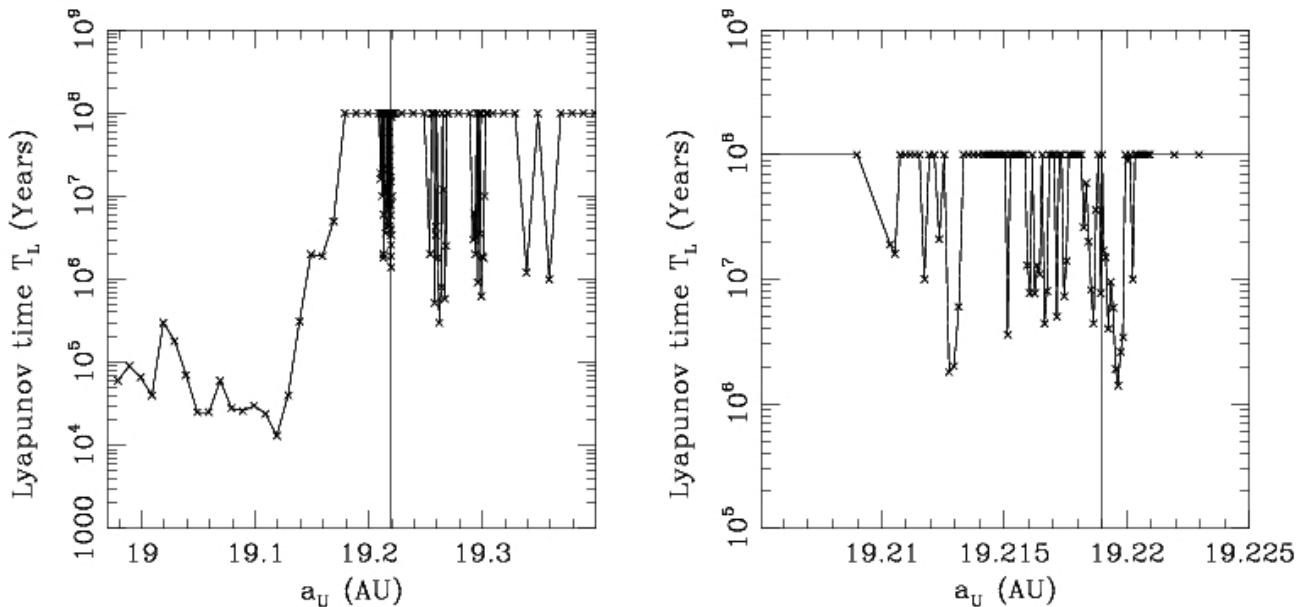


FIGURE 5.3: Temps de Lyapunov calculés numériquement en fonction du demi-grand axe orbital dans la région de l'orbite d'Uranus (Murray & Holman 1999). L'orbite d'Uranus est marquée par une barre verticale noire. La figure de droite est un agrandissement de celle de gauche proche de l'orbite d'Uranus.

La figure 5.3 illustre cette variation. On a tracé ici les temps de Lyapunov dans le Système Solaire dans la région autour de l'orbite d'Uranus. Le calcul numérique a été plafonné à 10^8 ans, de telle sorte que 10^8 ans représente ici le maximum possible. La position d'Uranus est marquée par une barre noire, et se situe clairement dans une région peu chaotique. On remarque toutefois des zones où le temps de Lyapunov est beaucoup plus petit, donc avec un chaos plus fort. Toute la zone entre 19 AU et 19.1 AU apparaît ainsi nettement plus chaotique que le reste. Ceci est lié à la présence de la résonance 2 : 1 avec Neptune à cet endroit. De même, vers 19.15 AU, la résonance 1 : 7 avec Jupiter abaisse également le temps de Lyapunov. Enfin, autour de 19.3 AU, les variations locales sont dues à des résonances de moyen mouvement à trois corps qui sont moins fortes. Ce que nous retiendrons de cet exemple est que la présence de résonances diverses dans le Système Solaire a tendance à rendre les orbites localement très chaotiques. Mais elles ne

sont par forcément instables, les résonances s'autoentretenant et agissant comme mécanismes protecteurs.

5.2.2 Calcul des exposants de Lyapunov : MLE et MEGNO

Le calcul pratique des exposants de Lyapunov dans un système dynamique donné est un problème assez ardu. Le chaos étant par nature hautement non-linéaire, il n'existe en dehors de quelques cas d'école aucune formule explicite, aucun procédé analytique permettant de calculer explicitement l'exposant de Lyapunov à partir d'une situation initiale donnée. La seule voie d'approche ne peut être que numérique. C'est par exemple numériquement que les temps de Lyapunov de la figure 5.3 ont été obtenus.

On distingue deux approches de calcul, le MLE (*Maximum Lyapunov Exponent*) et le MEGNO (*Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits*). Toutes deux reposent sur l'intégration numérique de deux ou plusieurs solutions initialement très voisines. Considérons donc une situation initiale p_0 . Là encore, p_0 est une quantité multidimensionnelle qui représente l'ensemble des variables et moments à considérer. Considérons également une situation très voisine $p_0 + \delta p_0$ avec $\|\delta p_0\| \ll \|p_0\|$. Ces deux conditions initiales vont alors donner deux évolutions différentes $p(t)$ et $p(t) + \delta p(t)$. Au bout d'un moment, l'écart $\delta p(t)$ n'aura plus aucune raison d'être une quantité petite. Le MLE L est défini par

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\delta p(t)\|}{\|\delta p_0\|} \right) . \quad (5.2)$$

Même défini comme cela, le calcul pratique du MLE est loin d'être une tâche facile, car la divergence exponentielle de l'écart $\delta p(t)$ peut engendrer des erreurs numériques. La bonne approche a été donnée par Benettin (1980). Partant des deux solutions initiales, on intègre numériquement les deux situations. Au bout d'un temps de renormalisation t_{norm} fixé à l'avance, on regarde l'écart numérique $\delta p(t_{\text{norm}})$. On calcule alors

$$s_1 = \frac{\|\delta p(t_{\text{norm}})\|}{\|\delta p_0\|} \quad \text{et} \quad \delta p_1 = \frac{\delta p(t_{\text{norm}})}{s_1} . \quad (5.3)$$

On appelle $p_1 = p(t_{\text{norm}})$ tel qu'il a été calculé numériquement. On reprend alors le calcul des deux évolutions dynamiques, non pas à partir de là où on s'était arrêté avant, mais à partir de p_1 et $p_1 + \delta p_1$ (au lieu de $p_1 + \delta p(t_{\text{norm}})$). En somme on réduit artificiellement l'écart de la solution voisine d'un facteur s_1 afin d'éviter toute divergence exponentielle. On calcule ainsi les deux évolutions jusqu'à $t = 2t_{\text{norm}}$. A ce moment, on calcule de la même manière qu'au-dessus un nouveau facteur de renormalisation s_2 et un écart normalisé δp_2 , puis on recommence l'intégration, et ainsi de suite. On a alors le résultat suivant (Benettin 1980)

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \ln s_i}{nt_{\text{norm}}} . \quad (5.4)$$

Dans la pratique, on continue l'intégration et le calcul de L par ce procédé jusqu'à ce que la valeur se stabilise et donne l'exposant cherché. La figure 5.4 illustre ce procédé. On trace ici la progression du calcul du MLE du système de planètes extrasolaires Gliese 581 (Beust 2008). Il s'agit d'un système extrasolaire avec des planètes de type terrestre dont les périodes orbitales autour de leur étoile centrale s'échelonnent entre quelques jours et quelques semaines. A l'époque en 2008, seules 3 planètes étaient connues. Depuis, une quatrième planète plus petite

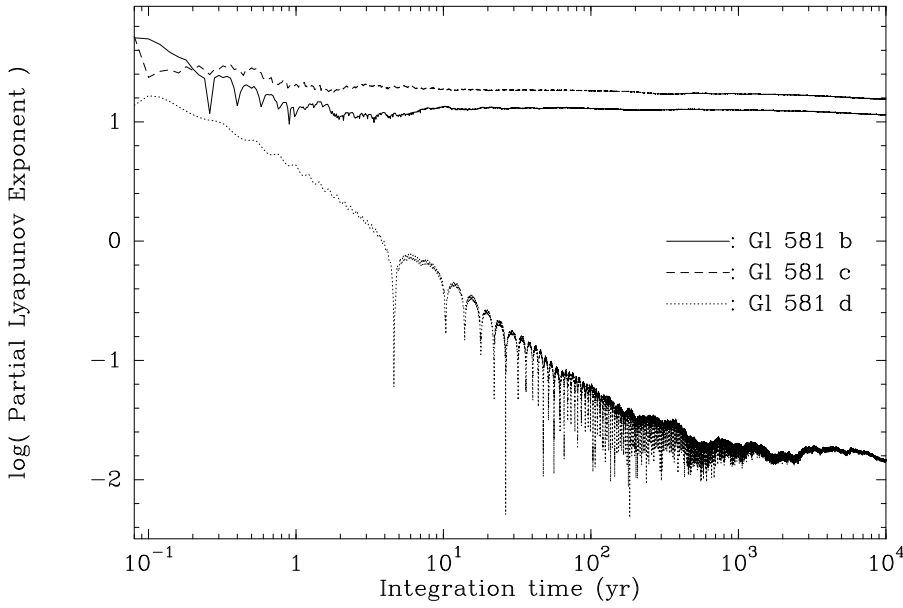


FIGURE 5.4: Calcul pratique du MLE de chaque planète dans le système extrasolaire Gliese 581 (Beust 2008), alors considéré comme système de 3 planètes. La valeur de L calculée numériquement est tracée en fonction du temps au fil des renormalisations. Au bout d'un certains temps, les valeurs se stabilisent fournissant les MLEs.

et plus proche de l'étoile a été découverte (Mayor 2009). A l'époque, ce système présentait (et présente toujours) un intérêt particulier car deux de ces planètes pourraient présenter des conditions de température et de pression à leur surface qui les rendraient potentiellement habitables¹. L'étude dynamique des perturbations mutuelles de ces planètes s'imposait donc, en particulier une estimation du degré de chaos inhérent à ce système. La figure 5.4 montre la progression du calcul du MLE de chaque planète par la formule (5.4). Les valeurs calculées diminuent jusqu'à se stabiliser. On remarque deux choses : Premièrement, les valeurs finales ne sont pas nulles, ce qui signifie que le système des 3 planètes est intrinsèquement chaotique exactement comme le Système Solaire. Deuxièmement, la planète d (la plus externe) est de loin beaucoup moins chaotique que les deux autres. Sa dynamique est donc beaucoup plus régulière et proche d'un tore de KAM quasi-périodique.

L'indicateur MEGNO repose lui aussi au départ sur la formule (5.2), en remarquant qu'on peut remplacer le logarithme par une intégrale :

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\delta p(t)\|}{\|\delta p_0\|} \right) \quad \Leftrightarrow \quad L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{\|\delta p(t')\|} \frac{d}{dt} (\|\delta p(t')\|) dt' \quad . \quad (5.5)$$

On définit alors les quantités suivantes (Cincotta & Simó 2000) :

$$\text{MEGNO} = Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{t'}{\|\delta p(t')\|} \frac{d}{dt} (\|\delta p(t')\|) dt' \quad ; \quad (5.6)$$

$$\text{MEGNO moyenné} = \bar{Y}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(t') dt' \quad , \quad (5.7)$$

les deux intégrales étant calculées numériquement au fil de l'intégration par des procédés classiques. Pour une orbite quasi-périodique caractérisée par $L = 0$, $\|\delta p(t)\|$ croît linéairement avec le temps, $Y(t)$ oscille autour de la valeur 2 avec une amplitude finie. On a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Y}(t) = 2$. A l'inverse pour une orbite chaotique, $\|\delta p(t)\|$ croît exponentiellement avec le temps. et $Y(t)$

1. ce qui signifie en clair que l'eau pourrait exister à l'état liquide à la surface. Pour l'instant il ne s'agit bien entendu que d'hypothèses !

oscille autour de la solution $Y(t) = Lt$. On a alors pour t grand

$$\bar{Y}(t) \sim \frac{L}{2}t \quad , \quad (5.8)$$

ce qui fournit un moyen de calcul pratique de L .

A première vue, les deux approches du calcul de L semblent équivalentes et doivent conduire au même résultat. De fait, MLE et MEGNO ont des propriétés très similaires. Cincotta & Simó ont cependant montré que le calcul par le MEGNO avait tendance à converger plus rapidement vers la limite souhaitée. La raison vient du fait que le calcul du MLE par la formule (5.4) garde plus longtemps mémoire des premiers pas d'évolution de δp , alors que le calcul au moyen de l'intégrale (5.7) donne un poids préférentiel à l'évolution tardive de ce même écart. Par ailleurs, Cincotta & Giordano ont également montré que l'usage du MEGNO permettait de détecter des régions chaotiques plus fines que par le MLE. Le MEGNO apparaît donc comme supérieur au MLE, mais sa mise en pratique est toutefois moins aisée.

Pour revenir au Système Solaire, le résultat des études de chaos montre que globalement tout le système est chaotique avec des exposants de Lyapunov toujours positifs, mais avec des variations énormes entre les divers corps qui le composent. Le système des planètes principales est globalement chaotique mais faiblement. Les planètes géantes sont de loin les moins chaotiques avec des temps de Lyapunov qui se comptent en centaines de millions d'années. En comparaison les planètes telluriques comme la Terre ont des temps de Lyapunov de plusieurs *dizaines* de millions d'années. De manière générale, là où il y a des résonances, le chaos est plus marqué. C'est ainsi que Pluton a un temps de Lyapunov qui ne dépasse par 20 millions d'années. Bien entendu, de nombreux petits corps du Système Solaire ont des temps de Lyapunov beaucoup plus courts encore.

Il convient toutefois de se souvenir que ce chaos n'implique en rien l'instabilité du système. Le Système Solaire est stable depuis sa formation il y a plus de 4.65 milliards d'années, et Pluton est piégé en résonance avec Neptune depuis bien plus que 20 millions d'années. Le chaos n'implique pas l'instabilité.

5.3 Visualisation du chaos : Sections de Poincaré

Dans la mesure où le travail analytique n'est pas souvent possible en raison des non-linéarités inhérentes aux systèmes dynamiques, on a souvent recours à des outils numériques et graphiques afin de visualiser au moins qualitativement la nature d'une évolution dynamique. Nous avons déjà utilisé des outils de ce type lors de l'étude de la résonance de Kozai et des résonances (Figs. 4.4 et 4.9). Dans ces deux cas, nous avons réussi via des simplifications à réduire le Hamiltonien conservatif à un seul degré de liberté, ce qui rendait possible le tracé de diagrammes de phase avec des courbes de niveau du Hamiltonien. Bien entendu, ces courbes sont la plupart du temps tracées par un algorithme d'isocontour, et le Hamiltonien moyenné est parfois lui-même calculé à partir de méthodes de calcul numériques d'intégrales. C'est pourquoi on parle de méthodes *semi-numériques* pour qualifier ces approches.

Une telle stratégie n'est pas possible lorsque le Hamiltonien ne se réduit pas à un seul degré de liberté. C'est malheureusement assez fréquent. Dans ce cas, en dehors de ce qui est possible analytiquement, seule l'intégration numérique permet d'explorer la dynamique. La technique de la section de Poincaré est un moyen numérique permettant de tracer ce qui ressemble à des diagrammes de phase typiques des Hamiltoniens à un degré de liberté. La figure 5.5 illustre cette technique. L'idée est de partir d'une (en général plusieurs) intégration(s) numérique(s) dans l'espace, et de repérer la position du mobile lors du passage par un plan particulier, par

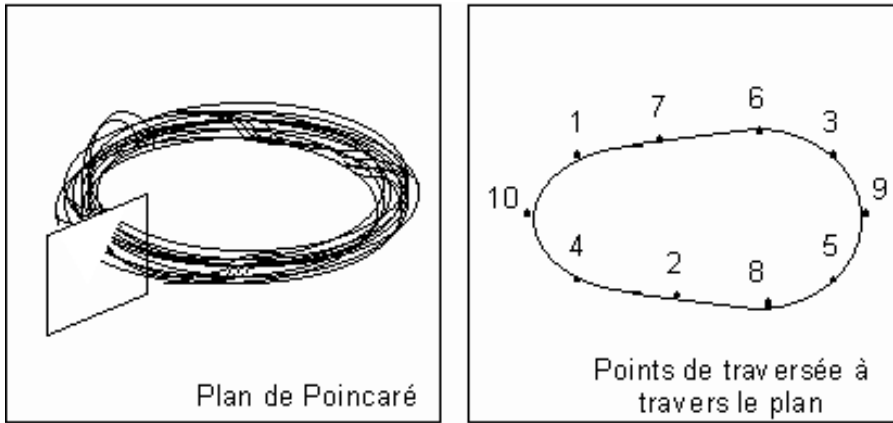


FIGURE 5.5: Illustration de la technique de la section de Poincaré. Lors d'une intégration numérique, on repère les points de passage à travers un plan donné. On trace ensuite l'ensemble.

exemple une coordonnée $x = 0$. On trace ensuite les points obtenus au fil de l'intégration dans une projection de l'espace des phases sur le plan. L'aspect des figures obtenues trahit alors la nature de la dynamique.

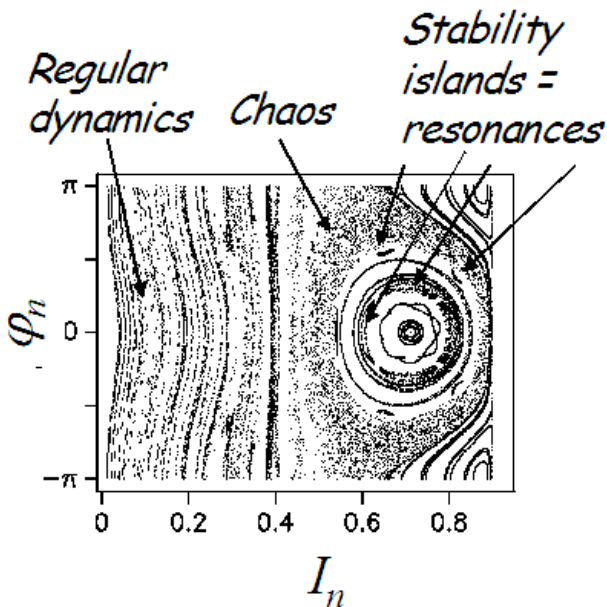


FIGURE 5.6: Illustration des différents types de courbes qu'on peut obtenir dans une section de Poincaré.

exemple concret. Plutôt que d'écrire un véritable Hamiltonien à deux degrés de liberté et calculer des sections de Poincaré, nous allons utiliser l'artifice beaucoup plus simple de l'application standard de Chirikov (*standard map* en anglais). Partant d'un point de coordonnées (q_0, p_0) dans $[0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$, et se donnant un paramètre ϵ donné, on calcule récursivement une série de points (q_n, p_n) au moyen de l'algorithme suivant

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + p_n \pmod{2\pi} \\ p_{n+1} = p_n + \epsilon \sin(q_{n+1}) \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (5.9)$$

en prenant soin de ramener p_{n+1} entre $-\pi$ et π à chaque fois. Cette itération peut être vue comme la section de Poincaré d'un Hamiltonien à deux degrés de liberté (Henrard 1970). Si

La figure 5.6 illustre le type de tracé qu'on peut obtenir. Ici, on a représenté un diagramme (I, ϕ) où ϕ sera un angle et I l'action conjuguée. Dans la partie gauche du diagramme, on voit que les points se regroupent sur des courbes assez bien organisées. Il s'agit là de dynamique régulière où l'angle ϕ circule. Les courbes qui apparaissent matérialisent les tores de KAM sur lesquelles le mouvement est confiné. Dans la partie droite, on trouve d'autres courbes où l'angle ϕ ne circule plus, mais effectue des libérations autour de $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$. Ces orbites sont typiques d'une dynamique résonante. Entre les deux, apparaît une zone où les points sont répartis sans ordre défini. Cette zone correspond à une dynamique chaotique, et la section de Poincaré permet de visualiser cela.

Les sections de Poincaré sont en pratique surtout utiles pour des Hamiltoniens à deux degrés de liberté. Nous allons prendre un

$\epsilon = 0$, le schéma ci-dessus se résume à la section de Poincaré en $q_2 = 0$ du Hamiltonien intégrable $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1^2/2 + 2\pi p_2$ (avec $q = q_1$ et $p = p_1$), qui correspondrait à $p_1 = \text{cte}$ et q_1 circulant linéairement avec le temps. Le paramètre ϵ est donc une perturbation. La figure 5.7

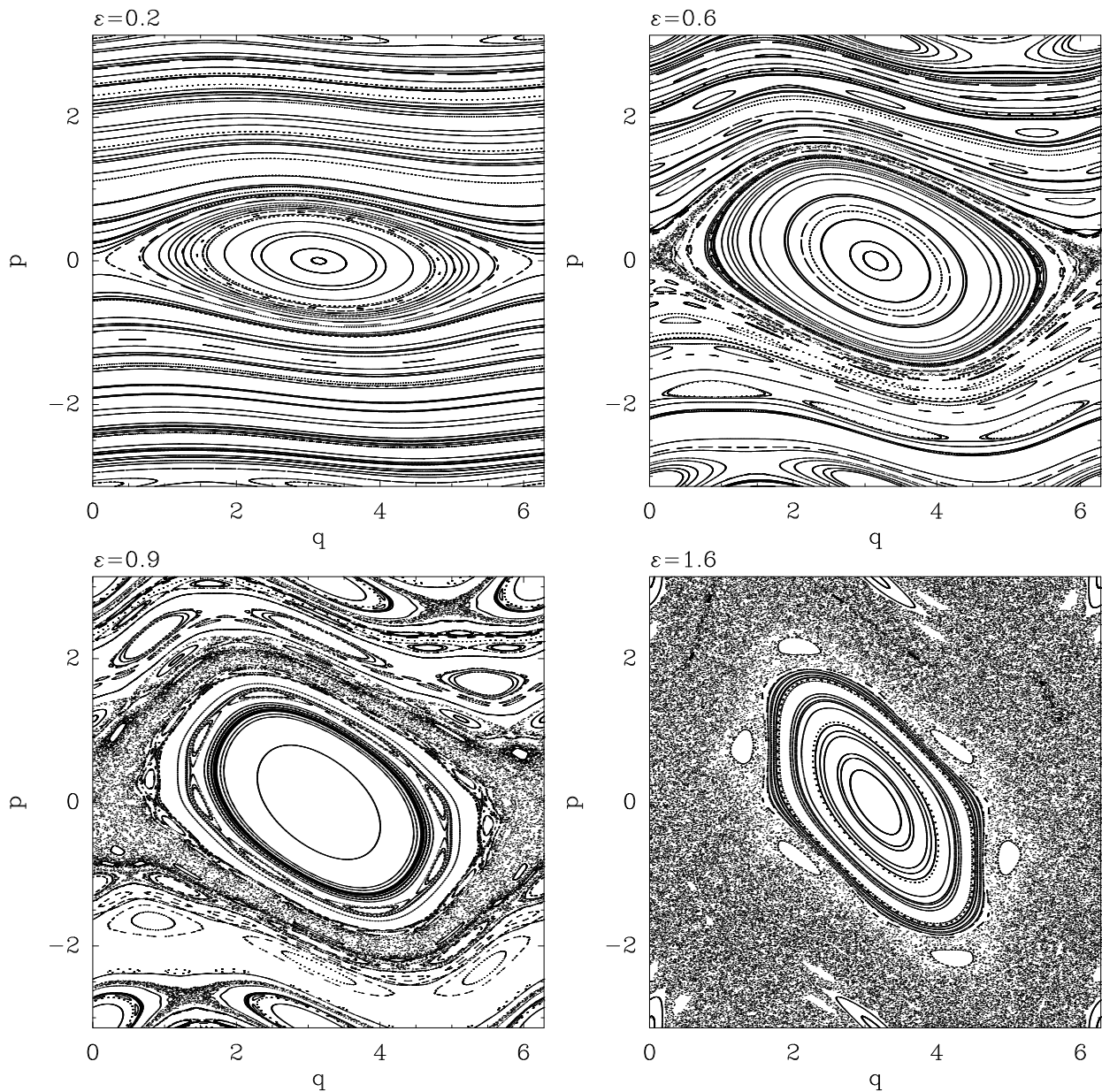


FIGURE 5.7: Portraits de phase de l'application standard pour différentes valeurs du paramètre ϵ .

montre plusieurs diagrammes de phase dans le plan (q, p) de l'application standard, pour des valeurs croissantes du paramètre ϵ . Précisons avant toute chose qu'en vertu de ce qui a été dit plus haut, pour $\epsilon = 0$, le même exercice conduit à tracer des droites horizontales $p = \text{cte}$. Nous retrouvons pour l'essentiel ces droites un peu déformées dans le cas $\epsilon = 0.2$. Ces courbes représentent les tores de KAM de dynamique régulière qui caractérisent ce mouvement peu perturbé. Nous voyons aussi apparaître des courbes fermées autour de $(q = \pi, p = 0)$ qui correspondent à une résonance (q ne circule plus), mais là aussi, la dynamique est régulière tout en étant résonante. Pour $\epsilon = 0.6$, les tores de KAM sont toujours là, la zone résonante a pris plus d'ampleur, et on commence à voir apparaître à l'interface entre les deux zones des nuages

de points diffus typiques de chaos, en particulier au voisinage de la séparatrice en $(q = 0, p = 0)$. Pour $\epsilon = 0.9$, la zone chaotique a pris de l'ampleur, et la zone des tores de KAM est moins étendue. Pour $\epsilon = 1.6$, les tores de KAM ont disparu. Il ne subsiste plus comme dynamique régulière que la zone résonante au milieu d'une zone chaotique. Si on augmente encore ϵ , la zone résonante finit par se réduire de plus en plus et le chaos envahit tout.

Ce cas d'école illustre bien comment on passe de l'ordre au chaos en augmentant l'amplitude d'une perturbation. Le chaos se manifeste toujours en premier au voisinage de séparatrices, à l'interface de zones résonantes et de zones régulières non-résonantes. Il en va tout autant dans les situations réelles de mécanique céleste. On trouvera par exemple des exemples concrets de sections de Poincaré pour des astéroïdes à l'intérieur de résonances de moyen mouvement avec Jupiter dans Moons & Morbidelli (1993,1995,1998).

Il est bon également de préciser que dans la figure 5.7, en dehors de la situation $\epsilon = 1.6$ qui traduit un fort chaos, la zone chaotique n'envahit pas *tout* l'espace des phases, mais reste confinée dans un secteur bien défini autour de la séparatrice. C'est bien entendu d'autant plus vrai que ϵ est petit. C'est exactement le sens que nous donnons ici à la notion de chaos confiné.

5.4 Détecter le chaos : L'analyse en fréquences

L'analyse en fréquences est un puissant outil de détection du chaos introduit par Laskar (1990) pour l'étude de l'évolution séculaire des planètes du Système Solaire. Elle a trouvé depuis d'autres champs d'application. L'idée de départ est simple : Les orbites quasi périodiques sur des tores de KAM sont caractérisées par un nombre fini de fréquences caractéristiques d'évolution, à la manière des fréquences fondamentales de précession que nous avons défini au chapitre précédent. Dans une dynamique régulière sur un tore de KAM, ces fréquences sont perturbées, mais elles subsistent néanmoins.

Une orbite chaotique ne présentera en revanche aucune fréquence caractéristique bien définie. Le point fondamental est que sur un intervalle fini dans une intégration numérique, une analyse de Fourier doit logiquement permettre de dégager des fréquences caractéristiques si elles existent. Plus encore que leur existence, c'est leur stabilité dans le temps qui sera un critère déterminant pour caractériser des orbites régulières (Laskar et al. 1990–2002).

Considérons un système dynamique caractérisé par ses angles $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$. Appelons $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ le jeu de fréquences caractéristiques s'il existe, avec pour convention que ω_i représentera la fréquence principale d'évolution de q_i , même si nous avons vu que cette vision simpliste ne correspond pas tout-à-fait à la réalité. Pour un intervalle de temps T suffisamment grand (typiquement plus grand que le maximum des $(1/\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$), on calcule pour chaque j la fonction

$$\Phi_j(\omega) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp(iq_j(t)) \exp(-i\omega t) dt \quad , \quad (5.10)$$

et on recherche la valeur ω^* qui réalise le maximum de cette fonction. Cette valeur s'approchera de la valeur de la fréquence principale d'évolution de q_j d'autant mieux que le mouvement est quasi-périodique. ω^* sera *égal* à cette fréquence si le mouvement est rigoureusement périodique. En effet si $q_j = A\omega_j t$ exactement, l'intégrale ci-dessus se calcule et on obtient

$$\Phi_j(\omega) = A \frac{\sin [(\omega - \omega_j)T/2]}{[(\omega - \omega_j)/2]} \quad , \quad (5.11)$$

fonction qui présente bien un pic en $\omega^* = \omega_j$. Dans le cas d'un mouvement plus complexe caractérisé par plusieurs fréquences, plusieurs pics apparaîtront, mais celui qui aura l'amplitude la plus grande correspondra en général à la fréquence principale.

Bien entendu, l'opération est renouvelée ensuite plus loin dans l'intégration numérique à partir d'autres valeurs de t_0 afin de tester la stabilité du jeu de fréquences obtenu. Précisons enfin que de manière générale, l'usage d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) est inapproprié pour déterminer le jeu de fréquences fondamentales avec précision, essentiellement parce que dans la plupart des cas, les angles $(q_j)_{1 \leq j \leq n}$ ne sont pas bien périodiques sur l'intervalle considéré.

Une application à grande échelle de ce formalisme, tirée de Robutel & Laskar (2001) est représentée sur la figure 5.8. Les auteurs ont ici intégré numériquement dans le Système Solaire avec les planètes les orbites d'un grand nombre de petits corps fictifs à partir de demi-grands axes et excentricité initiaux (a_0, e_0) variés. L'intégration a couvert un temps T de plusieurs millions d'années. A l'issue de cela, les auteurs ont calculé la fréquence principale de précession du périhélie de chaque petit corps, une première fois en intégrant entre $t = 0$ et $t = T/2$, puis une deuxième fois entre $t = T/2$ et $t = T$. Il ont obtenu ainsi pour chaque corps deux valeurs ω_1 et ω_2 , et ont ensuite calculé l'écart relatif $\sigma = 1 - \omega_2/\omega_1$. La figure représente la valeur de σ avec un code de couleur allant du bleu pour les zones présentant les plus petites valeurs (donc les moins chaotiques) au rouge là où σ est le plus grand. Les zones noires correspondent à des résonances de moyen mouvement. On reconnaît immédiatement la zone moins chaotique située entre 2 AU et 4 AU qui correspond à la ceinture principale d'astéroïdes. On voit aussi vers l'extérieur du Système Solaire que plus les objets gravitent loin dans la ceinture de Kuiper et à basse excentricité, moins ils sont chaotiques, et plus leur dynamique est potentiellement régulière. Ce travail qui date de 2001 ne prend toutefois pas en compte l'hypothétique Planète 9 à l'extérieur du Système Solaire proposée par Batygin & Brown (2016).

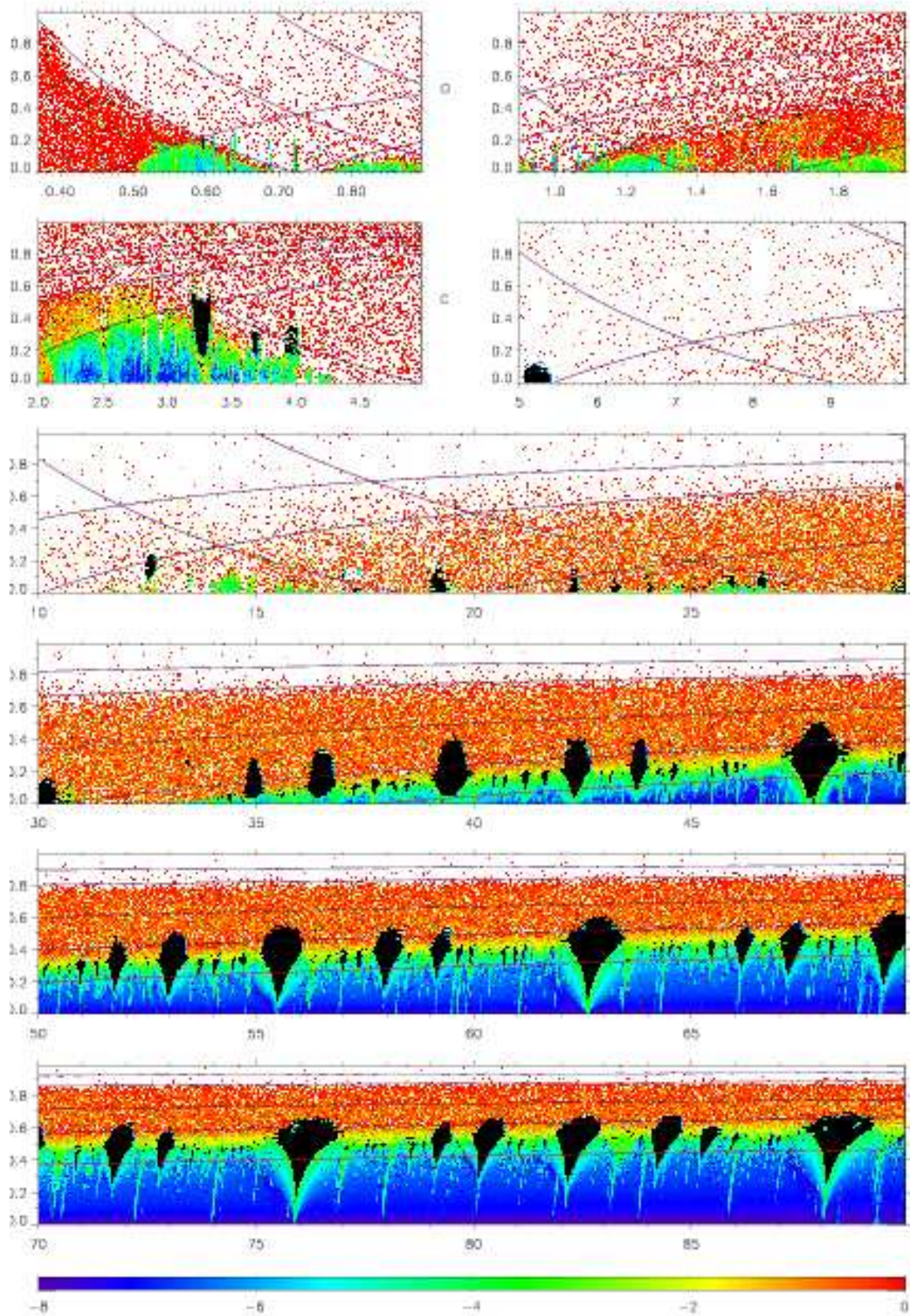


FIGURE 5.8: Carte de fréquence de la dynamique de petits corps fictifs dans le Système Solaire. Les couleurs codent la différence relative de fréquence principale de précession du périhélie de petits corps calculée sur deux intervalles de temps successifs, en fonction de leurs demi-grands axes et excentricités initiaux (a_0, e_0). Le bleu correspond à la variation minimale, le rouge à la variation maximale. Les zones noires sont des zones résonantes.

Chapitre 6

Dynamique des astres non ponctuels

6.1 Les forces de marée

En assimilant le problème de la dynamique d'un système de planètes à un problème à N corps, nous avons implicitement supposé que les planètes et tous les autres corps étaient des objets ponctuels. Or les planètes ont des tailles non nulles. Nous avons toutefois vu au chapitre 1 qu'un corps à symétrie sphérique générerait un potentiel identique à celui d'un corps ponctuel. Pour des planètes presque sphériques, l'écart au potentiel Képlérien est faible et ne joue qu'à proximité immédiate de sa surface.

Il y a toutefois une autre difficulté liée à la taille non nulle des corps célestes. Les forces gravitationnelles qu'ils subissent de la part des autres corps sont en effet susceptibles de varier à l'intérieur même de leur volume. Les forces qui en résultent portent le nom de forces (ou effets) de *marée*. Les forces de marée sont donc avant tout des effets différentiels de la gravitation dus à la taille non nulle des corps. Leur portée est générale dans l'Univers et dépasse largement le cadre familier des marées océaniques sur Terre.

6.1.1 Effet de marée Terre-Lune

Commençons par décrire l'effet de marée entre deux corps voisins comme la Terre et la Lune, à l'origine entre autres des marées océaniques. La Lune produit un effet de marée sur les océans, sur le corps solide de la Terre, et sur l'atmosphère. L'effet des marées atmosphériques sur l'évolution du système Terre-Lune est négligeable. Considérons pour approximation que la Lune est en orbite circulaire autour de la Terre, et que celle-ci est déformable comme du caoutchouc. La figure 6.1 représente la force exercée par la Lune en divers points de la Terre. Les flèches ont

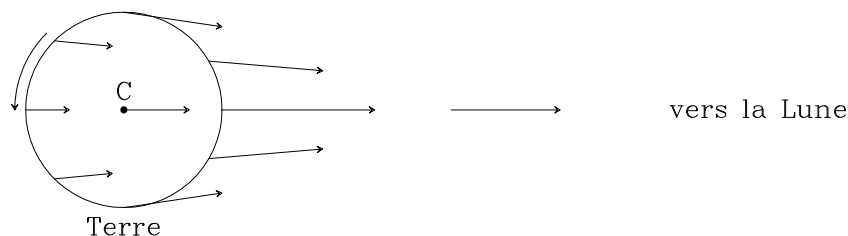


FIGURE 6.1: Force d'attraction de la Lune en divers points de la Terre. La force est d'autant plus grande que le vecteur est long.

été représentées de tailles différentes pour souligner le fait que l'intensité de cette force n'est pas la même partout. Elle est en effet maximale au plus proche de la Lune et minimale au plus loin. Cette figure ne reflète cependant pas la réalité telle qu'elle est ressentie localement. En effet, le mouvement orbital entre la Terre et la Lune compense l'attraction *au centre C*. Si on

se place dans un référentiel tournant avec les deux astres, chacun d'entre eux est à l'équilibre. Les forces d'inertie compensent donc l'attraction gravitationnelle. Dans le cas présent, il faut comprendre que les deux astres tournent autour de leur centre de gravité commun, et que ce centre n'est pas au centre de la Terre C . Bien entendu, le rapport de masse (1/81) entre la Terre et la Lune fait que le centre de gravité de l'ensemble est situé à l'intérieur même de la Terre, mais pas au centre C . Il existe donc dans le repère tournant une force centrifuge en C qui compense exactement l'attraction lunaire. Pour étudier l'effet local des forces de marée et des déformations qui en résultent, il faut d'abord retrancher en tout point l'attraction au centre C . Il faut étudier la *différence d'attraction* entre chaque point et le centre de la Terre. La figure 6.2 montre le résultat de cette soustraction. Il y a deux protubérances dans des sens

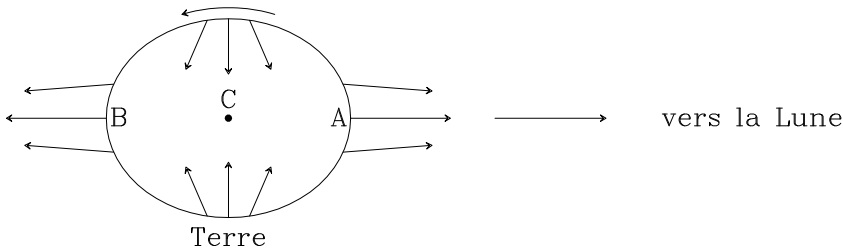


FIGURE 6.2: Force résiduelle d'attraction de la Lune en divers points de la Terre après soustraction de l'attraction centrale.

opposés en A et B , ce qui explique au passage qu'il y a (en général) deux marées par jour en un lieu donné, du fait que la Terre tourne sur elle-même. Ces forces de marée élèvent l'eau des océans d'environ 1 m aux points A et B , tandis que la Terre tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur la figure 6.2.

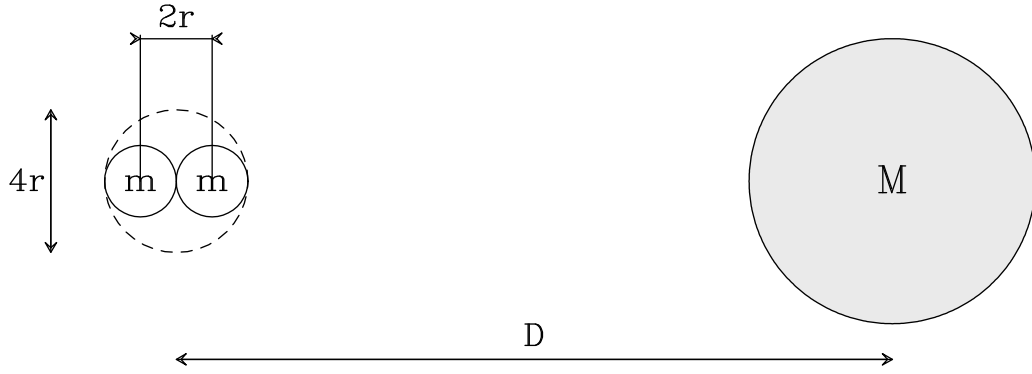
Le phénomène réel est en fait beaucoup plus complexe. Déjà, ce qui est vrai pour les masses océaniques est également vrai pour toute la croûte terrestre. Le sol se soulève d'environ 50 cm deux fois par jour. Si nous observons des marées océaniques sur Terre, c'est juste parce que le phénomène est plus important pour les masses océaniques que pour le sol à cause de leur plus grande fluidité. De plus, la Lune ne gravite pas dans le plan équatorial terrestre. Au terme semi-diurne que nous venons de décrire s'ajoute une variation diurne (de période 1 jour) liée à l'inclinaison de l'orbite lunaire. Mais surtout, du fait de la rotation rapide de la Terre, et de la forme des bassins océaniques, de la variation de la profondeur des océans, au phénomène de base s'ajoutent des oscillations forcées des eaux, des phénomènes de résonance mécanique, ce qui fait que la hauteur et l'heure des marées peut s'écarter notablement de la valeur théorique (Baie de Fundy : maxi 20 m ; Baie du Mont-Saint-Michel : maxi 13 m).

Le Soleil exerce lui aussi des marées sur la Terre, leur intensité est égale à 5/11 fois celle de la Lune. Les deux effets se combinent vectoriellement lorsque la Lune est approximativement alignée avec l'axe Terre-Soleil (Nouvelle Lune et Pleine Lune) ; on a ainsi de fortes marées ou *vive-eau*. Lorsque la Lune est en quadrature (quartiers), les effets se compensent, et on a de faibles marées (morte-eau), le tout se reproduisant à peu près cycliquement deux fois par mois.

6.1.2 Limite de Roche

Bien entendu, de manière réciproque, la Lune subit de la part de la Terre des forces de marée encore plus fortes. Nous y reviendrons plus loin. Plus généralement, tout satellite de taille non nulle en orbite autour d'un astre donné (planète ou étoile) subira des forces de marée. Ces forces de marée peuvent être suffisamment fortes pour briser le satellite. Ce sera le cas si le satellite est plus proche qu'une limite appelée *limite de Roche*. Il est possible d'en obtenir une expression mathématique.

Considérons (Fig. 6.3) une planète sphérique de masse M et de rayon R et un satellite en orbite autour d'elle, que nous supposerons fait de deux petites masses m individuelles de rayon

FIGURE 6.3: *Effet de marée*

r situées à la distance D de la masse M . La force exercée par la masse M à la distance D est égale à $F_g = GMm/D^2$. Ce qui va compter pour évaluer la tension créée entre les deux masses sera la *différence* de force entre les deux petites masses. Elle est égale à :

$$\left(\frac{dF_g}{dD}\right) \times 2r = \frac{4GMmr}{D^3} \quad . \quad (6.1)$$

Si cette différence est supérieure à la force de cohésion F_c entre les 2 masses, elles sont arrachées l'une et l'autre par effet de marée.

Considérons le cas d'un satellite liquide. La seule force de cohésion est la gravitation $F_c = Gm^2/(2r)^2$. Le satellite sera donc instable si

$$\frac{Gm^2}{4r^2} \leq \frac{4GMmr}{D^3} \quad . \quad (6.2)$$

Relions maintenant les masses en jeu aux masses volumiques du satellite et de la planète :

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{plan}} \quad . \quad (6.3)$$

L'équation (6.2) fait apparaître une distance D limite en dessous de laquelle le satellite sera détruit

$$D_{\text{lim}} = \sqrt[3]{16 \frac{\rho_{\text{plan}}}{\rho_{\text{sat}}}} R \quad . \quad (6.4)$$

Le calcul réel est plus complexe, car un satellite ne sera jamais fait de deux masses accolées. Il faut aussi prendre en compte la différence d'accélération centrifuge liée au mouvement orbital. En 1850, Roche a montré qu'un satellite sphérique serait brisé par effet de marée s'il s'approchait en-deçà d'une distance D_{lim} de la planète centrale valant :

$$D_{\text{lim}} = 2.4554 \sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{plan}}}{\rho_{\text{sat}}}} R \quad . \quad (6.5)$$

C'est la *limite de Roche*, finalement assez proche du calcul simplifié présenté ci-dessus. Ce phénomène explique par exemple pourquoi les anneaux de Saturne ne forment pas un satellite, car il serait trop proche de la planète.

Le calcul précédent est valide pour un satellite liquide où la seule force de cohésion est son autogravité. Il faut comprendre que cette situation correspond pratiquement à la réalité dans le cas de gros satellites ou de planètes autour d'étoiles. Un objet comme la Terre n'est pas solide, et l'autogravité est de loin la plus grande force de cohésion. Il en ira différemment pour de petits corps comme des astéroïdes où la cohésion des roches est à prendre en compte en plus. C'est ainsi que des corps de taille kilométrique peuvent exister dans les anneaux de Saturne sans être détruits par effet de marée.

6.1.3 Forces de marée : Effets plus fins

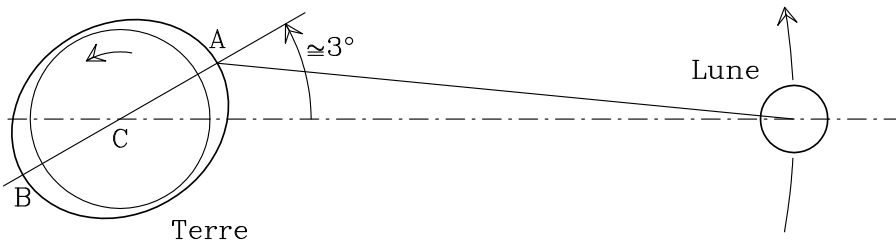


FIGURE 6.4: *Le couple retardateur Terre-Lune*

L'effet de marée produit également un couplage entre la rotation des astres et leur mouvement orbital. Du fait d'une certaine viscosité, la Terre ne « répond » pas instantanément à la déformation induite par la Lune. Comme la Terre tourne sur elle-même plus vite que la Lune ne tourne autour de la Terre, la protubérance due aux effets de marée est *en avance* (3° de décalage vers l'est) par rapport à la ligne des centres Terre-Lune (Fig. 6.4). La force exercée en *A* étant plus grande qu'en *B*, il en résulte un couple qui tend à ramener la ligne *AB* avec l'axe Terre-Lune, donc à ralentir la rotation de la Terre. Dans le même temps, la forme non sphérique de la Terre et l'avance du bourrelet exercent sur la Lune une accélération supplémentaire dans le sens de son mouvement, la faisant donc s'éloigner de la Terre.

La durée du jour s'allonge donc, de 0.002 s par siècle. Ce phénomène appelé ralentissement séculaire est mesuré. De plus l'étude de coraux fossiles a montré qu'il y avait 400 jours dans une année il y a 400 millions d'années, et que les marées océaniques étaient plus fortes qu'aujourd'hui.

Inversement, la Terre exerce sur la Lune des marées identiques, mais 20 fois plus fortes. C'est ainsi que la Lune a vu sa rotation synchronisée par rapport à sa révolution autour de la Terre, et qu'elle nous présente toujours la même face. C'est un exemple de résonance spin-orbite 1 : 1 où la période de rotation de la Lune est égale à sa période orbitale.

Ce type d'effet de marée est très courant dans le Système Solaire ; de nombreux satellites présentent toujours la même face à leur planète. Si on reprend le système Terre-Lune, l'état final de système devrait être une égalisation des deux périodes de rotation de la Terre et de la Lune avec la période de l'orbite. Dans ce cas, les *deux* objets se présenteraient toujours la même face. L'inertie de la Terre fait que nous n'en sommes pas encore arrivés là. Mais la Lune y est arrivée.

L'éloignement de la Lune consécutif au ralentissement de la Terre peut se comprendre en termes de conservation du moment cinétique du système Terre-Lune, que l'on peut considérer comme isolé en première approximation. Ainsi, le couplage créé induit un transfert de moment cinétique entre la rotation terrestre et le mouvement orbital lunaire. Dans un futur lointain, la Lune sera plus éloignée et la Terre et la Lune se présenteront mutuellement la même face. La Lune sera alors trois fois plus éloignée qu'aujourd'hui et le « jour » vaudra 50 jours actuels. Mais cet état n'arrivera probablement jamais. Le Système Solaire disparaîtra avant.

Il existe des exemples d'astres qui ont déjà atteint ce stade. Ainsi, Pluton et son satellite Charon se présentent toujours la même face. Il faut dire que les deux objets sont distants de 19 600 km seulement et que la taille de Charon atteint le tiers de celle de Pluton, au point qu'il est permis de considérer ce couple comme un système de planète double. Le même état final se retrouve dans de nombreux systèmes d'étoiles binaires serrées avec des périodes orbitales de quelques jours. Dans quelques cas, l'état final est différent. Mercure est un cas très particulier de résonance spin-orbite 2 : 3 avec le Soleil. Ceci est dû à l'excentricité de son orbite.

Si le moment cinétique du système Terre-Lune est conservé, il n'en va pas de même pour l'énergie. Le couplage entre la rotation et le mouvement orbital est lié à la viscosité du matériau constituant la Terre, créée par de la friction interne. Il y a donc déperdition d'énergie à l'intérieur

de la Terre, génératrice. Cette énergie est prise principalement dans la rotation de la Terre sur elle-même. Elle est génératrice d'échauffement interne. L'effet est modéré dans le cas de la Terre, mais il peut être plus important ailleurs. C'est par exemple la principale explication avancée aujourd'hui pour expliquer le volcanisme d'Io. Io est un des 4 principaux satellites de Jupiter, à peine plus gros que la Lune. Or, en comparaison de la Lune qui est inerte, Io est de loin le corps le plus volcanique du Système Solaire avec de nombreux volcans actifs. L'échauffement par friction de marée avec Jupiter permet d'expliquer cette activité.

Certains satellites (Phobos autour de Mars) tournent plus vite que la rotation de la planète. Dans ce cas, le bourrelet est en *retard* sur le satellite, et l'effet est d'augmenter la rotation de la planète et de rapprocher le satellite de sa planète, si bien qu'il finit par s'écraser sur elle. Le même raisonnement vaut pour un satellite *rétrograde*, c'est à dire qui tourne en sens inverse de la rotation de la planète (Triton autour de Neptune).

On montre aussi qu'une autre conséquence du même effet de marée est de circulariser lentement les orbites (Hut 1981) : les excentricités tendent vers zéro. Cet effet est très important dans le cas de systèmes d'étoiles doubles proches. On a pu également constater que la plupart des exoplanètes les plus proches de leur étoile avec des périodes orbitales ne dépassant pas quelques jours ont des orbites circulaires pour les mêmes raisons.

6.2 Dynamique des axes de rotation

6.2.1 Obliquité et longitude de l'axe de rotation

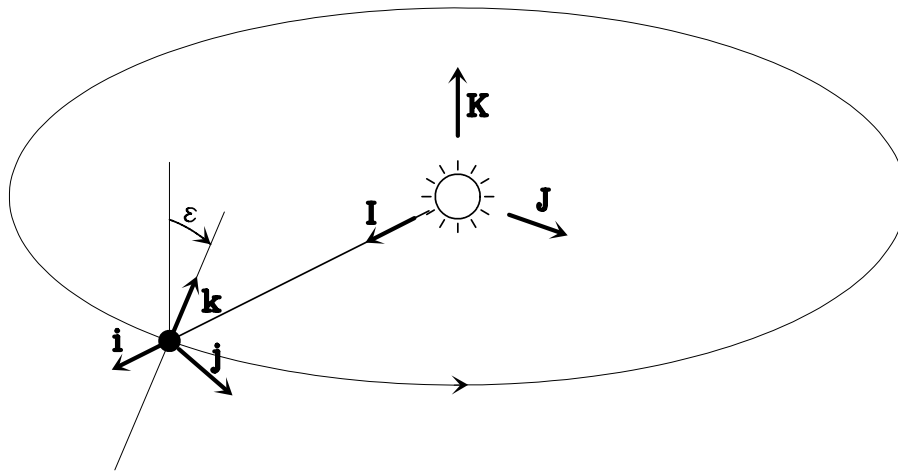


FIGURE 6.5: Position de l'axe de rotation d'une planète en orbite autour de son étoile. On introduit l'obliquité ϵ et les deux repères $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. S'agissant de la Terre, la position représentée ici par rapport au Soleil correspond à l'équinoxe d'automne.

Dès lors qu'un astre est non ponctuel, il est susceptible d'avoir un mouvement de rotation sur lui-même. En première approximation, la rotation propre (ou spin) d'un astre est découplée de son mouvement orbital. Ceci est strictement valable en théorie pour des astres soit ponctuels, soit parfaitement sphériques. Or aucune planète n'est rigoureusement sphérique, dans la mesure où la rotation elle-même engendre un aplatissement polaire et donc un écart à la sphéricité. Nous avons déjà vu que les forces de marée sont capables d'induire un couplage entre la rotation propre des astres et leur mouvement orbital. En conséquence, les caractéristiques de la rotation propre d'un astre peuvent évoluer lentement. Ces caractéristiques comprennent bien entendu la période de rotation, mais également la direction de l'axe de rotation, ce dernier paramètre étant d'ailleurs nettement plus sujet à variations.

On considère une planète en orbite autour de son étoile, avec un repère $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ lié à cette orbite (Fig. 6.5), le plan de l'orbite correspondant au plan (\vec{I}, \vec{J}) . On supposera que le vecteur \vec{I} pointe vers la position de l'équinoxe d'automne de la planète, tel que représenté sur la figure 6.5. On définit maintenant un repère local $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à la rotation de la planète. Le vecteur \vec{i} est choisi égal à \vec{I} et le vecteur \vec{k} de manière à ce qu'il porte l'axe de rotation de la planète. Le vecteur \vec{k} a pour coordonnées (k_x, k_y, k_z) dans le repère $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. On définit ensuite les angles $(\epsilon, \Lambda, \psi)$ tels que

$$k_x = \sin \epsilon \sin \Lambda \quad , \quad k_y = \sin \epsilon \cos \Lambda \quad , \quad k_z = \cos \epsilon \quad . \quad (6.6)$$

ϵ est appelé *obliquité*. C'est l'angle entre \vec{k} et \vec{K} , c'est-à-dire entre l'axe de rotation et la perpendiculaire à l'orbite. L'angle $\psi = \Lambda - \Omega$ est la *longitude de l'axe de rotation*. L'obliquité est un paramètre important. Cet angle conditionne le phénomène des saisons. Pour $\epsilon = 0$, il n'y a aucune saison, et plus ϵ est élevé, plus le phénomène est marqué. La valeur actuelle pour la Terre est $\epsilon = 23.5^\circ$. Pour information, avec $\epsilon = 60^\circ$, nous aurions en France de la nuit polaire et du Soleil de minuit.

6.2.2 Précession et nutation

Du fait que la planète ne sera pas sphérique à cause de son aplatissement polaire, l'étoile exercera un couple sur la planète susceptible de faire évoluer son axe de rotation. Afin de pouvoir étudier cette dynamique, nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices :

- Nous supposons la planète rigide et homogène, avec des moments principaux d'inertie (I_1, I_2, I_3) . L'axe de rotation \vec{k} correspond à la direction de I_3 . Nous supposons également $I_1 = I_2 < I_3$, signifiant par là que la planète est axisymétrique autour de son axe de rotation et présente un aplatissement polaire.
- Nous supposons également que l'évolution de l'axe de rotation de la planète est suffisamment lente pour que l'on puisse moyenner sur la période orbitale les équations instantanées d'évolution.

Moyennant ces hypothèses, on montre que l'angle ψ et la quantité $X = \cos \epsilon$ sont des variables conjuguées de type angle-action, dont l'évolution est régie par le Hamiltonien (Laskar 1993, Laskar et Robutel 1993)

$$H(X, \psi, t) = \alpha(1 - e(t))^{-3/2} X^2 + \sqrt{1 - X^2} [A(t) \sin \psi + B(t) \cos \psi] \quad , \quad (6.7)$$

avec

$$A(t) = \frac{2[\dot{q} + p(q\dot{p} - p\dot{q})]}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{2[\dot{p} - q(q\dot{p} - p\dot{q})]}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}} \quad , \quad (6.8)$$

où

$$p(t) = \sin\left(\frac{i(t)}{2}\right) \sin \Omega(t) \quad \text{et} \quad q(t) = \sin\left(\frac{i(t)}{2}\right) \cos \Omega(t) \quad , \quad (6.9)$$

où $e(t)$ est l'excentricité de l'orbite, $i(t)$ son inclinaison dans le repère $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et $\Omega(t)$ la longitude du nœud ascendant dans ce même repère. Bien entendu, au début on a $i(0) = 0$, l'évolution ultérieure étant principalement due à l'effet des autres planètes. Enfin, on a

$$\alpha = \frac{3GM_\odot P_R}{4a^3} \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad (6.10)$$

où a est le demi-grand axe (supposé constant), P_R est la période de rotation et où on a noté M_\odot la masse de l'étoile, étant entendu que ce qui est écrit ici s'applique en tout premier lieu à

la Terre. Nous supposons étaglement que P_R est constant, négligeant de ce fait les effets de marée. Du coup, le paramètre α est une constante.

Vu de cette manière, le Hamiltonien $H(X, \psi, t)$ est un Hamiltonien à un degré de liberté mais dépendant du temps. Cet Hamiltonien est proche d'un Hamiltonien intégrable :

$$H(X, \psi, t) = \underbrace{\alpha X^2}_{\text{Partie principale intégrable}} + \underbrace{\alpha \left[(1 - e(t))^{-3/2} - 1 \right] X^2 + \sqrt{1 - X^2} [A(t) \sin \psi + B(t) \cos \psi]}_{\text{Perturbation}}. \quad (6.11)$$

Nous remarquons que si l'excentricité et l'inclinaison sont petites, la perturbation est un terme petit ($A(t)$ et $B(t)$ sont petits). Si celle-ci est nulle, la résolution du Hamiltonien résiduel donne que X (donc ϵ) est une constante et que $\psi(t) = 2\alpha X t$. Par conséquent, l'obliquité est constante et la longitude de l'axe de rotation précesse lentement, comme schématisé sur la figure 6.6. Dans le cas de la Terre, ce lent mouvement de précession de l'axe de rotation autour du pôle écliptique est appelé *précession des équinoxes*. Sa période est de 25 800 ans. Cet effet s'explique en définitive par l'action du Soleil sur le bourrelet équatorial terrestre via le paramètre α . Le point vernal, défini par la position du Soleil dans le ciel à l'équinoxe de printemps, rétrograde sur l'écliptique de 50.4" par an. Cette rétrogradation fut observée par Hipparque au II^e siècle avant Jésus-Christ.

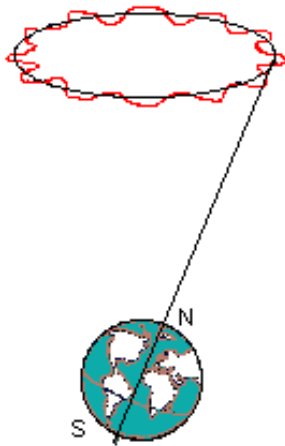


FIGURE 6.6: *Precession et nutation : mouvement résultant de l'axe des pôles par rapport à la sphère céleste*

La vitesse de précession est maximale pour $X = 1$ ($\epsilon = 0$) et nulle pour $X = 0$ ($\epsilon = 90^\circ$). Si l'on tient compte maintenant de la perturbation dans le Hamiltonien (6.11), le mouvement de précession subsiste, mais l'obliquité n'est plus une constante. L'évolution séculaire de l'obliquité est appelée *nutations*. Cette évolution peut être régulière ou non. En d'autres termes, le théorème KAM peut s'appliquer ou non. Dans le cas de la Terre, elle est régulière. On distingue une variation séculaire de 2° d'une période de plusieurs dizaines de milliers d'années, et une fluctuation sinusoïdale beaucoup plus rapide (période 18.6 ans) mais d'amplitude beaucoup plus faible ($\sim 9''$). Au bout du compte, en combinant précession et nutation, la projection de l'axe des pôles décrit une courbe festonnée comme schématisé sur la figure 6.6.

Combinées avec les variations séculaires d'excentricité et la précession de la longitude du périhélie, ces mouvements de l'axe rotation de la Terre sont suffisants, selon la théorie de Milankovitch, pour déclencher l'apparition ou la disparition de périodes glaciaires. En fait le paramètre important est l'évolution de l'obliquité, car c'est de là que dépend la quantité d'ensoleillement aux hautes latitudes en été.

Le Hamiltonien complet est très compliqué, surtout si dans le cas de la Terre on veut tenir compte de toutes les autres planètes. Ceci appelle une étude numérique, qui a été réalisée pour la Terre et les planètes telluriques du Système Solaire par Laskar (1993) et Laskar & Robutel (1993), à l'aide de l'analyse en fréquences. Le résultat est que l'argument de $A(t) + iB(t)$ a un spectre en fréquence qui dans certains cas présente des pics au voisinage des fréquences fondamentales de la solution séculaire du Système Solaire. Ceci rend possible le déclenchement de fort chaos par effet de recouvrement de résonances.

Ceci est illustré dans la figure 6.7 (Laskar 1993). L'auteur y représente en fonction de l'obliquité initiale ϵ_0 les valeurs prises par la vitesse de précession de l'axe et l'obliquité après

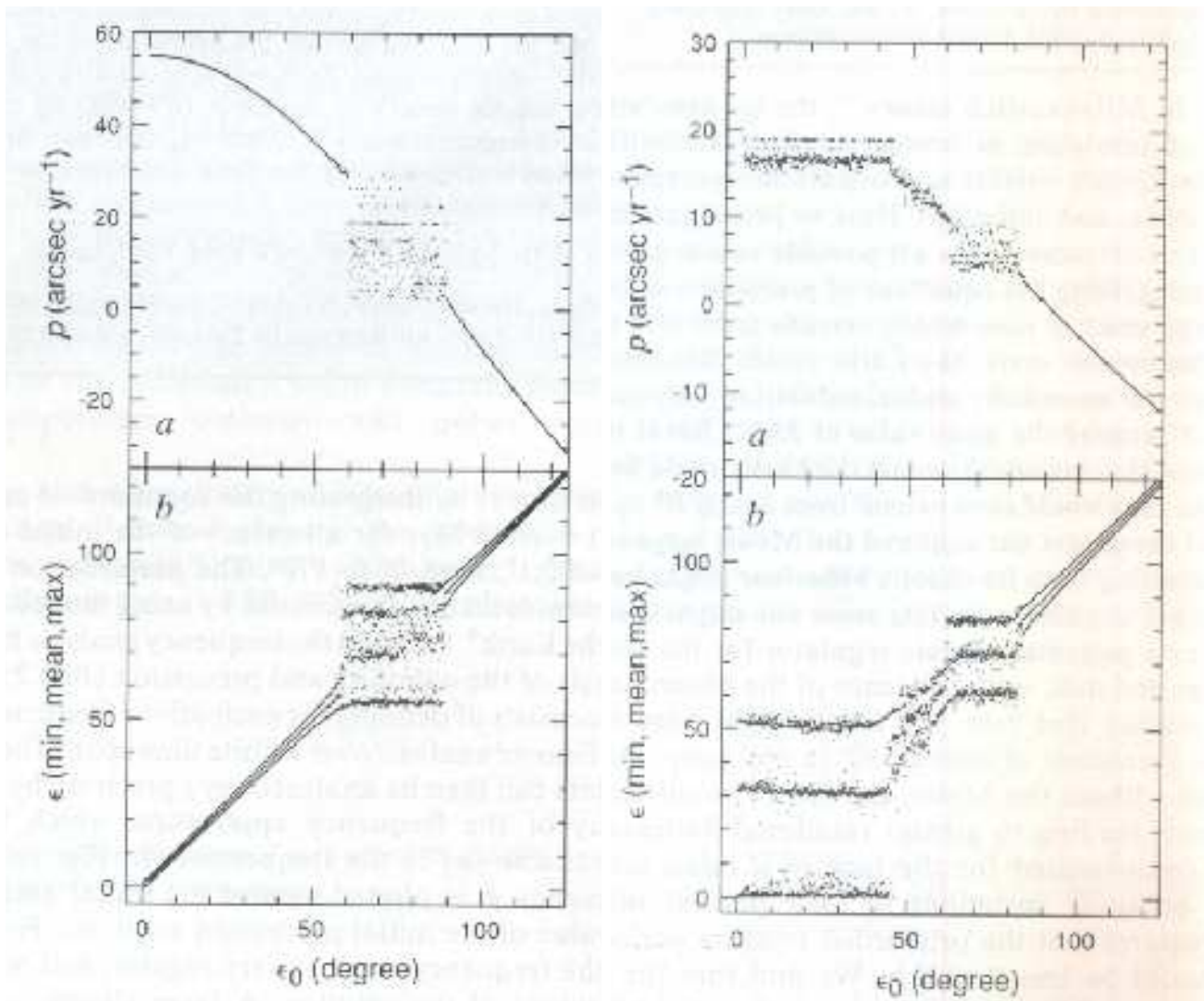


FIGURE 6.7: *Etude numérique de la stabilité de l'axe de rotation de la Terre (Laskar 1993). On représente ici en fonction de l'obliquité initiale en début de simulation l'ensemble des valeurs minimales et maximales prises par la vitesse de précession des équinoxes (diagrammes du haut) et de l'obliquité (diagrammes du bas). **Gauche** : Situation nominale pour la Terre en comptant la présence de la Lune ; **Droite** : Situation fictive pour la Terre si la Lune n'existait pas.*

une intégration numérique de plusieurs dizaines de millions d'années. Les deux diagrammes de gauche correspondent à la situation actuelle pour la Terre. On voit qu'en dehors d'une zone correspondant $60^\circ \leq \epsilon_0 \leq 90^\circ$, l'obliquité ne présente que de petites fluctuations et reste voisine de la valeur initiale. La précession est également très stable. Pour $\epsilon_0 = 23.5^\circ$, c'est-à-dire la valeur actuelle de l'obliquité terrestre, on retrouve les fluctuations régulières de faible amplitude évoquées ci-dessus.

Les diagrammes de droite de la figure 6.7 correspondent au même calcul pour la Terre, mais effectués sans tenir compte de la présence de la Lune, en faisant comme si cette dernière n'existait pas. On voit que dans ce cas, la zone chaotique est beaucoup plus grande. Elle englobe en particulier la valeur actuelle. Cela signifie que si la Lune n'existait pas, l'obliquité de la Terre aurait sur une échelle de l'ordre du million d'années un comportement potentiellement chaotique pouvant prendre virtuellement n'importe quelle valeur entre 0 et 60° .

La figure 6.8 (Laskar 1993) illustre cet effet plus concrètement. L'auteur montre l'évolution

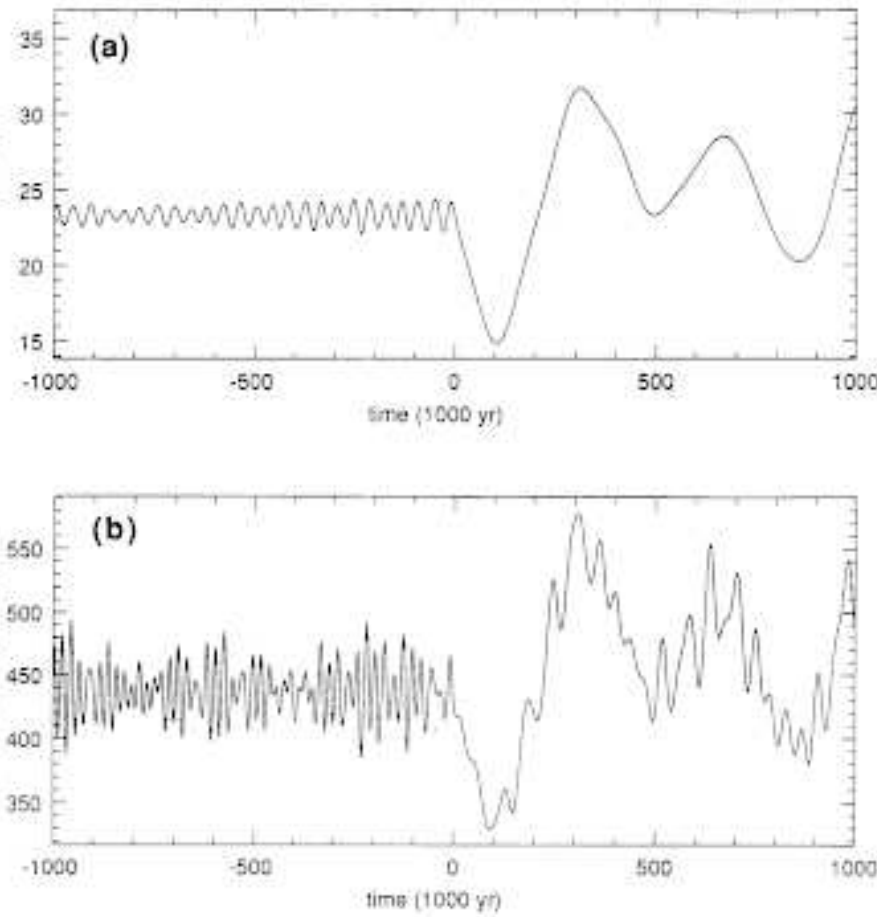


FIGURE 6.8: **Haut** : Evolution de l'obliquité de la Terre calculée à partir de la situation actuelle (à $t = 0$), à rebours jusqu'à 1 million d'années en arrière, et en avant jusqu'à 1 million d'années dans le futur. Le calcul dans le passé a été mené avec la configuration actuelle de la Terre et de la Lune, le calcul dans le futur a été mené en supprimant la Lune. La différence de comportement est frappante. **Bas** : Evolution dans les mêmes conditions de l'insolation moyenne par an à 65° de latitude nord.

calculée de l'obliquité terrestre sur deux millions d'années, tout d'abord dans les conditions actuelles, et ensuite à partir de $t = 0$ en supprimant brutalement la Lune. On retrouve avant $t = 0$ les oscillations régulières entre 22° et 24° évoquées plus haut. En revanche, dès que la Lune est supprimée, on constate des variations de beaucoup plus grande amplitude conséquence de l'évolution chaotique.

L'obliquité terrestre semble donc stabilisée par la présence de la Lune. Comment ceci peut-il s'expliquer? Pour résumer, la présence de la Lune modifie la valeur du facteur α défini dans l'équation (6.10). Il faut alors additionner le α de la Terre et celui de la Lune. Ceci a pour conséquence de déplacer les fréquences naturelles d'oscillation du terme $A(t) + iB(t)$ en dehors de la zone de résonance avec les fréquences fondamentales du Système Solaire. Lorsqu'on supprime la Lune, on revient dans cette zone, et le chaos peut s'installer.

Si tel était le cas, les conséquences climatiques d'une obliquité chaotique serait tout simplement énormes. Le diagramme du bas de la figure 6.8 montre dans les mêmes conditions l'évolution de l'insolation reçue sur Terre à la latitude de 65° nord. Là aussi, le chaos s'installe quand on supprime la Lune, même si l'insolation à haute latitude dépend aussi de l'évolution de l'excentricité en plus de l'obliquité. Quand on sait que les variations de faible amplitude qui correspondent à l'évolution avant $t = 0$ suffisent à expliquer l'alternance entre glaciations et périodes interglaciaires, on n'ose imaginer à quoi ressemblerait le climat sur Terre dans une évolution comme celle calculée après $t = 0$. Nous serions dans une situation d'instabilité climatique. Comment la vie sur Terre se serait-elle adaptée à ces conditions? Cette question est pour l'heure sans réponse.

Laskar & Robutel (1993) ont également effectué le même type de calcul pour les autres planètes telluriques du Système Solaire. La situation d'obliquité chaotique calculée sans la Lune se trouve être celle qui prévaut aujourd'hui pour la planète Mars. De fait, Mars n'a pas de satellite comparable à la Lune¹. Par conséquent, le fait que Mars ait aujourd'hui une obliquité comparable (25°) à celle de la Terre (et donc un effet de saisons comparable) est purement fortuit.

L'obliquité de Mercure est quant à elle figée à 0° grâce à l'effet de marée avec le Soleil. Vénus a aujourd'hui une obliquité de 180° (rotation rétrograde) qui s'explique par un phénomène de marées atmosphériques (interaction entre le Soleil et l'atmosphère). L'axe de rotation des planètes géantes est beaucoup plus stable. Il n'y a toutefois aujourd'hui toujours aucune explication convaincante pour l'obliquité élevée (98°) d'Uranus. La valeur est probablement primordiale et pourrait résulter d'un impact géant dans les premiers âges du Système Solaire.

6.2.3 Polhodie

La non-sphéricité de la Terre entraîne donc en définitive une évolution séculaire de son axe de rotation qui prend la forme de précession et de nutation vue plus haut. Elle entraîne également un autre effet : le déplacement du pôle à la surface terrestre ou *polhodie*. A titre indicatif, nous en ferons ici une analyse succincte, car on peut arriver assez vite à un résultat appréciable. Pour cela, définissons deux référentiels nommés \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_T , le premier étant supposé fixe, et l'autre lié à la Terre. On supposera que le repère \mathcal{R}_T est orienté de telle manière que ses axes correspondent aux axes principaux d'inertie de la Terre (I_1, I_1, I_3).

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantané de la Terre, et soit \vec{v} une quantité vectorielle quelconque. Du fait que le référentiel \mathcal{R}_T est animé d'un mouvement de rotation par rapport à \mathcal{R}_0 , la dérivée temporelle de \vec{v} dans les deux référentiels différera. Plus précisément, on aura

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} - \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad . \quad (6.12)$$

Appliquons ceci en prenant pour \vec{v} le moment cinétique de la Terre $\vec{\sigma}$ par rapport à son centre. Désignons par (p, q, r) les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans \mathcal{R}_T . Compte tenu du fait que la matrice d'inertie est diagonale, $\vec{\sigma}_0$ a pour coordonnées (pI_1, qI_1, rI_3) dans \mathcal{R}_T .

Si on néglige les effets extérieurs (Lune, etc. . .), $\vec{\sigma}$ est constant. On doit avoir $d\vec{\sigma}/dt = 0$ dans \mathcal{R}_0 . En utilisant (6.12), on en déduit alors la variation dans \mathcal{R}_T , plus précisément

$$\begin{aligned} I_1 \frac{dp}{dt} + (I_3 - I_1)qr &= 0 \\ I_1 \frac{dq}{dt} + (I_1 - I_3)pr &= 0 \quad . \\ I_3 \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

La troisième de ces équations se réduit à $r = \text{cte} = r_0$. Le système différentiel formé par les deux autres équations s'intègre facilement en passant par la variable complexe $p + iq$. On trouve au bout du compte

$$p = K \cos(\Omega_0 t + \phi) \quad \text{et} \quad q = K \sin(\Omega_0 t + \phi) \quad , \quad (6.14)$$

1. Les deux satellites actuels de Mars, Phobos et Deimos, sont des objets beaucoup plus petits dont la taille ne dépasse pas 20 km.

où K et ϕ sont des constantes d'intégration, et $\Omega_0 = r_0(I_3/I_1 - 1)$ est une fréquence caractéristique (on a $I_3 > I_1$). On remarquera que $|\vec{\omega}|^2 = r_0^2 + K^2$ est une constante. Le vecteur rotation instantané de la Terre change, mais la vitesse de rotation est constante, à ce niveau d'approximation bien sûr. Dans la pratique on a $K \ll r_0$, ce qui fait que le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est pratiquement confondu avec le vecteur constant $r_0\vec{k}$. C'est ce que nous avons supposé dans l'étude sur l'obliquité et la précession.

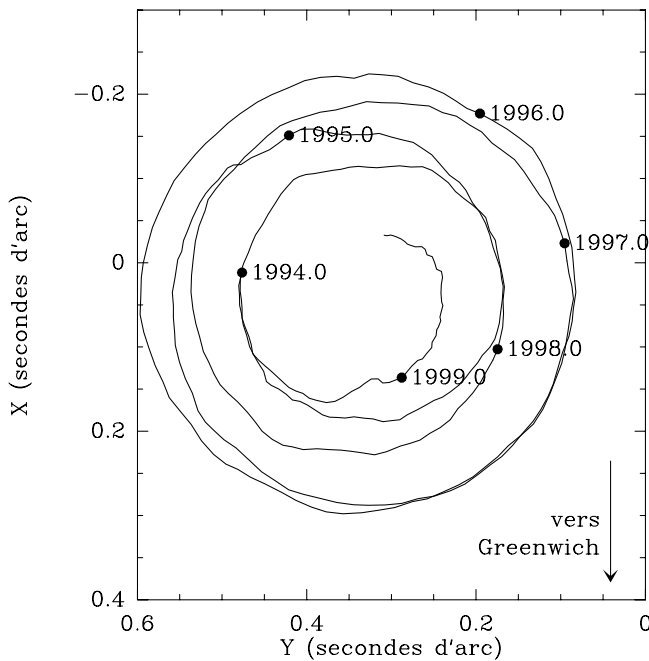


FIGURE 6.9: Déplacement du pôle à la surface de la Terre tel qu'il a été observé sur quelques années. 0.1 seconde d'arc correspond à environ 3 mètres sur le terrain.

Chandler). On a longtemps cherché vainement la période de 305 jours, et c'est l'astronome Newcomb qui a montré à la fin du XIX^e siècle que si on prend en compte le fait que la Terre n'est pas un corps infiniment rigide, mais élastique², on obtient bien un allongement de la période de 305 jours à 427.

Plus précisément, le vecteur $\vec{\omega} - r_0\vec{k}$, de longueur constante K tourne dans le plan perpendiculaire à \vec{k} à la fréquence Ω_0 . Sur le terrain, cela se traduit par un mouvement circulaire uniforme du pôle de rayon $(K/r_0)R_\oplus$ à la surface de la Terre, R_\oplus désignant le rayon terrestre. Ce mouvement est appelé la *polhodie*.

Dans la pratique, le mouvement est un peu plus complexe, car des effets additionnels rentrent en compte. La trajectoire du pôle à la surface terrestre telle qu'elle a pu être mesurée dans les années 1990 est représentée sur la figure 6.9. On y reconnaît bien comme prévu un mouvement grossièrement circulaire d'amplitude ~ 10 m sur le terrain, mais on constate des perturbations. Ce mouvement est minime, mais il est néanmoins mesuré.

La période de ce mouvement pose un problème. En effet, l'observation de la forme de la Terre donne $I_3/I_1 - 1 \simeq 0.003028\dots$, ce qui fournit une période $2\pi/\Omega_0 = 305$ jours. Or le mouvement constaté sur la figure 6.9 a une période principale de 427 jours (terme de

la période de 305 jours, et c'est l'astronome Newcomb qui a montré à la fin du XIX^e siècle que si on prend en compte le fait que la Terre n'est pas un corps infiniment rigide, mais élastique², on obtient bien un allongement de la période de 305 jours à 427.

2. ce qui signifie que ses moments d'inertie peuvent varier

Deuxième partie

Galaxies

Chapitre 7

Zoologie des Galaxies

7.1 Introduction

Une galaxie est un vaste système d'étoiles auto-gravitant, à grande échelle, se présentant la plupart du temps comme un disque. Outre des étoiles, une galaxie contient également du gaz et des poussières interstellaires. La majeure partie de la matière dans l'Univers est contenu dans les galaxies, et plus précisément dans les étoiles les composant.

Une galaxie moyenne contiendra typiquement 10^{11} à 10^{12} étoiles. Ainsi que nous l'avons suggéré, le Soleil fait partie d'une galaxie, qu'on appelle également « La Galaxie ». Notre galaxie comporte environ 2×10^{11} étoiles. Elle se présente grossièrement sous la forme d'un disque de 30 kpc de diamètre, d'épaisseur moyenne 300 pc, et renflé en son centre. De par sa taille, elle se classe plutôt parmi les grandes galaxies. La manifestation dans le ciel de ce vaste système est la traînée blanche appelée *Voie Lactée*. On donne parfois ce nom à la Galaxie toute entière. L'ensemble des étoiles qui constituent le ciel étoilé visible à l'œil nu ne représente qu'une toute petite partie de la Galaxie, ces étoiles étant éloignées de nous de quelques centaines de parsecs en moyenne. Il est peut-être bon de préciser que le Soleil *n'est pas* au centre de la galaxie. Celui-ci se situe à environ 8.7 kpc de nous, dans la direction de la constellation du Sagittaire.

En dehors de notre Galaxie, il existe des milliers d'autres galaxies, les plus proches d'entre elles composant le *groupe local* de galaxies (30 membres environ). Les galaxies les plus proches de nous sont les *Nuages de Magellan* et la galaxie du Sagittaire, toutes visibles depuis l'hémisphère sud. Ce sont des galaxies naines qui sont en quelque sorte des « satellites » de la nôtre. La plus proche galaxie de taille importante est la galaxie d'Andromède (M31), et avec les deux nuages de Magellan, c'est la seule qui soit visible à l'œil nu.

7.2 Aspect historique

La vision actuelle esquissée précédemment a bien entendu mis du temps à se dégager. Il est bon de rappeler ici brièvement l'historique qui a conduit à cette description. Ce n'est que très récemment, depuis le travail de pionnier de Hubble dans les années 1920, que la nature même des galaxies a pu être comprise. Auparavant, celles qui avaient pu être observées avaient été rangées dans la catégorie des *nébuleuses*, c'est à dire tout ce qui sur le fond de ciel s'apparente à un objet lumineux au contours diffus, par opposition aux étoiles.

Parallèlement à ces observations, la Voie Lactée avait été observée depuis longtemps et dès 400 avant notre ère Démocrite émettait l'idée que les étoiles étaient de même nature que le Soleil, et que la Voie Lactée était formée de particules. Ces vues ne furent pas acceptées pendant 2000 ans, jusqu'à ce que Galilée (1564–1642), braquant pour la première fois une lunette vers

les cieux, résolve la Voie Lactée en étoiles. Dans le même temps, il résolvait des amas stellaires, montrant que des objets que l'on croyait diffus étaient en fait constitués d'étoiles.

Au milieu du XVIII^e siècle, l'idée d'un système stellaire associé à la Voie Lactée se dégage. Les discussions portaient sur la *hiérarchie* des systèmes stellaires. Herschel (1738–1822 ; le découvreur d'Uranus) a tout d'abord développé une première théorie dans laquelle les étoiles étaient réparties de manière homogène dans un domaine borné, à bords finis. Cependant, de plus en plus impressionné par l'existence des amas d'étoiles, des nuages et des nébuleuses, il en vint à la fin de sa vie à une conception plus moderne de la Galaxie. Dans cette théorie, Herschel basait sa détermination des distances sur le principe que toutes les étoiles devaient avoir une luminosité égale au Soleil, ce qui n'est bien sûr pas exact. Il en déduisait que la Galaxie était un système aplati de 156 pc d'épaisseur et que l'ensemble des étoiles visibles à l'œil nu étaient situées dans une sphère de 48 pc de rayon centrée sur le Soleil.

En 1784, Messier, chasseur de comètes, publie un catalogue de 103 objets non stellaires. La galaxie d'Andromède y porte le numéro 31 (M31), mais on y trouve, outre des objets qui se révéleront être des galaxies, des amas stellaires (tel les amas globulaires) et des *nébuleuses gazeuses*, c'est à dire des condensations de gaz interstellaire (donc *dans* notre Galaxie) fortuitement rendus lumineuses pour des raisons diverses, comme par exemple l'excitation par des étoiles chaudes voisines. On voit donc que ce catalogue assez hétéroclite comportait des objets de nature très différente, et il en sera ainsi de tous les catalogues plus complets qui suivront. Mais parallèlement, suite à ce classement, la controverse restera longtemps vive sur la nature différente ou similaire de toutes ces *nébuleuses*.

En 1854, Lord Rosse, à l'aide d'un télescope de 183 cm qu'il a lui-même construit, découvre la nature spirale de galaxies comme M33 ou M51. Son élève, Dreyer, publie en 1888 le *New General Catalogue* (NGC), toujours en vigueur aujourd'hui, qui contient 5000 « nébuleuses », qui sont soit de véritables nébuleuses, soit des galaxies. Il y rajoute 7000 objets dans le catalogue « IC ». Dans le même temps, la nature gazeuse de certaines nébuleuses se trouve confirmée. Dès lors, la question se pose : Que sont les « nébuleuses spirales » ?

Pendant ce temps, la structure de la Galaxie (que l'on assimilait bien sûr à l'Univers tout entier) se précise. En 1838, Bessel mesurait la première parallaxe stellaire (*61 Cygni* : 0.294"). La mesure directe des distances des étoiles pouvait commencer (du moins pour les plus proches d'entre elles), et une des premières constatations de cette détermination fut que les étoiles étaient loin d'avoir toutes la même luminosité comme on le supposait auparavant.

Au début du XX^e siècle, on dispose de catalogues d'étoiles donnant des positions et des magnitudes. Jacob Kapteyn (1851–1922) et Hugo van Seelinger (1849–1920) effectuent des comptages d'étoiles dans des intervalles donnés de magnitude. En utilisant les parallaxes statistiques, ils confirment la forme aplatie et trouvent que l'« Univers » est un disque de 10 kpc de diamètre, de 2 kpc d'épaisseur, centré sur le Soleil. Les problèmes d'absorption sont ignorés.

En 1914, Harlow Shapley au mont Wilson étudie la distribution des amas globulaires. Il les trouve répartis de manière symétrique par rapport au plan galactique (en latitude galactique), mais pas en longitude. Il n'y a pas de symétrie de révolution autour du Soleil. Par conséquent, ce dernier *n'est pas* au centre du système. Il détermine la distance de ces amas par celle des étoiles variables (Céphéides ou assimilées) qu'ils contiennent. Ainsi, il place l'amas d'Hercule (M13) à 30 kpc et évalue le diamètre de la Galaxie à 100 kpc. Cette dimension est surestimée d'un facteur 3. Cela provient de la confusion entre Céphéides classiques et Céphéides de type *W Virginis* (1.5 magnitude de différence).

Entre temps, la mesure des mouvements propres des étoiles s'affine. En 1916, Pease observe un gradient de vitesse le long du grand axe de la Galaxie et pas de gradient le long du petit axe. Il en déduit que la Galaxie est un disque en rotation.

Les déterminations de Shapley et Pease entraînent une polémique sur l'existence de systèmes extragalactiques. Elle ne sera résolue qu'en 1923, lorsque Edwin Hubble observe des Céphéides dans les galaxies M31 (Andromède), M33 et NGC6822. Il applique la relation période-luminosité (découverte en 1908 par H. Leavitt) et trouve que M31 est à 300 kpc (la distance exacte est 670 kpc). L'étude des galaxies peut commencer. La situation est clairement résumée dans l'introduction de Hubble à son *Atlas des Galaxies* (1961) :

« *What are galaxies? No one knew before 1900. Very few people knew in 1920. All astronomers knew after 1924.* »

7.3 Classification des galaxies

L'astrophysique extragalactique a commencé par un travail de classification des galaxies en fonction de leur morphologie. Ce travail a été accompli par Hubble, et a abouti à sa classification en 1926. Comme toujours en sciences, classer permet déjà de dégager de nombreuses propriétés.

7.3.1 Classification initiale de Hubble (1926)

Hubble définit trois classes de galaxies :

- Les *Elliptiques* (E), de forme apparemment ellipsoïdale sans structuration interne ;
- Les *Spirales* (S), ayant la forme d'un disque orné de bras spiraux, avec au centre une partie renflée appelée *bulbe*. Certaines spirales sont dites *barrées* (SB) car les bras spiraux partent d'une barre au lieu du centre ;
- Les *Irrégulières* (I).

Parmi les Spirales, il introduit trois divisions (a,b,c), selon les critères suivants : De (a) à (c),

- le rapport bulbe/disque décroît ;
- la régularité des bras spiraux décroît ;
- le degré de résolution du disque et des bras en étoiles chaudes de type \mathcal{O} et \mathcal{B} et en région d'hydrogène ionisé (dites régions H II) croît .

Enfin, il introduit parmi les Elliptiques une sous-classification de 0 à 7 fondée sur leur degré d'aplatissement, (E0) désignant une forme quasi-sphérique et (E7) une forme très allongée : si a et b désignent respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'image elliptique de la galaxie, une Elliptique de type (En) devra vérifier $b/a \simeq 1 - 0.1n$.

Hubble représentait sa classification sous la forme d'un diagramme en forme de fourchette (Fig. 7.1), en suggérant une séquence évolutive en partant des Elliptiques. Cette vision évolutive s'est révélée fautive par la suite. Même, si séquence évolutive il y a, elle devrait plutôt être en sens inverse.

7.3.2 Classification de Hubble révisée (G. de Vaucouleurs)

C'est le système de classification aujourd'hui en vigueur. Il est dérivé du système initial. Déjà, en 1936, Hubble introduit les (S0) ou *Lenticulaires* (L) qui sont des Spirales sans bras. On distingue donc actuellement :

- 4 classes : Elliptiques (E), Lenticulaires (L), Spirales (S), Irrégulières (I) ; les Elliptiques représentent 13% des galaxies, les Lenticulaires 22%, les Spirales 61% et les Irrégulières 4% seulement ;
- 2 familles : Barrés (B), non barrés (A) et intermédiaires (AB) pour les classes L et S :
On a donc SA, SB, SAB, LA, LB, LAB ;

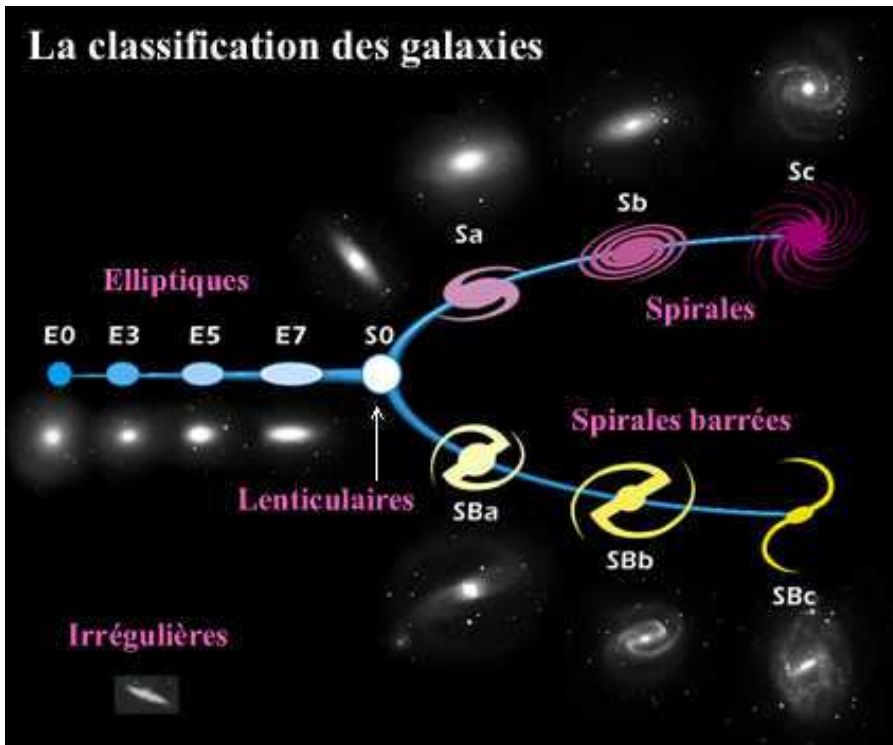


FIGURE 7.1: La classification de Hubble révisée des galaxies

- 5 stades : a,b,c,d,m (reprenant les divisions de Hubble), avec stades intermédiaires ab, bc, cd, dm;
- 2 variétés : *r* (pour « ring ») et *s* (en forme de « s ») .

Ainsi, un type complet mentionnera chacun de ces critères. On écrira par exemple $S(r)Ac$. Enfin, on distingue parmi les Elliptiques et les Lenticulaires E^- , E , E^+ , L^- , L , et L^+ . Certains

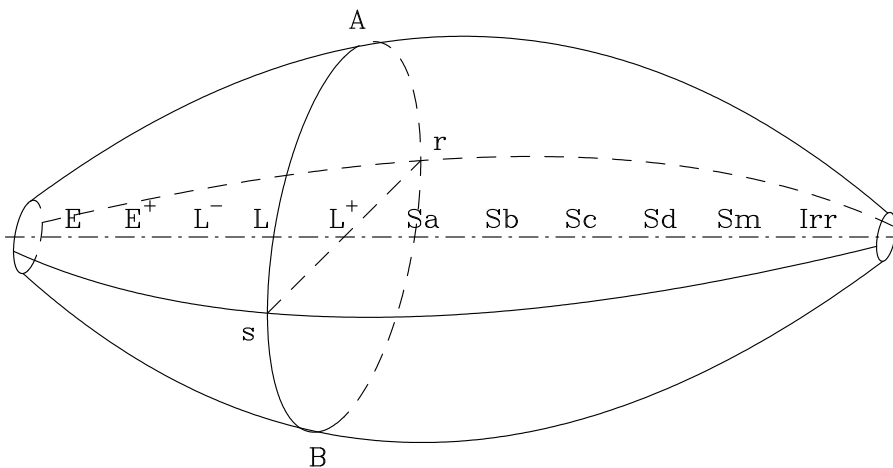


FIGURE 7.2: Le volume de classification de galaxies

représentent la séquence (continue) des types de galaxies dans une figure tridimensionnelle appelée *volume de classification* (Fig. 7.2).

Par la suite d'autres types de galaxies ont été introduits, comme les galaxies elliptiques supergéantes de type cD, aux contours diffus, et qui occupent souvent le centre des amas réguliers (Morgan 1958), et les galaxies « cacahuètes » de type DD0.

Peu de galaxies échappent à cette classification, même si elles ont des noyaux actifs, multiples ou si elles sont en collision.

Les galaxies sont vues depuis la Terre sous un certain angle, et la forme observée est le résultat de la projection sur le plan du ciel (perpendiculaire à la ligne de visée) de leur forme

réelle. L'observation fournit le rapport $q = b/a$ entre les axes apparents de l'image de la galaxie sur le plan du ciel. Si on assimile la galaxie à un ellipsoïde de révolution, et si i désigne l'inclinaison du plan de la galaxie par rapport au plan du ciel, on a

$$\cos^2 i = \frac{q^2 - q_0^2}{1 - q_0^2}, \quad (7.1)$$

si q_0 désigne l'aplatissement réel de la galaxie. On voit que si $i \simeq 0$, on ne peut rien dire sur q_0 . Heidmann et de Vaucouleurs (1972) ont estimé q_0 pour les différents types de galaxies à partir d'études statistiques (Table 7.1).

TABLE 7.1: Valeur de l'aplatissement (q_0) pour différents types de galaxies

Type	q_0	Type	q_0	Type	q_0	Type	q_0
E ⁻	0.33	L ⁺	0.21	Sb	0.13	Sd	0.08
E		S0/a	0.19	Sbc	0.12	Sdm	0.12
E ⁺	0.29	Sa	0.17	Sc	0.11	Sm	0.16
L ⁻	0.26	Sab	0.15	Scd	0.09	Irr	0.20
L	0.23						

7.3.3 Description des types de galaxies

Essayons maintenant de dégager quelques traits morphologiques généraux des grands types de galaxies.

Les galaxies elliptiques

Aussi paradoxal que ça puisse paraître, la première question que l'on peut se poser à propos de ces galaxies est : quelle est leur forme ? Leur aspect est en fait tellement régulier qu'il est difficile de savoir si nous les voyons de face ou de profil. En un mot, l'angle i est très difficile à connaître. Par conséquent, on doit se fier à la statistique. Il est vite apparu que les différents types de galaxies elliptiques (E0 à E7) n'étaient pas uniquement dus à un simple effet de projection. Les mesures de vitesses de rotation de ces galaxies (par décalage Doppler entre les différents endroits de l'objet) ont révélé que ces galaxies ne tournaient pas assez vite pour que leur aplatissement puisse être expliqué par la rotation, du moins si elles avaient la forme d'ellipsoïdes de révolution.

Ce fait a été confirmé par des mesures photométriques. Les galaxies elliptiques n'ont donc pas une forme simple. Elles se présenteraient plutôt sous la forme d'ellipsoïdes à trois axes inégaux.

En dehors de cela, les galaxies elliptiques forment une famille très homogène qui semble pouvoir être décrite, en première approximation, par un seul paramètre, la luminosité intrinsèque.

Les galaxies lenticulaires

Ces galaxies sont celles qui posent le plus de problèmes aux astronomes. Leurs propriétés sont intermédiaires entre les galaxies spirales et les Elliptiques. Cependant, il semble maintenant

acquis qu'il s'agit d'une classe bien distincte de galaxies. Ce ne sont pas des Spirales en train de se transformer en Elliptiques ou vice-versa.

Comme les Spirales, les Lenticulaires possèdent un bulbe et un disque, mais l'importance du bulbe par rapport au disque est dans le cas des Lenticulaires beaucoup plus grande : un disque de Spirale est en moyenne 10 fois plus grand que son bulbe, alors que pour une Lenticulaire, leur taille est du même ordre.

Le disque des Lenticulaires ne présente pas de structure apparente, bien que certains d'entre eux possèdent de larges bandes de poussières et qu'on puisse, dans certains cas, y reconstituer de vagues bras spiraux irréguliers.

Les galaxies spirales

Près de deux galaxies sur trois sont spirales. Pour le profane, les galaxies spirales, avec leur bras spiraux, sont sans doute les objets les plus spectaculaires du ciel. Pourtant ces bras représentent au plus quelques % de leur masse. Les bras ne sont visibles que parce qu'ils sont les zones les plus actives des galaxies. C'est là que se forment la majorité des étoiles, et qu'on trouve les plus lumineuses d'entre elles.

Une galaxie spirale est composée de deux systèmes. Une première partie à peu près sphérique — le bulbe — occupe la partie centrale et peut se prolonger plus ou moins suivant le type de la galaxie. Pris individuellement, ce bulbe présente des analogies morphologiques avec les galaxies elliptiques. L'autre partie est un disque, qui contient en particulier les bras spiraux, et dont la luminosité décroît exponentiellement du centre vers les bords. Dans les spirales « normales », les bras spiraux se rattachent au bulbe, mais de nombreuses spirales présentent une *barre* entre le bulbe et les bras. On parle de spirales barrées. Les galaxies ayant les bras spiraux les plus développés semblent, d'un point de vue observationnel, être soit les galaxies en interaction avec d'autres, soit les galaxies barrées.

Outre un bulbe et un disque, une galaxie spirale possède également souvent un *halo*, c'est à dire une sorte de nuage diffus de forme grossièrement sphérique, centré sur la galaxie, dans lequel baignent le bulbe et le disque. La densité de matière du halo est a priori beaucoup moins importante que celle du bulbe et du disque, mais sa grande taille peut faire en sorte que sa masse ne soit pas du tout négligeable par rapport au reste de la galaxie. Le halo de notre galaxie est approximativement une sphère de 30 kpc de diamètre. En matière d'étoiles, on trouve surtout dans le halo des *amas globulaires*, amas de plusieurs milliers d'étoiles de forme sphérique. Ces amas globulaires sont tous constitués de vieilles étoiles. Dans le cas de notre galaxie, on a pu vérifier que ce sont les plus vieilles de la galaxie.

Les galaxies irrégulières

Les galaxies irrégulières, les moins nombreuses, sont celles qui n'ont pas de structure bien définie ou qui présentent des caractères communs à tous les groupes. Parmi la grande diversité de ces galaxies, deux groupes ont été particulièrement étudiés : Les galaxies *irrégulières magellaniques* et les galaxies *bleues compactes*.

L'archétype des premières est le Grand Nuage de Magellan. Comme les Spirales, les Irrégulières magellaniques sont caractérisées par un bulbe, cependant beaucoup plus petit, et un disque sans structure spirale. Par contre, on remarque souvent dans le disque la présence d'une barre, comme dans le cas du Grand Nuage. Ces galaxies ont en général une masse assez faible, entre 10^9 et $10^{10} M_{\odot}$, contre $10^{11} M_{\odot}$ pour une Spirale typique.

Dans les années 1950, l'astronome suisse Fritz Zwicky a découvert une autre classe de galaxies irrégulières, les galaxies bleues compactes. Leurs dimensions sont en général beaucoup

plus petites que les irrégulières classiques, et leurs masses de l'ordre de quelques $10^8 M_\odot$. Elles sont très actives du point de vue de la formation d'étoiles.

7.4 Photométrie des galaxies

7.4.1 Définitions générales

On définit la notion de *magnitude* d'une galaxie exactement comme pour une étoile. Appelant m la magnitude apparente d'une galaxie, M sa magnitude absolue, f son flux mesuré sur Terre, L sa luminosité, on a le jeu de formules suivantes :

$$m = -2.5 \log \left(\frac{f}{f_0} \right) \quad ; \quad (7.2)$$

$$m - M = 5 \log d(\text{pc}) - 5 + A = 5 \log d(\text{Mpc}) + 25 + A \quad ; \quad (7.3)$$

$$M - M_\odot = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right) \quad , \quad (7.4)$$

où f_0 représente un flux de référence, M_\odot et L_\odot les magnitude et luminosité du Soleil, pris comme référence ici.

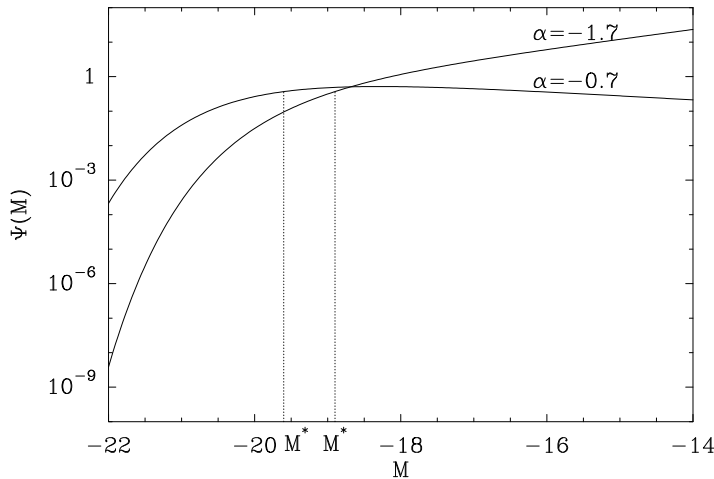


FIGURE 7.3: La distribution de Schechter des galaxies en magnitude, pour deux valeurs de l'exposant α

Rappelons que la magnitude absolue d'un objet est par définition la magnitude apparente qu'il aurait s'il était vu depuis la Terre à une distance de 10 pc. Dans ces conditions, on a $M_\odot = 4.75$. Ici, A désigne l'absorption *galactique*, c'est à dire l'absorption due à la quantité de milieu interstellaire de *notre* galaxie située entre nous et la galaxie lointaine. Les galaxies sont des objets beaucoup plus brillants que les étoiles individuelles ; leurs magnitudes absolues sont donc largement négatives, autour de -20 . Typiquement, une galaxie géante aura une magnitude absolue de l'ordre de -22 , et une galaxie naine de l'ordre de -18 .

La distribution du nombre de galaxies en fonction de leur luminosité obéit grossièrement à la loi semi-empirique de Schechter (1976), de densité

$$\Phi(L) dL = \frac{\Phi^*}{L^*} \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) dL \quad , \quad (7.5)$$

où Φ^* est une constante de calibration, α un exposant, et L^* une luminosité standard, paramètres de la relation. En magnitude, la relation correspondante est

$$\Psi(M) dM = (0.4 \ln 10) \Phi^* 10^{0.4(\alpha+1)(M^*-M)} \exp \left(-10^{0.4(M^*-M)} \right) dM \quad , \quad (7.6)$$

où M^* est la magnitude correspondant à L^* . Grossièrement, cette distribution traduit le nombre plus élevé de petites galaxies ($M > M^*$) (Fig. 7.3). Cette formule n'est qu'approximative, car suivant les types de galaxies, les paramètres de cette loi varient de

($M^* = -19.6$, $\alpha = -0.7$) pour les types précoces (\rightarrow Elliptiques), jusqu'à ($M = -18.9$, $\alpha = -1.7$) pour les types tardifs (\rightarrow Irrégulières). Concrètement, pour les types précoces, la distribution des galaxies marque un pic autour de $M = M^*$, tandis que pour les types tardifs, le nombre de galaxies continue à augmenter lorsque M augmente. Le pic est à relier à la taille des bulbes.

Une galaxie apparaît la plupart du temps sur le ciel comme un objet étendu, de telle sorte qu'on ne se contente pas d'en donner la magnitude intégrée. La photométrie des galaxies consiste en la détermination en divers points de leur image de leur brillance superficielle. La brillance superficielle se mesure en *magnitude apparente par seconde d'arc carré* (que nous noterons $\text{mag}/''^2$). En fait, conformément à la définition d'une magnitude, si μ est la magnitude par seconde d'arc carré, la brillance superficielle I vérifiera $I = e^{-0.4\mu}$.

L'intérêt principal de ce type d'étude est de fournir en premier lieu des modèles de lois empiriques de brillance superficielle en fonction des types de galaxies. On peut en déduire des modèles dynamiques, à travers l'hypothèse d'un rapport masse sur luminosité supposé constant, au moins pour une population stellaire donnée. Les mesures sont délicates à effectuer. La brillance superficielle d'une galaxie varie entre 15 et 28 $\text{mag}/''^2$. Il y a donc une grande dynamique. Le problème est que la brillance du fond du ciel est de l'ordre de 21.5 $\text{mag}/''^2$. On est donc amené, dans les régions externes de l'image d'une galaxie, à mesurer une brillance qui est environ 0.3% de celle du fond de ciel!

On imaginera aisément que grossièrement l'image d'une galaxie standard présentera un pic de brillance superficielle au centre de l'image. Nous définirons un *isophote* comme une courbe de brillance superficielle égale dans cette image¹.

7.4.2 Galaxies elliptiques et bulbes de galaxies spirales

Les premières mesures ont été faites par Reynolds en 1913 sur le bulbe de M31. Elles furent complétées par Hubble en 1930, à partir de l'étude d'une quinzaine de galaxies elliptiques. Il propose une loi du type

$$I(r) = \frac{I_0}{(r+a)^2} \quad , \quad (7.7)$$

pour $0.3 \leq r/a \leq 30$.

Le souci de G. de Vaucouleurs fut d'éliminer la constante I_0 , qui dépend de la turbulence atmosphérique (*seeing*). Il introduit un *niveau isophotal* et un *rayon isophotal*. Si A est l'aire enfermée par l'isophote de niveau I , on appelle rayon de l'isophote $r = \sqrt{A/\pi}$; on considère le rayon particulier, rayon effectif r_e qui est celui de l'isophote qui contient la moitié de la lumière. G. de Vaucouleurs trouve la loi

$$\log \frac{I(r)}{I_e} = -3.30 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \quad , \quad (7.8)$$

dite « loi en $r^{1/4}$ ». Cette loi est établie à partir de mesures effectuées sur un ensemble de valeurs de r : $0.001 \leq r/r_e \leq 20$. Dans le cas de NGC3379, qui a été très soigneusement étudiée par de Vaucouleurs et Capaccioli et qui sert de standard, cette loi est vérifiée entre les magnitudes 18 et 28, soit un facteur 10^4 sur la luminosité. Cette loi est remarquable parce qu'elle n'a pas de paramètre libre.

Un cas particulier est à mentionner : celui des galaxies elliptiques naines compagnons de galaxies géantes, et dont l'extension semble limitée par effet de marée. Une situation similaire

1. Un peu comme une ligne de niveau sur une carte...

se produit dans les amas globulaires de notre Galaxie. I. King a montré que la luminosité peut se représenter par la relation

$$I(r) = K \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (r/r_c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_t/r_c)^2}} \right]^2, \quad (7.9)$$

où r_c est le rayon du cœur et r_t le rayon de troncature. Pour $r = r_t$, $I(r) = 0$. K est un facteur d'échelle.

Dans les années 1990, une nouvelle loi dite de « Nuker » à quatre paramètres a été proposée :

$$I(r) = I_B 2^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}} \left(\frac{r}{r_b} \right)^{-\gamma} \left[1 + \left(\frac{r}{r_b} \right)^\alpha \right]^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha}}. \quad (7.10)$$

Cette loi est en $r^{-\gamma}$ pour $r \ll r_b$, en $r^{-\beta}$ pour $r \gg r_b$, la largeur de la zone de transition étant contrôlée par le paramètre α .

7.4.3 Composante plate des disques (Spirales et Lenticulaires)

La distribution de lumière dans le disque suit une loi exponentielle :

$$I(r) = I_0 e^{-r/r_0}. \quad (7.11)$$

Freeman (1970) a montré que I_0 varie peu et il adopte une valeur moyenne $21.65 \pm 0.3 \text{ mag}''^{-2}$. Cette loi semble générale au moins pour les galaxies intrinsèquement lumineuses. Par ailleurs, l'échelle de longueur r_0 du disque varie suivant les galaxies de 5 kpc pour une Sc à 1 kpc pour une irrégulière. Dans les systèmes nains, I_0 semble être plus petit.

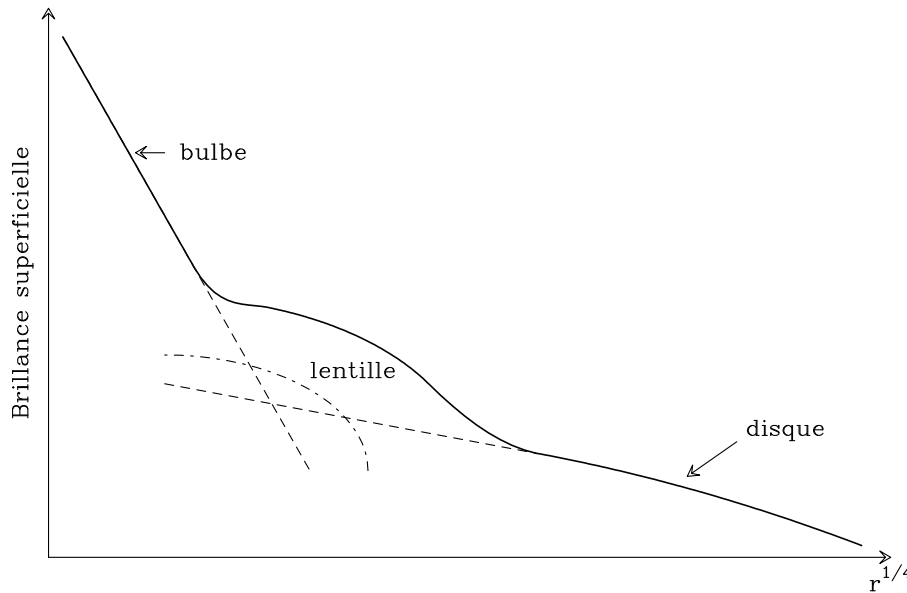


FIGURE 7.4: Exemple d'interprétation d'un profil photométrique observé en 3 composantes : bulbe, disque, lentille

Sersic (1968) a tenté de généraliser la loi en $r^{1/4}$ en proposant une loi du type

$$\log \frac{I(r)}{I_e} = -b_n \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right]. \quad (7.12)$$

Pour $n = 4$ on retrouve une loi en $r^{1/4}$ et pour $n = 1$ une loi exponentielle. On s'attend à une transition continue entre $n = 4$ et $n = 1$ entre le bulbe et le disque d'une galaxie spirale. Le profil photométrique complet d'une galaxie est plus complexe. À la composante bulbe et la composante disque se superposent parfois une barre et une lentille (Fig. 7.4). Les barres sont peu brillantes (faible contraste) et leur photométrie est difficile. Certaines suivent la loi en $r^{1/4}$.

7.5 Répartition des galaxies dans l'Univers

Une galaxie n'est pas en général un système isolé ; les galaxies sont rassemblées en couples ou en amas. L'évolution d'une galaxie est souvent perturbée par ses voisines ; la dynamique des interactions mutuelles entre galaxies et des amas de galaxies est actuellement un domaine en pleine expansion.

L'existence de ces interactions provient du fait que les distances mutuelles entre galaxies ne sont pas « si grandes que ça » si on les compare à leur taille individuelle. Prenons un exemple : Notre Galaxie a un diamètre de 30 kpc. La galaxie d'Andromède, la plus proche de nous qui ait une taille comparable, est située à 670 kpc, ce qui représente seulement 22 fois plus. En comparaison, l'étoile la plus proche du Soleil (*Proxima Centauri*) est située à 1.3 pc. Plaçons les limites de notre système planétaire à 50 UA $\simeq 2.42 \times 10^{-4}$ pc du Soleil. Le rapport est ici de près de 5 400 ! Les étoiles, à l'intérieur d'une galaxie, mêmes accompagnées de leurs systèmes planétaires, sont donc beaucoup plus « isolées » que les galaxies entre elles. Des effets de marée entre galaxies peuvent donc exister.

Il se trouve que les galaxies sont généralement rassemblés en groupes gravitationnellement liés. Le regroupement de galaxies dans une même région du ciel pourrait passer comme un pur effet de projection sans réalité. Cependant, les tailles relatives apparentes des galaxies observées dans un même regroupement montrent que celles-ci ne sont pas situées à des distances très différentes. Par ailleurs, ce type de regroupement est par trop systématique pour n'être que pur hasard.

De manière plus précise, on distingue les paires, les groupes, les amas, et les superamas. Entre un groupe et un amas, il n'y a pas de différence conceptuelle, mais il y en a une dans le mode de traitement, et c'est ce qui a conduit à la distinction. De plus, les amas sont plus facilement identifiables. Dans le cas des groupes, les problèmes d'appartenance sont plus cruciaux.

Les paires de galaxies ont des dimensions typiques de 0.1 Mpc. On range dans cette catégorie tous les ensembles de deux galaxies (ou un petit nombre) en interaction mutuelle. On y classe aussi les petites galaxies satellites des grandes, tels les nuages de Magellan autour de notre Galaxie. Les membres individuels de telles associations sont souvent reliés par des ponts de matière, et c'est le cas en particulier des nuages de Magellan qui sont reliés à notre Galaxie par les *courants magellaniques* (ponts d'hydrogène neutre). C'est par ailleurs une tendance assez commune aux galaxies géantes (Andromède, par exemple) que d'être souvent accompagnées de tout un cortège de galaxies naines gravitant autour d'elles. En appliquant les lois de la mécanique céleste à deux corps, l'identification du mouvement orbital des satellites permet d'estimer la masse de la grande galaxie mère. On trouve en général des valeurs comparables à ce qui est obtenu à partir des courbes de rotation.

La taille des groupes va de 1 à 2 Mpc. De Vaucouleurs a montré que dans l'environnement proche (jusqu'à 20 Mpc), 85% des galaxies sont dans des groupes. Il a recensé une cinquantaine de groupes dans un rayon de 16 Mpc autour de nous, chacun d'entre eux comportant quelques dizaines de membres. Le meilleur exemple de groupe dont nous disposons est peut être le *groupe local*, c'est à dire celui dont notre Galaxie fait partie : on dénombre en partant de notre Galaxie une trentaine de galaxies situés à moins de 1.3 Mpc, plusieurs milliers entre 2.4 et 15 Mpc, mais *aucune* entre 1.3 et 2.4 Mpc, ce qui montre que la trentaine de galaxies proches forme une entité distincte du reste. C'est le groupe local. Si on dresse l'inventaire du groupe local, on y trouve deux Spirales géantes, la nôtre et Andromède (M31, ou NGC 224), deux Spirales moyennes, la galaxie du Triangle (M33, ou NGC 598) et le Grand Nuage de Magellan, une Elliptique à noyau (M32 ou NGC 221), une demi-douzaine de petites galaxies irrégulières, une douzaine de galaxies elliptiques naines, plus quelques objets très faibles ressemblant à des amas globulaires isolés,

et dont la liste s'accroît régulièrement avec le perfectionnement des techniques d'observations. Signalons également que loin d'être homogène, le groupe local semble s'organiser en deux sous-ensembles distincts, l'un autour de notre Galaxie, et l'autre autour d'Andromède.

Les amas ont des dimensions supérieures à 10 Mpc. Ils constituent des concentrations importantes de galaxies. Ils se distinguent des groupes car ils regroupent plus de galaxies (jusqu'à plusieurs milliers). On distingue les amas réguliers (de symétrie sphérique, souvent organisés autour d'une galaxie elliptique géante de type cD) et les amas irréguliers. Au centre des amas, la densité de galaxies par unité de volume peut atteindre 10^6 fois la densité moyenne des galaxies dans l'Univers. Les deux amas les plus proches de nous sont celui de *Virgo*, situé à 20 Mpc en direction du pôle nord galactique, et celui de *Coma*, situé à environ 100 Mpc dans la constellation de la Chevelure de Bérénice. Signalons par ailleurs qu'environ 10% des galaxies échappent à la classification en groupes ou amas. Ce sont des galaxies isolées que l'on nomme « galaxies de champ ».

Les superamas sont des regroupements du second ordre, c'est à dire des associations de groupes et d'amas. G. de Vaucouleurs a montré que notre groupe local, ainsi que quelques dizaines de groupes de galaxies proches, fait partie d'un système beaucoup plus grand, de 15 Mpc de rayon, centré sur l'amas *Virgo* : le superamas local. Le groupe local se situe plutôt à la périphérie de ce système. Cependant, le superamas local est relativement pauvre, car il ne contient qu'un seul amas riche en son centre (*Virgo*), plus quelques amas pauvres. Abell a trouvé une cinquantaine de superamas contenant chacun en moyenne une dizaine d'amas riches. Le plus grand d'entre eux comprend 29 amas riches et plusieurs dizaines d'amas plus petits. Le diamètre de ces structures est de l'ordre de 100 Mpc.

Outre les superamas, l'Univers semble également comporter de grandes régions pratiquement vides de galaxies. De plus, amas et superamas pourraient être confinés dans les parois de ces gigantesques blocs de vide de 100 Mpc de côté.

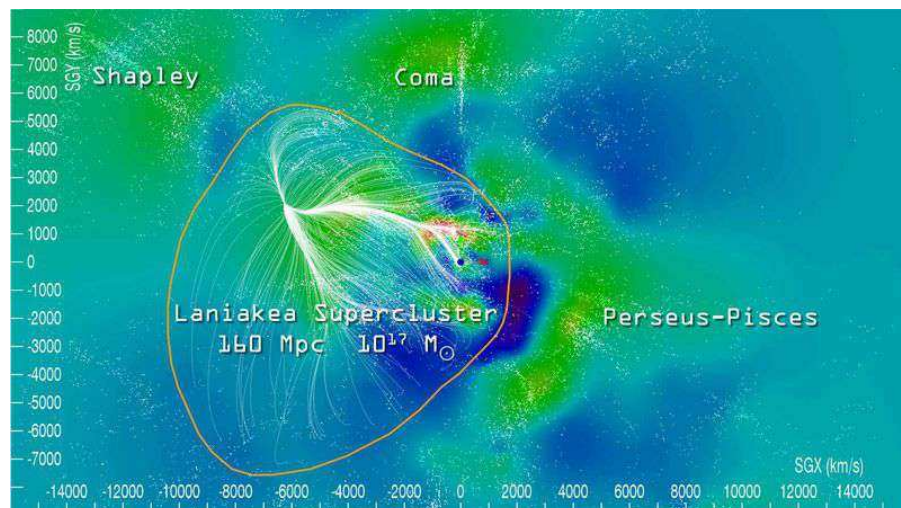


FIGURE 7.5: Représentation bidimensionnelle, projetée sur la plan du superamas local, de l'hyperstructure Laniakea impliquant le superamas local et ses voisins, ainsi que des lignes de courant associées.

On a longtemps pensé que la hiérarchie des structures dans l'Univers s'arrête aux superamas : on observe en effet que, sur des échelles plus grandes que 1 000 Mpc, c'est à dire des distances que

la lumière met plus de 3×10^9 ans à parcourir, les variations de densité des galaxies deviennent deux fois plus petites que la densité moyenne des galaxies.

Il a cependant été prouvé en 2014 (R. Brent Tully, H. Courtois, Y. Hoffman, D. Pomarède) que le superamas local ainsi que quelques superamas locaux (Hydra-Centaurus, Pavo-Indus et d'autres structures plus petites) étaient associés en une structure plus grande d'environ 160 Mpc à laquelle il a été donné le nom de *Laniakea*. Les superamas en questions convergent à une vitesse d'environ 630 km s^{-1} vers une région située dans le superamas de Hydra-Centaurus appelée *grand attracteur*, probablement lié à une concentration exceptionnelle de galaxies. Laniakea ne constitue pas pour autant une structure autogravitante. La figure 7.5 montre une représentation projetée de Laniakea.

À plus grande échelle, l'Univers est homogène et isotrope. Là commence le royaume de la cosmologie.

7.6 Le contenu des galaxies

7.6.1 Contenu stellaire

En principe, il faudrait pouvoir étudier le diagramme HR d'une galaxie pour décrire correctement son contenu stellaire. Ceci a été fait pour les amas d'étoiles et pour les associations d'étoiles de la Galaxie. Cette procédure est intéressante car elle se traduit directement en termes d'évolution.

Malheureusement, mis à part pour les Nuages de Magellan, cette procédure s'applique difficilement aux galaxies pour la simple raison qu'on n'y voit pas les étoiles individuellement. Nous ne disposons que de propriétés intégrées qui proviennent du spectre composite produit par une région donnée de la galaxie étudiée. Cependant, les raies d'absorption qui caractérisent les différents types spectraux constituent des indicateurs sensibles des différents types d'étoiles.

Les étoiles représentent 90% de la masse des galaxies en moyenne. Globalement, on introduit deux types extrêmes de populations stellaires. La *Population I* est riche en étoiles jeunes. Sa luminosité est dominée par la lumière des étoiles super-géantes bleues. Elle est caractéristique des bras des Spirales. La *Population II* est déficiente en étoiles jeunes et en éléments lourds (dans notre galaxie). Sa luminosité est dominée par les géantes rouges. Elle est caractéristique des amas globulaires.

La plupart des galaxies sont des mélanges de ces types extrêmes de populations, en proportions différentes.

7.6.2 Contenu en gaz interstellaire

De façon générale, le milieu interstellaire (gaz et poussières) est un constituant important pour la plupart des galaxies. Dans la nôtre, il représente à peu près 5% à 10% de la masse totale; dans les Irrégulières, il atteint 30%.

Plusieurs processus physiques permettent d'obtenir de l'information sur la composition et les conditions physiques du milieu interstellaire, à partir d'observations effectuées dans le domaine visible ou radio.

Hydrogène neutre atomique

L'hydrogène est le constituant essentiel du milieu interstellaire. La majeure partie de l'hydrogène se trouve sous l'état d'hydrogène atomique H I. Il est donc un bon indicateur du

gaz interstellaire. Le meilleur traceur est la raie à 21 cm. C'est une raie correspondant à une transition hyperfine de l'atome d'hydrogène (renversement du spin de l'électron). Sa longueur d'onde (21 cm) la place dans le domaine radio. En prenant en compte les caractéristiques de la raie, on peut remonter à une estimation la masse totale d'hydrogène M_H de la galaxie.

Dans notre Galaxie, l'hydrogène neutre se trouve principalement sous forme de petits nuages isolés, dont la dimension est de l'ordre du parsec, et caractérisés par une densité de 10 atomes par cm^3 et une température de 100 K; ces nuages baignent dans une phase beaucoup plus chaude ($\sim 10^6$ K) et très ténue (10^{-3} cm^{-3}) appelée phase coronale.

Le gaz ionisé

Le gaz ionisé dans les galaxies correspond en fait essentiellement à l'hydrogène ionisé (H II). Malheureusement, ce dernier est indétectable spectroscopiquement. On doit donc étudier d'autres raies d'atomes ionisés qui sont supposées apparaître dans des conditions similaires à H II. En fait, le meilleur traceur de l'hydrogène ionisé est l'hydrogène neutre *excité*, émetteur dans la raie H_α (6562 Å) dans la partie rouge du spectre visible. En effet là où les processus locaux sont suffisamment efficaces pour exciter l'hydrogène neutre au point de le rendre émissif en H_α , ils sont aussi capable de l'ioniser, et vice versa. Observationnellement, l'hydrogène ionisé se trouve dans des zones bien délimitées appelées *région* H II, qui se trouvent en fait associées aux étoiles chaudes de type \mathcal{O} et \mathcal{B} . Ces étoiles arrivent à ioniser le milieu interstellaire sur plusieurs parsecs autour d'elles.

Le gaz moléculaire

L'hydrogène moléculaire H_2 est d'une importance capitale dans notre Galaxie. H_2 est difficile à observer directement (molécule symétrique, sans moment dipolaire). Le meilleur traceur (indirect) du gaz moléculaire reste la molécule CO, en supposant un rapport d'abondances H/C qui soit le même dans le milieu interstellaire atomique et dans les associations moléculaires. L'intérêt de CO est grand car

- on l'observe dans des transitions du domaine radio (transitions à 1.3 mm et 2.6 mm);
- CO est un bon traceur du gaz moléculaire car il nécessite des densités supérieures à 10^3 cm^{-3} pour être excité. Or de telles densités sont caractéristiques des nuages moléculaires, les autres parties du milieu interstellaire ayant des densités généralement beaucoup plus faibles;
- CO est la molécule la plus abondante après H_2 [$N(\text{CO})/N(\text{H}_2) \simeq 10^{-4}$];

L'observation dans notre galaxie a montré que la masse d'hydrogène sous forme moléculaire était du même ordre de celle d'hydrogène sous forme atomique. Mais globalement, la distribution de CO (et donc de H_2) est concentrée dans les *nuages moléculaires géants* (« GMC », pour « Giant Molecular Clouds »), caractérisés par

- des dimensions allongées (typiquement 20×100 pc);
- une densité supérieure à 10^3 cm^{-3} ;
- une masse de H_2 de l'ordre de $10^5 M_\odot$.

Les GMC sont associés aux étoiles jeunes et jouent un rôle crucial dans le processus de formation d'étoiles.

7.6.3 Les poussières

La matière solide dans le milieu interstellaire (outre les étoiles elles-mêmes et les éventuels systèmes planétaires les accompagnant) se trouve sous la forme de grains de poussières. Ceux-ci

ne sont pas aisés à détecter, car ils n'émettent pas de rayonnement, et il n'absorbent pas à des fréquences bien précises comme des atomes ou des ions constituant un gaz. On ne peut donc pas les détecter facilement en *spectroscopie*.

Historiquement, la présence de matière sombre dans le milieu interstellaire a été suspectée lorsqu'on a commencé à voir des « trous » dans la Voie Lactée. Cet effet appelé *extinction* est l'effet principal des poussières. Aujourd'hui, on peut étudier plus précisément la composition chimique de ces grains en étudiant leur spectre d'émission dans l'infrarouge proche (raie de la glace à $3.07 \mu\text{m}$, raie très large et prononcée à $10 \mu\text{m}$, raies des silicates vers $10\text{--}12 \mu\text{m}$). C'est ainsi qu'on confirme que ces grains sont faits d'aggrégats de silicates et de graphite entourés de glace.

L'extinction moyenne due aux poussières, c'est à dire une atténuation de la lumière des étoiles observées à travers le milieu interstellaire, vaut

$$A_V = 0.85 \text{ magnitudes / kpc} \quad . \quad (7.13)$$

L'extinction interstellaire est en fait variable en fonction de la longueur d'onde. La valeur donnée correspond à la longueur d'onde de la raie H_β (4861 \AA), donc dans le visible (filtre V). La dépendance de l'extinction en fonction de la longueur d'onde présente des caractéristiques à peu près identiques dans toutes les directions d'observations. Ceci est un fait plutôt remarquable car, étant donnée l'extrême inhomogénéité du milieu interstellaire, on pourrait s'attendre à des variations. Ces variations existent en fait, mais elles sont mineures. Tout ceci ne fait que traduire le fait que l'extinction ne devient significative que sur des distances de l'ordre du kiloparsec au minimum, ce qui est supérieur à l'échelle d'inhomogénéité du milieu interstellaire.

Observationnellement, on trouve essentiellement que $A(\lambda) \propto \lambda^{-1}$. La dépendance en λ^{-1} s'explique bien par la nature diélectrique (glaces) des grains et une taille variant entre 0.1 et $10 \mu\text{m}$, c'est à dire en fait plus petites que la longueur d'onde.

Indépendamment de son étude proprement dite, l'extinction est a priori un phénomène gênant pour l'astronomie. C'est d'autant plus vrai que la dépendance en λ^{-1} tend à « rougir » la lumière des étoiles (le bleu est plus absorbé que le rouge). L'extinction dans le plan de la Galaxie empêche d'observer les étoiles lointaines situées au voisinage de son plan de symétrie, et d'étudier toute la partie du milieu extragalactique se situant dans une bande centrée sur la Voie Lactée. La Voie Lactée nous apparaît d'ailleurs comme divisée en deux par une obscure bande de poussières, et cet aspect se retrouve dans les galaxies extérieures. Par contre, la Galaxie est beaucoup plus « transparente » en infrarouge que dans le visible, et on peut « voir » le centre galactique aux longueurs d'onde supérieures à $2 \mu\text{m}$.

Le rougissement de la lumière stellaire peut être utilisé pour évaluer l'extinction, par comparaison avec des étoiles semblables mais plus proches. La mesure de l'extinction par cette méthode reste toutefois difficile. On constate en général que cette quantité est proportionnelle à la quantité de gaz interstellaire mesurée par d'autres moyens, impliquant que gaz et poussières sont bien mélangés dans le milieu interstellaire.

La mesure de l'extinction et de la composition des grains permet de remonter à une estimation de la masse de ces grains. On trouve un rapport entre 1 et 10% par rapport à la masse d'hydrogène. Ainsi, les grains de poussières représentent moins de 10% de la masse du milieu interstellaire, mais leur effet optique est considérable.

7.6.4 Trous noirs supermassifs

De plus en plus d'indices s'accumulent pour indiquer que le centre de chaque galaxie serait occupé par un trou noir supermassif de plusieurs millions de masses solaires. Ces trous noirs sont

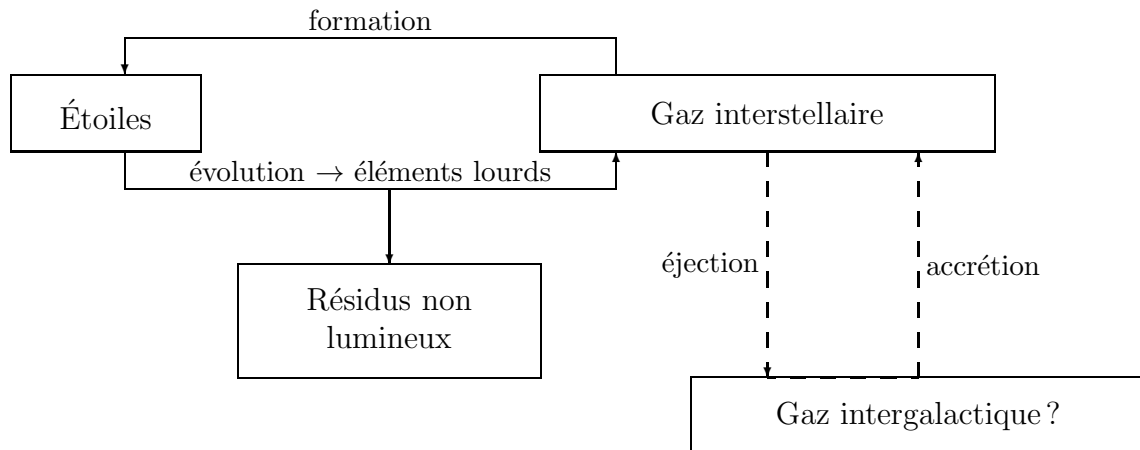


FIGURE 7.6: Schéma de fonctionnement de la Galaxie

en fait assez difficiles à détecter. Il y a deux manières. Soit le trou noir accrète de la matière, et dans ce cas cette accrétion s'accompagne d'une émission lumineuse très importante². La galaxie est alors à noyau actif. On peut estimer la masse du trou noir en supposant que la luminosité de la matière en effondrement est proche de la *Luminosité d'Eddington*, c'est à dire la luminosité maximale que peut avoir un disque en effondrement vis-à-vis de la pression de radiation. On en déduit des masses de trous noirs variant entre $10^6 M_{\odot}$ et $10^{10} M_{\odot}$.

Si la galaxie n'est pas active, c'est gravitationnellement qu'on soupçonne plus qu'on détecte la présence du trou noir. L'idée est de détecter le mouvement orbital autour du centre d'un objet aussi proche que possible du centre et d'en déduire une estimation de la masse au centre par les lois de Képler. Ceci fonctionne en fait surtout pour notre Galaxie, où des résultats récents semblent confirmer la présence d'une masse de 3 à $4 \times 10^6 M_{\odot}$ dans un volume bien inférieur à un parsec cube.

7.7 Cycle de fonctionnement d'une galaxie

Le bilan grossier de fonctionnement de la Galaxie est illustré sur la figure 7.6. La matière y suit un cycle permanent d'échanges entre le milieu interstellaire et les étoiles. Les étoiles se forment dans des régions particulières du milieu interstellaire. Celles-ci vivent un certain temps et finissent par restituer leur matière au milieu interstellaire, au sein duquel se reforment de nouvelles étoiles. Cette image simpliste mérite d'être complétée par un certain nombre de points :

- La matière subit des transformations continues lors de son cycle étoiles – milieu interstellaire. En particulier, la *métallicité* (Z) de la matière composant la Galaxie ne fait qu'augmenter au cours du temps. En effet, les étoiles transforment au cours de leur vie des éléments légers (hydrogène, mais aussi hélium) en éléments lourds (carbone, oxygène, etc...), induisant en définitive une augmentation de la métallicité globale du milieu interstellaire.
- Il existe dans ce cycle de la matière perdue. En fin de vie, les étoiles restituent au milieu

2. en visible, mais également dans des rayonnements plus énergétiques comme les rayons X

interstellaire une partie de leur matière, mais pas toute. Elles produisent également des *résidus non lumineux* se présentant essentiellement sous la forme d'objets compacts (très denses) de petite taille : naines blanches, étoiles à neutrons, trous noirs. Cette matière perdue sort du circuit de fonctionnement.

- Enfin, le fonctionnement de ce cycle peut être perturbé par un éventuel taux d'accrétion de gaz intergalactique, ou de perte de milieu interstellaire dans le milieu intergalactique. On a encore très peu de renseignements sur l'existence et l'importance de ces phénomènes.

7.8 Principaux résultats pour les divers types de galaxies

7.8.1 Les galaxies elliptiques

La plupart des galaxies elliptiques ne présentent pas de signe d'une activité importante. Leur population stellaire est dominée par des étoiles vieilles de type Population II. Par contre, contrairement à ce qui est observée pour la Population II de notre Galaxie, ces étoiles semblent être riches en éléments lourds. L'absence d'étoiles jeunes et la métallicité élevée des étoiles vieilles montrent que ces galaxies ont en fait évolué beaucoup plus rapidement que les Spirales.

Les Elliptiques sont déficientes en gaz interstellaire. Le contenu en hydrogène représente moins de 0.1 % de la masse. De manière générale, cette proportion croît le long de la séquence des types des Elliptiques aux Irrégulières. La faible proportion de gaz des Elliptiques pose en fait un problème, car on ne retrouve pas le gaz que les étoiles évoluées rejettent. Est-il balayé par le milieu intergalactique, expulsé par des jets, ou ionisé ?

7.8.2 Les galaxies lenticulaires

Le contenu stellaire des galaxies lenticulaires se rapproche de celui des Elliptiques. On n'y observe aucune trace de formation récente d'étoiles. Elles ne possèdent pas de régions H II, donc pas d'étoiles chaudes de type \mathcal{O} ou \mathcal{B} . Les couleurs, d'après les modèles numériques d'évolution, montrent que la formation stellaire s'y est arrêtée il y a 5×10^9 ans au moins.

Le contenu gazeux des Lenticulaires est très variable : les plus riches en gaz en contiennent autant que des Spirales, alors que d'autres à l'instar des Elliptiques, n'en contiennent pas du tout. Environ un tiers de Lenticulaires contiennent du gaz.

La question qui se pose au sujet de ces galaxies, est de savoir pourquoi la formation stellaire s'y est arrêtée ? La réponse est peut-être à chercher dans leur environnement. Dans les amas de galaxies, on en trouve de tous les types, mais leurs proportions relatives semblent obéir à certaines règles. En particulier, on a pu montrer que la proportion de Lenticulaires par rapport aux Spirales était fonction de la densité totale de galaxies : plus la densité locale de galaxies dans un amas est élevée, plus le nombre de Lenticulaires y est élevé. Il semble donc que si une galaxie se forme dans un milieu dense, elle devienne préférentiellement une Lenticulaire ; si elle se forme isolément, elle deviendra une Spirale. Cette constatation semble suggérer que les Lenticulaires se forment à la suite de la perte de leur milieu interstellaire, par interaction avec le milieu intergalactique relativement dense dans l'amas (par rapport à d'autres endroits où le milieu intergalactique est plus ténu).

7.8.3 Les galaxies spirales

Les deux sous-systèmes composant les galaxies spirales (bulbe et disque) présentent des caractéristiques bien distinctes. Le bulbe est en général composé d'étoiles vieilles, et pris

isolément, il s'apparente à une galaxie elliptique. Le disque est beaucoup plus jeune. Il renferme encore une quantité notable de gaz interstellaire (quelques % en masse), et une grande activité y règne ; du point de vue de la formation d'étoiles et de l'enrichissement chimique, son évolution est loin d'être terminée. Le bulbe, comme les amas globulaires, est généralement composé d'étoiles de Population II, déficientes en métaux, alors que la Population I se concentre dans le disque. Tout ceci montre que le bulbe s'est en général formé bien avant le disque.

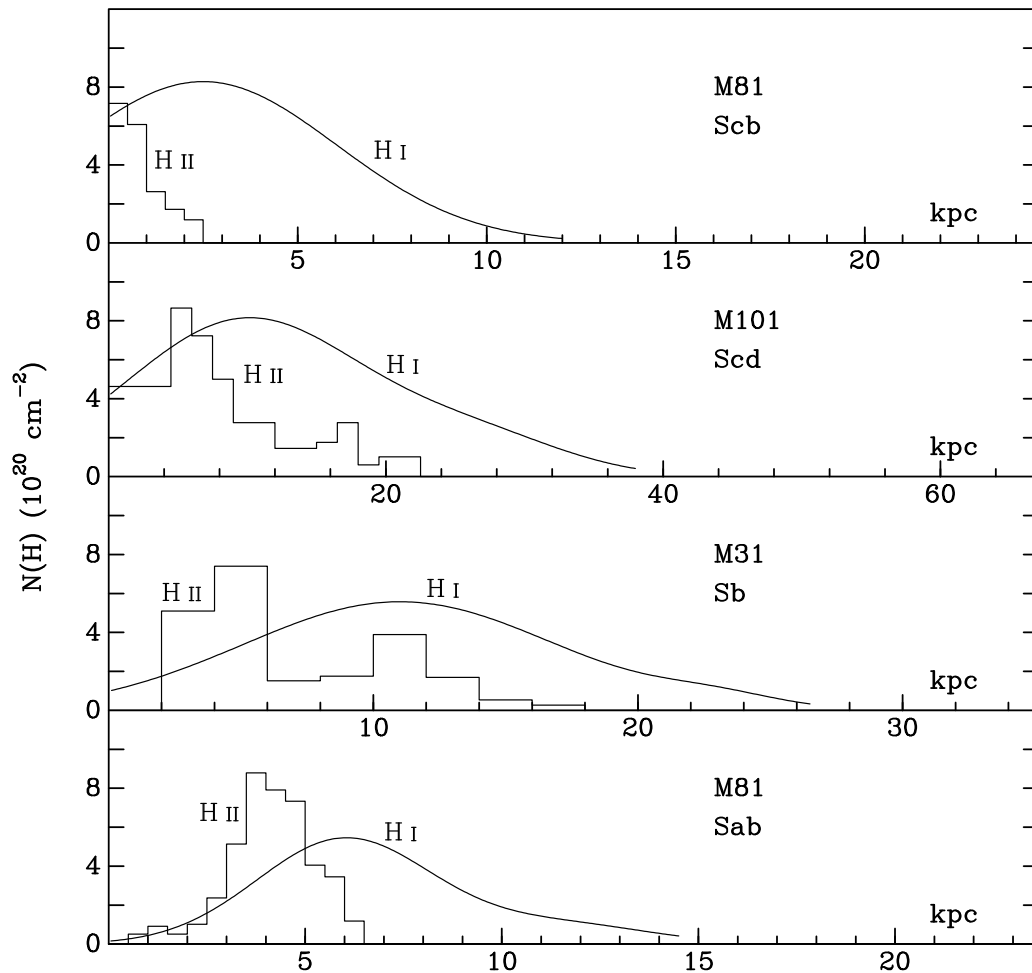


FIGURE 7.7: Distribution du gaz neutre (H I) et du gaz ionisé (H II) dans 4 galaxies spirales. Les galaxies de type Sa – Sb comme M81 semblent présenter une sorte d'anneau d'hydrogène neutre

Concernant le gaz interstellaire, l'étude à bonne résolution dans les galaxies proches a montré que

- l'extension de l'hydrogène neutre (H I) est plus grande que celle des étoiles ;
- la distribution est souvent dissymétrique, le centre de gravité du gaz ne coïncidant pas avec celui de la galaxie (dans 30% des Sb et Sc) ;
- l'hydrogène neutre est concentré dans la région des bras spiraux et il y a un creux de la distribution de la densité H I projetée au centre (Fig. 7.7). Il se peut que cette dépression centrale soit due à une activité passée de formation d'étoiles plus intense dans ces régions centrales ;
- les régions H II sont quant à elles concentrées dans une région annulaire avec un minimum dans la partie centrale (Fig. 7.7). Cette distribution est corrélée avec celle du gaz neutre, à l'échelle de l'ordre du parsec. Ceci conduit à dire que le taux de formation d'étoiles

(qui sont responsables de l'excitation des régions H II) est lié à la densité du gaz neutre. Cependant, la distribution des régions H II est loin d'avoir la régularité de celle de H I ;

- les observations à grande résolution des Spirales les plus proches (M31, M33, M51, M101) ont permis de montrer que H I est concentré dans les bras, avec un contraste de densité allant de 3 à 5 avec la région inter-bras ;
- il y a un petit décalage entre la région du bras où sont concentrées les régions H II et celle où est concentré le gaz H I. Ceci est interprété par un mouvement des étoiles chaudes excitatrices des régions H II à partir de leur site de formation ;
- la luminosité CO et le rapport CO/H I sont maximaux pour les types Sb – Sbc .

La formation d'étoiles semble la plus active dans les bras spiraux (c'est là qu'on trouve le plus d'étoiles jeunes). En fait, le contraste de densité entre les bras et l'inter-bras peut être suffisamment fort pour qu'une onde de choc se produise au bord du bras. Cette onde de choc se caractérise par un accroissement brutal de la pression et une diminution de la vitesse. L'augmentation locale de densité permet alors la formation de nuages moléculaires, qui donneront naissance aux étoiles en s'effondrant.

7.8.4 Les galaxies irrégulières

Les galaxies irrégulières sont celles qui possèdent le plus de gaz (jusqu'à 30% en masse). De manière générale, ce sont des galaxies peu évoluées. Leur métallicité (étoiles et gaz) est faible par rapport à notre Galaxie ; elles contiennent par exemple de 3 à 20 fois moins d'oxygène. Leurs étoiles sont plus jeunes que celles des autres, et elles sont plus actives en ce qui concerne la formation d'étoiles.

C'est le cas en particulier des galaxies bleues compactes. Elles comportent de grandes régions H II. En fait, les galaxies bleues compactes ressemblent à de grandes régions H II isolées. On peut calculer la quantité de photons UV nécessaires pour ioniser ce gaz. Ces photons sont principalement émis par les étoiles jeunes et chaudes de type \mathcal{O} et \mathcal{B} , qui sont un bon traceur de la formation d'étoiles. On peut donc remonter au nombre de ces étoiles jeunes ionisantes. On s'aperçoit alors que la masse totale de ces étoiles jeunes représente presque la totalité de la masse de la galaxie. Le taux de formation d'étoiles y est donc très important. On peut en tirer une première conclusion : les galaxies bleues compactes n'ont pas toujours eu ce taux élevé de formation d'étoiles, car elles ne contiennent pas assez de matière pour former des étoiles pendant plus de quelques centaines de millions d'années. Deux hypothèses peuvent alors être avancées : soit ces galaxies sont des jeunes galaxies, soit elles ont le même âge que les autres (une dizaine de milliards d'années), mais alors la formations d'étoiles s'y déroule par sursauts successifs.

La répartition du gaz dans les galaxies irrégulières ressemble à ce qui est observé dans les Spirales, en ce qui concerne la distribution et l'extension de ce gaz par rapport à la population d'étoiles. Notons cependant que, de manière générale, les Irrégulières contiennent plus de régions H II. Par contre, il semble que les Irrégulières magellaniques et les galaxies bleues compactes soient très déficientes en CO. Ceci peut être bien sûr relié à la faible métallicité de ces galaxies, de telle sorte que le rapport CO/H₂ de notre Galaxie ne peut pas y être transposé.

Chapitre 8

Dynamique stellaire

8.1 Introduction

Le terme *dynamique stellaire* est une appellation traditionnelle de l'étude du comportement dynamique des groupes d'objets célestes. Cette dénomination peut s'appliquer à des systèmes d'étoiles (amas stellaires, galaxies) ou à des groupes de galaxies. Dans un système constitué d'étoiles, le mouvement de chacune d'entre elles est déterminé par les forces qui agissent sur elles. En pratique, la seule force importante est la *gravitation*. Les autres (par exemple la pression de radiation, le frottement ou les champs électromagnétiques) sont négligeables.

La force de gravitation est généralement décomposée en deux parties :

1. la force due au système auquel appartient l'étoile. C'est généralement la plus importante ;
2. la force due aux objets extérieurs. On la néglige fréquemment, considérant par là-même le système étudié comme *auto-gravitant*.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, un système réel comme une galaxie n'est pas uniquement formée de 10^{11} à 10^{12} étoiles, mais aussi de gaz interstellaire, de poussières interstellaires, de rayons cosmiques, etc. . . En première approximation, dans la mesure où les étoiles représentent l'essentiel de la masse, on néglige les composantes autres que les étoiles. Une seconde approximation est faite : chaque étoile peut être considérée comme un point matériel¹, ce qui signifie que les distances mutuelles entre objets individuels sont très supérieures à leurs tailles. La distance typique entre deux étoiles dans le voisinage solaire est de l'ordre du parsec. Par rapport au diamètre du Soleil, cela représente environ 2.2×10^7 fois plus. L'approximation est donc largement justifiée. Rappelons pour mémoire qu'en physique stellaire, une étoile est assimilée à une sphère, et que dans l'étude des atmosphères stellaires, elle est assimilée à un plan infini ! Les caractéristiques stellaires que sont la température effective, la luminosité, etc. . . peuvent être ignorées. La seule donnée nécessaire est la masse des étoiles. Les éventuelles collisions entre étoiles sont supposées rares et ne sont pas considérées. Au bout du compte, ceci ramène la dynamique stellaire dans le cadre du problème des N corps tel que nous l'avons défini dans la première partie. La différence est que là nous aurons des valeurs de N beaucoup plus grandes, au point qu'il sera illusoire d'essayer de décrire le mouvement de *chaque* corps considéré. Seules les propriétés statistiques du système nous intéresseront.

Comme dans les autres domaines de l'astronomie, les informations proviennent de trois approches :

- les observations ;

1. Cette approximation peut sembler évidente pour l'étude des systèmes d'étoiles, mais elle l'est déjà beaucoup moins pour des amas de galaxies

- la théorie ;
- les expériences .

Les méthodes de la dynamique stellaire s'appliquent aux amas d'étoiles, aux divers types de galaxies, et aux amas de galaxies. Parmi les amas d'étoiles, on distingue les amas *ouverts* ou galactiques, qui sont en général des associations d'étoiles plutôt jeunes dans le plan galactique, et les amas *globulaires*, constitués d'étoiles vieilles de Pop II, situés de part et d'autre du plan galactique. Les amas globulaires contiennent beaucoup plus d'étoiles que les amas ouverts. La table 8.1 liste les caractéristiques statistiques des divers types de systèmes auxquels les méthodes de la dynamique stellaire s'appliquent.

TABLE 8.1: *Caractéristiques des différentes associations auto-gravitantes d'étoiles et de galaxies*

Type d'association	Amas ouvert	Amas globulaire	Galaxie elliptique	Galaxie spirale	Amas de galaxies
Constituants	étoiles (+ gaz)	étoiles	étoiles	étoiles (+ gaz)	galaxies (+ ?)
Nombre d'objets	100 à 1 000	10^4 à 10^6	10^9 à 10^{12}	10^9 à 10^{12}	100 à 1 000
Forme	sphère	sphère	ellipsoïde	disque	sphère
Concentration	modérée	forte	très forte	très forte	faible
Rayon médian	1 pc	5 pc	1 kpc	1 kpc	0.5 Mpc
Rayon extérieur	5 pc	50 pc	10 kpc	10 kpc	2 Mpc
Masse d'un objet	0.1 à $10 M_{\odot}$	0.1 à $1 M_{\odot}$	0.1 à $10 M_{\odot}$	0.1 à $1 000 M_{\odot}$	10^9 à $10^{12} M_{\odot}$
Masse du système	100 à $1 000 M_{\odot}$	10^4 à $10^6 M_{\odot}$	10^9 à $10^{12} M_{\odot}$	10^9 à $10^{12} M_{\odot}$	10^{13} à $10^{15} M_{\odot}$
Vitesses internes	0.5 km s^{-1}	5 km s^{-1}	200 km s^{-1}	$\left\{ \begin{array}{l} \text{R : } 200 \text{ km s}^{-1} \\ \text{D : } 20 \text{ km s}^{-1} \end{array} \right.$	$1 000 \text{ km s}^{-1}$
Âge	10^6 à 10^{10} ans	10^{10} ans	10^{10} ans		10^{10} ans

(R = rotation ; D = dispersion)

8.1.1 Le théorème du Viriel scalaire

Le « théorème » du Viriel décrit l'équilibre entre dispersion de vitesse et attraction gravitationnelle dans le système de N corps. Concrètement, on appelle *Viriel* du système la quantité

$$V = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \quad . \quad (8.1)$$

V représente l'intégrale des moments des forces appliquées aux particules en mouvement par rapport au centre de coordonnées. Par ailleurs, la somme des moments d'inertie du système par rapport aux axes de coordonnées s'écrit par définition :

$$J = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad . \quad (8.2)$$

Dérivons deux fois par rapport au temps. Il vient :

$$\dot{J} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad ; \quad (8.3)$$

$$\ddot{J} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \quad ; \quad (8.4)$$

$$\text{soit} \quad \ddot{J} = 4T + 2V \quad , \quad (8.5)$$

où T est l'énergie cinétique du système.

Le théorème du Viriel consiste à postuler que le système est macroscopiquement dans un état stationnaire, et que donc J va rester constant en moyenne. Ceci sera d'autant mieux vérifié que le nombre d'étoiles N sera grand. En moyenne donc, $\dot{J} = 0$, soit, d'après (8.5),

$$2T + V = 0 \quad . \quad (8.6)$$

Ceci constitue l'expression du théorème du Viriel dans toute sa généralité. Ici, comme les forces définissant le mouvement sont d'origine gravitationnelle, on peut relier le Viriel V à l'énergie potentielle Ω du système. Pour cela, écrivons

$$V = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right) \cdot \vec{r}_i \quad , \quad (8.7)$$

où $\vec{f}_{j \rightarrow i}$ est la force que l'objet j exerce sur l'objet i . On écrit alors

$$V = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i \quad ; \quad (8.8)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{r}_i + \vec{f}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{r}_j \quad ; \quad (8.9)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad , \quad (8.10)$$

la dernière ligne résultant du principe de l'action et de la réaction ($\vec{f}_{i \rightarrow j} = -\vec{f}_{j \rightarrow i}$). En tenant compte de l'expression de $\vec{f}_{j \rightarrow i}$ [Eq. (3.1)], il vient finalement

$$V = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \Omega \quad . \quad (8.11)$$

Il existe un autre moyen, beaucoup plus élégant d'arriver au même résultat ($\Omega = V$) : remarquons que Ω est une fonction homogène de degré -1 des coordonnées $(x_i, y_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ des N points. En effet, si on multiplie toutes les distances par un facteur k , Ω se trouvera multipliée par le facteur k^{-1} . On peut donc appliquer à Ω la relation d'Euler pour les fonctions homogènes : Pour une fonction F de n variables (t_1, \dots, t_n) , homogène de degré α , on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial t_i} t_i = \alpha F \quad . \quad (8.12)$$

Appliquée à Ω , cette relation donne

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial \Omega}{\partial z_i} z_i \right) = -\Omega \quad . \quad (8.13)$$

Or, par définition de l'énergie potentielle, on a $\partial \Omega / \partial x_i = -m_i \ddot{x}_i$, et similairement pour les autres coordonnées. L'équation d'Euler devient donc

$$- \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = -\Omega \quad \iff \quad V = \Omega \quad . \quad (8.14)$$

En définitive, le théorème du Viriel s'écrit pour le problème des N corps

$$\boxed{2T + \Omega = 0} \quad . \quad (8.15)$$

Par ailleurs, l'énergie totale du système est $E = T + \Omega$. On obtient donc

$$T = -E \quad \text{et} \quad \Omega = 2E \quad . \quad (8.16)$$

Comme $T > 0$, on voit que l'énergie totale du système est négative, ce qui est normal pour un système gravitationnellement lié. Cette hypothèse est implicitement contenue dans le fait que $J = \text{cte}$, car dans ce cas, le système ne peut pas se disperser à l'infini (sinon $J \rightarrow +\infty$).

Le théorème du Viriel est une espèce de généralisation du théorème de l'énergie cinétique. V est une mesure de l'énergie cinétique acquise par le système de particules lorsque celles-ci sont suffisamment « brassées ».

8.1.2 Vitesse moyenne des étoiles

On peut déduire du théorème du Viriel une relation entre la vitesse moyenne des étoiles dans le système et ses caractéristiques macroscopiques. Soit \bar{v} la vitesse moyenne des étoiles et \bar{m} leur masse moyenne. Considérons pour simplifier que l'énergie cinétique moyenne par étoile est de l'ordre de $(1/2)\bar{m}\bar{v}^2$. Il vient

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 \simeq \frac{1}{2} N \bar{m} \bar{v}^2 \quad . \quad (8.17)$$

Procédons de même pour l'énergie potentielle :

$$\Omega = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad ; \quad (8.18)$$

$$= - \frac{N(N-1)}{2} G \left(\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) \quad ; \quad (8.19)$$

$$\simeq - \frac{N^2}{2} G \frac{\bar{m}^2}{\bar{r}} \quad , \quad (8.20)$$

où \bar{r} est le *rayon médian* du système (voir table 8.1).

Soit $M = N\bar{m}$ la masse totale du système. Par application du théorème du Viriel, on déduit de (8.17) et de (8.20) la relation approchée :

$$\boxed{\bar{v}^2 \simeq \frac{GM}{2\bar{r}}} \quad . \quad (8.21)$$

8.1.3 Échelle de temps dynamique

On définit l'échelle de temps dynamique t_d comme le temps moyen qu'il faut à une étoile pour parcourir le système, soit

$$t_d = \frac{\bar{r}}{\bar{v}} \quad . \quad (8.22)$$

En appliquant la relation (8.21), on a immédiatement

$$\boxed{t_d \simeq \sqrt{\frac{2\bar{r}^3}{GM}}} \quad . \quad (8.23)$$

t_d ne dépend que de la densité moyenne du système considéré. Pour un amas ouvert ou globulaire (voir table 8.1), t_d est de l'ordre de 10^6 ans ; pour une galaxie, t_d est de l'ordre de 10^7 ans ; pour un amas de galaxies, t_d est de l'ordre de 10^8 ou 10^9 ans. Dans tous les cas, l'échelle de temps dynamique est petite devant l'âge du système.

8.2 Hydrodynamique stellaire

8.2.1 Fonction de distribution

La vision hydrodynamique de la dynamique stellaire consiste à essayer de décrire un système à N corps (N grand) comme un « gaz d'étoiles » en y appliquant les méthodes classiques de l'hydrodynamique et de la physique des plasmas. Pour cela nous devons raisonner dans l'espace des phases.

À chaque instant, chaque étoile i est entièrement déterminée par sa position $\vec{r}_i(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, sa vitesse $\vec{v}_i(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$ et sa masse m_i . Elle peut donc être représentée par un point $(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$ dans un espace à 6 dimensions appelé *espace des phases*.

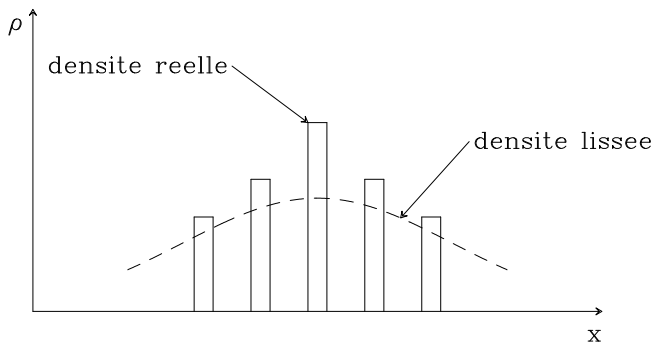


FIGURE 8.1: Densité lissée

La fonction de distribution $\Psi(\vec{r}, \vec{v}, t)$ est définie comme la densité des particules dans l'espace des phases. Concrètement, $\Psi(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ est la masse des étoiles² à l'instant t dont la position \vec{r} est comprise dans un volume élémentaire $d^3\vec{r}$ autour de \vec{r} , et dont la vitesse \vec{v} est comprise dans un volume élémentaire $d^3\vec{v}$ autour de \vec{v} .

La densité dans l'espace réel à 3 dimensions se déduit immédiatement par intégration

$$\rho(\vec{r}, t) = \iiint \Psi(\vec{r}, \vec{v}) d^3\vec{v} \quad . \quad (8.24)$$

La densité définie par l'équation (8.24) est une densité lissée. La densité est, en fait, nulle autour de chaque étoile (Fig. 8.1). À partir de ρ , on obtient le potentiel gravitationnel lissé :

$$U(x_1, x_2, x_3, t) = -G \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad . \quad (8.25)$$

En inversant cette équation, on obtient l'équation de Poisson que nous avons déjà vue :

$$\Delta U = 4\pi G\rho \quad , \quad (8.26)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien. On ajoutera la condition aux limites :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U = 0 \quad . \quad (8.27)$$

8.2.2 Equation de Boltzmann

L'évolution du système s'étudie au moyen de la fonction Ψ au lieu des $6N$ variables usuelles. Nous avons toutefois besoin d'une équation régissant l'évolution de Ψ . Dans l'espace usuel à 3

2. Sur ce point, les définitions varient d'un ouvrage à l'autre. Ψ est souvent défini comme le nombre d'étoiles dans un volume élémentaire de l'espace des phases. Dans ce cas un problème se pose pour la définition de la masse volumique ρ . C'est pourquoi j'ai choisi d'adopter ici une définition plus cohérente. On trouve aussi une autre définition en nombres d'étoiles, mais dans un espace des phases à 7 dimensions où la 7^e coordonnée est la masse; dans ce cas les choses redeviennent cohérentes. L'important à savoir est que dans tous les cas on aboutit à la même équation de Boltzmann. En fait la confusion vient du fait qu'en dynamique stellaire a priori les étoiles ont des masses différentes; en hydrodynamique traditionnelle, les particules (atomes, molécules...) sont toutes identiques et toutes les définitions précédentes sont alors équivalentes à une constante près.

dimensions, les équations du mouvement s'écrivent pour chaque étoile

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \ddot{x}_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \quad . \quad (8.28)$$

Dans l'espace des phases à 6 dimensions, considérons le flot de matière à un endroit donné. La densité locale est $\Psi(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, et soit \vec{f} la vitesse locale de ce flot. La quantité de matière se conserve au cours du temps³. On peut donc écrire pour ce flot *dans l'espace des phases* l'équation de continuité usuelle, à savoir⁴

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{\nabla}_6 \cdot (\Psi \vec{f}) = 0 \quad . \quad (8.29)$$

Cependant, le mouvement des étoiles dans l'espace des phases a quelque chose de particulier. En effet, au point $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ les composantes de f sont :

$$\vec{f} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_1 = f_{x_1} \\ \dot{x}_2 = v_2 = f_{x_2} \\ \dot{x}_3 = v_3 = f_{x_3} \\ \dot{v}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = f_{v_1} \\ \dot{v}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = f_{v_2} \\ \dot{v}_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = f_{v_3} \end{array} \right. \quad . \quad (8.30)$$

On voit que

$$\frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} = \dots = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}_6 \cdot \vec{f} = 0 \quad . \quad (8.31)$$

Dès lors, on peut simplifier l'équation de continuité

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{\nabla}_6 \cdot (\Psi \vec{f}) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \vec{\nabla}_6 \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \vec{\nabla}_6 \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{f} \cdot \vec{\nabla}_6 \Psi \quad . \quad (8.32)$$

Si on explicite en fonction des diverses coordonnées, cette dernière équation donne *l'équation de Boltzmann-Liouville* sans collisions :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} = 0 \quad , \quad (8.33)$$

que l'on peut encore noter vectoriellement

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi - \vec{\nabla}U \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi = 0} \quad . \quad (8.34)$$

La même équation s'appelle équation de Vlasov en physique des plasmas. La signification de cette équation apparaîtra plus claire en introduisant le concept de dérivée Lagrangienne D/Dt .

On pose

$$\frac{D\Psi}{Dt} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{f} \cdot \vec{\nabla}_6 \Psi \quad . \quad (8.35)$$

3. On considère qu'il n'y a pas de création ni de disparition d'étoiles.

4. Je mets un indice « 6 » ici pour bien préciser qu'il s'agit de la divergence dans l'espace des phases à 6 dimensions.

$D\Psi/Dt$ représente le taux de variation de la fonction de distribution Ψ (la densité dans l'espace des phases) en *suivant le mouvement* du flot de matière. L'équation de Boltzmann ne signifie rien d'autre que

$$\frac{D\Psi}{Dt} = 0 \quad . \quad (8.36)$$

En clair le fluide d'étoiles reste à densité constante le long de son déplacement, il est donc *incompressible*⁵. Ceci est bien entendu vrai dans l'espace des phases seulement. Les équations (8.24), (8.26) et (8.33) permettent en principe de calculer l'évolution du système en fonction d'un état initial donné $\Psi(\vec{r}, \vec{v}, 0)$. Elles sont équivalentes à l'ensemble des équations (3.1).

8.2.3 Equations de Jeans

Les équations de Jeans sont les moments de l'équation de Boltzmann et s'apparentent aux équations classiques de l'hydrodynamique. L'équation de Boltzmann étant difficile à manier, on préfère souvent travailler sur ses moments.

Prenons l'équation de Boltzmann (8.33) et intégrons là sur les variables de vitesse :

$$\iiint \frac{\partial \Psi}{\partial t} d^3\vec{v} + \sum_i \iiint v_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d^3\vec{v} - \sum_i \iiint \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} d^3\vec{v} = 0 \quad ; \quad (8.37)$$

$$\iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\iiint v_i \Psi d^3\vec{v} \right) - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \iiint \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} d^3\vec{v} = 0 \quad . \quad (8.38)$$

Considérons le terme $\iiint (\partial \Psi / \partial v_i) d^3\vec{v}$ présent dans le troisième terme de l'équation. Il s'intègre immédiatement sur la variable v_i . Or il n'y a pas d'étoiles ayant des vitesses infinies, de telle sorte que l'intégrale sur v_i est forcément nulle. L'intégrale totale est donc nulle. En définitive, le troisième terme de l'équation est nul.

On peut définir le vecteur *vitesse moyenne* $\langle \vec{v} \rangle$ par

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{\rho} \iiint \Psi \vec{v} d^3\vec{v} \quad , \quad (8.39)$$

de telle sorte que le deuxième terme de l'équation peut s'écrire $\vec{\nabla} \cdot (\rho \langle \vec{v} \rangle)$. En définitive, l'intégrale de l'équation de Boltzmann sur les vitesses devient

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \langle \vec{v} \rangle) = 0} \quad . \quad (8.40)$$

Cette équation est clairement une équation de continuité comme celle de l'hydrodynamique, où le rôle de la vitesse macroscopique est joué par la vitesse moyenne des particules à un endroit donné. Elle constitue la première équation de Jeans.

Reprenons maintenant l'équation de Boltzmann (8.33), multiplions la par une des variables de vitesse (v_j , mettons), et intégrons sur les vitesses :

$$\iiint v_j \frac{\partial \Psi}{\partial t} d^3\vec{v} + \sum_i \iiint v_j v_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d^3\vec{v} - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \iiint v_j \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} d^3\vec{v} = 0 \quad . \quad (8.41)$$

5. Ce résultat, qui peut encore s'exprimer par le fait que les volumes se conservent dans l'espace des phases, constitue un cas particulier du *théorème de Liouville*. Ce théorème affirme que pour tout système dynamique régi par un Hamiltonien conservatif, les volumes se conservent dans l'espace des phases. Or ici, les forces dérivent d'un potentiel indépendant du temps, ce qui satisfait bien l'hypothèse

De la même manière que plus haut, le premier terme de l'équation pourra s'écrire $\partial(\rho \langle v_j \rangle) / \partial t$, où $\langle v_j \rangle$ est la première composante de $\langle \vec{v} \rangle$. On peut ensuite transformer l'intégrale apparaissant dans le troisième terme en intégrant par partie :

$$\iiint v_j \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} d^3 \vec{v} = [v_j \Psi] - \iiint \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \Psi d^3 \vec{v} = - \iiint \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \Psi d^3 \vec{v} \quad , \quad (8.42)$$

car le terme tout intégré s'annule pour les mêmes raisons que précédemment. $\partial v_j / \partial v_i$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Dans la somme sur i ne subsistera donc que le terme $i = j$. Notre équation devient donc

$$\frac{\partial(\rho \langle v_j \rangle)}{\partial t} + \sum_i \iiint v_j v_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} d^3 \vec{v} + \frac{\partial U}{\partial x_i} \iiint \Psi d^3 \vec{v} = 0 \quad ; \quad (8.43)$$

$$\iff \frac{\partial(\rho \langle v_j \rangle)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\iiint v_i v_j \Psi d^3 \vec{v} \right) + \rho \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (8.44)$$

On introduit maintenant

$$\langle v_i v_j \rangle = \frac{1}{\rho} \iiint v_i v_j \Psi d^3 \vec{v} \quad , \quad (8.45)$$

de telle sorte que notre équation s'écrit

$$\frac{\partial(\rho \langle v_j \rangle)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial(\rho \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (8.46)$$

Il est d'usage de transformer le deuxième terme de cette équation. On introduit

$$\sigma_{ij}^2 = \langle (v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle) \rangle = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle \quad . \quad (8.47)$$

σ_{ij}^2 est l'élément (i, j) d'un tenseur bidimensionnel symétrique σ^2 appelé *ellipsoïde des vitesses* au point considéré et qui traduit la dispersion des vitesses en ce point. Il vient alors

$$\frac{\partial(\rho \langle v_j \rangle)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial(\rho \langle v_i \rangle)}{\partial x_i} \langle v_j \rangle + \sum_i \rho \langle v_i \rangle \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (8.48)$$

Les deux premiers termes de l'équation se simplifient en introduisant l'équation de continuité (8.40) multipliée par $\langle v_j \rangle$. On aboutit à

$$\rho \frac{\partial(\langle v_j \rangle)}{\partial t} + \sum_i \rho \langle v_i \rangle \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x_j} - \sum_i \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad . \quad (8.49)$$

En rassemblant sous forme vectorielle les équations qu'on obtient pour les diverses valeurs de j , l'ensemble s'écrit de manière classique

$$\boxed{\rho \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + \rho (\langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{\nabla}) \langle \vec{v} \rangle = -\rho \vec{\nabla} U - \vec{\nabla} \cdot (\rho \sigma^2)} \quad . \quad (8.50)$$

On reconnaît là une équation exactement similaire à l'équation d'Euler de l'hydrodynamique qui traduit la conservation de l'impulsion. Le terme $-\vec{\nabla} \cdot (\rho \sigma^2)$ y joue le rôle d'un terme de pression $-\vec{\nabla} P$. En fait c'est un peu plus que cela; $-\rho \sigma^2$ est le *tenseur des contraintes* qui décrit une pression asymétrique. Si σ est isotrope, donc proportionnel à l'identité, alors le terme considéré est exactement un terme de pression.

8.2.4 Intégrales premières

Considérons une étoile en mouvement dans un système stellaire. Une *intégrale première* du mouvement de l'étoile est une fonction quelconque de la position et de la vitesse de l'étoile qui reste constante au cours de son mouvement :

$$I = I(\vec{r}, \vec{v}, t) = \text{cte} \quad .$$

De telles intégrales premières existent en général. Lorsqu'on ne peut pas résoudre complètement un système, l'identification d'intégrales premières est très utile. En réduisant l'ordre du système, elles permettent de définir des régions de mouvement et divers régimes de fonctionnement.

Pratiquement, dire qu'une fonction $I(\vec{r}, \vec{v}, t)$ est une intégrale première revient à dire que sa dérivée Lagrangienne (le long du mouvement) est nulle :

$$\begin{aligned} \frac{DI}{Dt} = 0 &= \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial I}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} \\ &= \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial I}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial v_i} \\ &= \frac{\partial I}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} I - \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} I \quad . \end{aligned} \quad (8.51)$$

Les intégrales $I(\vec{r}, \vec{v}, t)$ sont des hypersurfaces dans l'espace des phases. Introduisons maintenant les définitions suivantes :

- Des intégrales I_1, \dots, I_n sont *indépendantes* s'il n'existe pas de relation $g(I_1, \dots, I_n) \equiv 0$ identiquement.
- Une intégrale est dite *conservative* si elle ne dépend pas explicitement du temps⁶ ($\partial I / \partial t = 0$).
- Une intégrale I est dite *non isolante* si le sous-espace défini par $I = \text{cte}$ dans l'espace des phases est partout dense. Une telle intégrale « n'isole pas » les points de la trajectoire des autres points de l'espace des phases.

Les intégrales intéressantes sont celles qui sont conservatives, indépendantes et isolantes. Leur nombre dépend de la structure du potentiel. Chaque cas est à examiner. Quand le potentiel est indépendant du temps, on en connaît au moins une, celle de l'énergie :

$$I_1 = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + U(\vec{r}) \quad . \quad (8.52)$$

C'est parfois la seule qu'on a. Dans le cas le plus général, on ne peut rien dire des autres intégrales.

Remarquons que dans le cas général pour un système quelconque, il ne peut y avoir plus de 5 intégrales premières conservatives indépendantes et isolantes. En effet, l'espace des phases est de dimension 6. Une première intégrale $I_1 = \text{cte}$ contraint le mouvement à se faire sur une hypersurface de dimension 5. Une deuxième intégrale réduit encore la dimension du mouvement et le contraint maintenant sur une hypersurface de dimension 4. S'il y a 5 intégrales, le mouvement est confiné sur une hypersurface de dimension 1, c'est à dire une courbe dans l'espace des phases. Une intégrale indépendante de plus, et le mouvement est confiné à un ou plusieurs points discrets, ce qui signifie qu'il n'y a plus de mouvement. C'est impossible, d'où le résultat.

6. Certains auteurs réservent le terme d'intégrale première aux seules intégrales conservatives, appelant *constante du mouvement* une intégrale dépendant explicitement du temps. C'est une question de convention...

8.2.5 Théorème de Jeans

Une intégrale première conservative $I(\vec{r}, \vec{v})$ est caractérisée par la relation (8.51) avec $\partial I / \partial t = 0$, soit

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} I - \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} I = 0 \quad . \quad (8.53)$$

En régime stationnaire, c'est à dire caractérisé par une fonction de distribution vérifiant $\partial \Psi / \partial t = 0$, l'équation de Boltzmann sans collisions est exactement de la même forme. Autrement dit, I est une solution de cette équation. Si I_1, \dots, I_k sont k intégrales premières indépendantes, chacune d'entre elles sera solution de l'équation de Boltzmann et toute fonction de ces intégrales $g(I_1, \dots, I_k)$ le sera aussi. En effet, nous aurons

$$\frac{D}{Dt} [g(I_1, \dots, I_k)] = \sum_{m=1}^k \frac{\partial g}{\partial I_m} \frac{DI_m}{Dt} = 0 \quad . \quad (8.54)$$

A l'inverse, la fonction de distribution Ψ est solution de l'équation de Boltzmann, elle vérifie donc $D\Psi/Dt = 0$. C'est donc une intégrale première du mouvement. Si nous sommes en régime stationnaire, alors Ψ ne dépend pas du temps, c'est donc une intégrale conservative. Si nous connaissons par ailleurs un jeu d'intégrales premières conservatives indépendantes suffisamment nombreux pour décrire l'espace des phases, alors Ψ sera nécessairement fonction de ces intégrales. Tout ceci conduit au théorème suivant, dit de Jeans (1915) :

En régime stationnaire, la fonction de distribution solution de l'équation de Boltzmann est une fonction arbitraire des intégrales premières indépendantes et conservatives. A l'inverse, toute fonction de ces mêmes intégrales est une solution stationnaire de l'équation de Boltzmann

Le principal problème là-dessous est l'identification des intégrales. En fait, on peut montrer un résultat plus fort (dit théorème de Jeans fort) comme quoi en régime stationnaire la fonction de distribution n'est fonction que des seules intégrales *isolantes* ; que ces dernières sont au maximum 5 (résultat vu plus haut) ; et si presque toutes les orbites sont régulières avec des fréquences incommensurables, alors la fonction de distribution n'est fonction que de *trois* intégrales premières conservatives, indépendantes et isolantes. Pour plus de détails, voir Binney & Tremaine (1987).

8.2.6 Mélange dynamique

Nous venons d'évoquer le cas du régime stationnaire caractérisé par

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad . \quad (8.55)$$

En régime stationnaire, les « observables » globaux du système ne varient pas avec le temps. La plupart systèmes que nous observons (galaxies, amas globulaires...) tend asymptotiquement vers un régime stationnaire. Le temps caractéristique mis pour atteindre cet état est appelé *temps de mélange*, noté t_m . Il est de l'ordre de

$$\boxed{t_m \simeq 30 t_d} \quad , \quad (8.56)$$

où t_d est le temps dynamique défini par l'équation (8.23). Ce temps caractéristique est aussi appelé *temps de virielisation* car c'est le temps caractéristique que met le système pour vérifier le théorème du viriel. Ce temps ne représente qu'un petit nombre de fois le temps dynamique, et pour les systèmes réels étudiés, il reste petit devant leur âge.

8.2.7 Les systèmes à symétrie sphérique

Généralités

Un système à symétrie sphérique sera caractérisé par un potentiel U à symétrie sphérique. On imagine aisément que pour étudier de tels systèmes, il est avantageux de se placer en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Dans ce cas, le potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale r . Outre le fait qu'un certain nombre de systèmes réels (amas globulaires, galaxies elliptiques E0) présentent effectivement une telle symétrie sphérique, ces systèmes ont souvent l'avantage de se ramener à des problèmes monodimensionnels (ne dépendant que de r) pour lesquels un traitement analytique est possible. Ils constituent donc de parfaits cas d'école.

Considérons une étoile en mouvement dans un potentiel à symétrie sphérique $U(r)$. La force gravitationnelle $-m\vec{\nabla}U$ à laquelle il est soumis est forcément radiale. On a donc un mouvement à force centrale pour lequel il est bien connu qu'outre l'énergie mécanique $E = (1/2)v^2 + U(r)$ et le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ sont conservés, ce qui signifie dans la pratique que le mouvement est plan et se fait dans ce plan selon la loi des aires.

E et \vec{L} constituent 4 intégrales premières du mouvement. Une extension du théorème de Jeans fort aux systèmes sphériques permet de montrer que la fonction de distribution ne doit alors dépendre que de E et \vec{L} : $\Psi(E, \vec{L})$. Dans la pratique, on s'attend à ce que dans de tels systèmes, la distribution des étoiles soit également à symétrie sphérique. Dans ce cas, la fonction de distribution doit être elle-même isotrope. Elle ne peut pas dépendre de la direction du vecteur \vec{L} ou d'une de ses composantes le long d'un axe donné ce qui particulariserait l'axe en question. La fonction de distribution ne peut donc dépendre que de la *norme* du vecteur moment cinétique $L = \|\vec{L}\|$: $\Psi(E, L)$.

Les systèmes les plus classiques sont ceux où la fonction de distribution ne dépend *que de l'énergie* E . Dans ce cas, la fonction de distribution ne dépend de la vitesse que par l'intermédiaire de sa norme v (v^2 dans l'expression de l'énergie). Donc dans toutes les intégrales intervenant dans les équations de Jeans, toute information sur la direction de la vitesse sera absente. La distribution des vitesses sera donc elle aussi *isotrope* :

$$\langle \vec{v}_r^2 \rangle = \langle \vec{v}_\theta^2 \rangle = \langle \vec{v}_\phi^2 \rangle \quad . \quad (8.57)$$

Si Ψ dépend de L alors la distribution des vitesses n'est plus isotrope. En fait on montre que dans ce cas là, c'est la distribution des vitesses radiales qui est différente :

$$\langle \vec{v}_r^2 \rangle \neq \langle \vec{v}_\theta^2 \rangle = \langle \vec{v}_\phi^2 \rangle \quad . \quad (8.58)$$

Il est d'usage dans les systèmes isotropes d'opérer un changement de variable. Si U_0 est une constante donnée, on définit le *potentiel relatif* Φ et l'*énergie relative* \mathcal{E} par

$$\Phi = -U + U_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = -E + U_0 = \Phi - \frac{1}{2}v^2 \quad . \quad (8.59)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel relatif s'écrira

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho \quad . \quad (8.60)$$

Dans la pratique, on s'arrange pour choisir la constante U_0 de telle manière que la fonction de distribution vérifie $\Psi(\mathcal{E}) > 0$ pour $\mathcal{E} > 0$ et $\Psi(\mathcal{E}) = 0$ pour $\mathcal{E} < 0$. La densité de masse ρ dans l'espace réel vaut alors, grâce à l'isotropie de la distribution des vitesses :

$$\rho = \iiint \Psi \left(\Phi - \frac{1}{2}v^2 \right) d^3\vec{v} = 4\pi \int_0^\infty \Psi \left(\Phi - \frac{1}{2}v^2 \right) v^2 dv$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^{\sqrt{2\Phi}} \Psi \left(\Phi - \frac{1}{2}v^2 \right) v^2 dv \\
&= 4\pi \int_0^\Phi \Psi (\mathcal{E}) \sqrt{2(\Phi - \mathcal{E})} d\mathcal{E} \quad . \quad (8.61)
\end{aligned}$$

Ecrivons maintenant l'équation de Poisson. Compte tenu de la symétrie sphérique, le Laplacien en coordonnées sphériques se réduit à son premier terme :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -16\pi^2 G \int_0^{\sqrt{2\Phi}} \Psi \left(\Phi - \frac{1}{2}v^2 \right) v^2 dv = -16\pi^2 G \int_0^\Phi \Psi (\mathcal{E}) \sqrt{2(\Phi - \mathcal{E})} d\mathcal{E} \quad . \quad (8.62)$$

Si Ψ est connue (voir les exemples plus bas), cette équation est une équation différentielle dont la résolution donne le potentiel relatif Φ . Les autres quantités du système en découlent alors.

Souvent c'est le problème inverse qui se pose. Connaissant ou ayant un fit observationnel pour la densité ρ , on souhaite pouvoir remonter à la fonction de distribution et au potentiel. Cela revient à faire une inversion de l'équation (8.61). Dans cette équation ρ est implicitement supposé être une fonction de r . Dans la mesure où Φ est une fonction croissante de r , nous pouvons adopter Φ comme paramètre et considérer ρ comme une fonction de Φ :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \rho(\Phi) = 2 \int_0^\Phi \Psi (\mathcal{E}) \sqrt{\Phi - \mathcal{E}} d\mathcal{E} \quad . \quad (8.63)$$

Différentions maintenant cette relation par rapport à Φ . Cela nous donne

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d\rho}{d\Phi} = \int_0^\Phi \frac{\Psi (\mathcal{E})}{\sqrt{\Phi - \mathcal{E}}} d\mathcal{E} \quad . \quad (8.64)$$

Cette équation est une *intégrale d'Abel* dont la solution est (voir en annexe) :

$$\boxed{\Psi (\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi^2\sqrt{2}} \frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\int_0^\mathcal{E} \frac{d\rho}{d\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Phi}} \right) = \frac{1}{2\pi^2\sqrt{2}} \left[\int_0^\mathcal{E} \frac{d^2\rho}{d\Phi^2} \frac{d\Phi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Phi}} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \frac{d\rho}{d\Phi} \Big|_{\Phi=0} \right]} \quad (8.65)$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule d'Eddington* (1916). En principe donc, avec la donnée d'une distribution de matière à symétrie sphérique de densité ρ , on peut remonter à la fonction de distribution que génère cette densité. Cependant, l'hypothèse a été faite que la fonction de distribution $\Psi (\mathcal{E})$ n'était nulle part négative. Par conséquent, une distribution donnée $\rho(r)$ ne peut correspondre à une fonction de distribution qui a un sens physique que si la fonction $\Psi (\mathcal{E})$ obtenue est une fonction croissante de \mathcal{E} .

Exemple 1 : Polytropes et modèle de Plummer

Une des formes les plus simples qui soit de fonction de distribution sphérique est définie par

$$\Psi (\mathcal{E}) = \begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & \text{si } \mathcal{E} > 0 \quad ; \\ 0 & \text{si } \mathcal{E} \leq 0 \quad , \end{cases} \quad (8.66)$$

où F est une constante et n un exposant. Reprenant le calcul de la densité (8.61), l'intégrale se calcule en posant $v^2 = 2\Phi \cos^2 \theta$. Il vient

$$\rho = c_n \Phi^n \quad , \quad (8.67)$$

où c_n est une constante proportionnelle à F et qui dépend de n . L'équation de Poisson conduit alors à

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Phi^n = 0 \quad . \quad (8.68)$$

On peut simplifier en changeant de variables. On pose $s = r/b$ et $\phi = \Phi/\Phi(0)$ avec $b = 1/\sqrt{4\pi G \Phi(0)^{n-1} c_n}$. L'équation se simplifie alors en

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d\phi}{ds} \right) + \phi^n = 0 \quad . \quad (8.69)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de *Lane-Emden* ; on la retrouve dans l'étude de l'équilibre hydrostatique des sphères auto-gravitantes d'équation d'état polytropique, c'est à dire $P \propto \rho^\gamma$.

En général, la solution l'équation de Lane-Emden ne peut pas s'exprimer à partir de fonctions simples sauf pour certaines valeurs de n . Pour $n = 5$ en particulier, on obtient un modèle dit *de Plummer* qui représente un modèle relativement correct pour certains amas globulaires. La solution est

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}s^2}} \quad \Longrightarrow \quad \rho = c_5 \Phi^5 = \frac{c_5 \Phi(0)^5}{\left(1 + \frac{r^2}{3b^2}\right)^{5/2}} \quad (8.70)$$

La distribution s'étend à l'infini mais la masse totale M_∞ est finie :

$$M_\infty = \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r) dr = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{G} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{\sqrt{3}\Phi(0)b}{G} \quad (8.71)$$

Exemple 2 : La sphère isotherme

La sphère isotherme est définie par

$$\Psi(\mathcal{E}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} \quad , \quad (8.72)$$

où ρ_0 et σ sont des constantes. En intégrant sur les vitesses on trouve

$$\rho = \rho_0 e^{\Phi/\sigma^2} \quad , \quad (8.73)$$

et l'équation de Poisson devient

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) + 4\pi G \rho_0 e^{\Phi/\sigma^2} = 0 \quad . \quad (8.74)$$

Cette équation est identique à celle qu'on trouve pour l'équilibre hydrostatique d'une sphère autogravitante de température fixée, et où σ y joue le rôle d'une vitesse d'agitation thermique. C'est ce qui donne son nom au modèle. Une solution de l'équation est

$$\Phi(r) = 2\sigma^2 \ln \left(\frac{r_0}{3r} \right) \quad \text{avec} \quad r_0 = \frac{3\sigma}{\sqrt{2\pi G \rho_0}} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{3r} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad . \quad (8.75)$$

r_0 représente un rayon caractéristique du système appelé *Rayon de King*. C'est en fait la distance à laquelle la densité projetée sur le plan du ciel a diminué de moitié par rapport au centre.

Le problème avec cette solution est que la densité est infinie au centre. C'est pourquoi ce modèle est appelé *sphère isotherme singulière*. Pour obtenir des solutions régulières au centre, il faut chercher d'autres solutions de l'équation (8.74). Celles-ci ne peuvent s'obtenir que numériquement. Toutes ces solutions partent d'une densité finie au centre et finissent par se rapprocher de la sphère isotherme singulière pour $r \gg r_0$.

La sphère isotherme possède également un autre inconvénient : la masse intégrée jusqu'à l'infini diverge. C'est évident sur le modèle de sphère isotherme singulière ($\rho \propto r^{-2}$), mais cela reste vrai dans tous les autres cas. Pour contourner cette difficulté, des modèles de sphère isotherme tronquée ont été proposés. Le plus connu est le *modèle de King* (1966), caractérisé par

$$\Psi(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} (e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & \text{si } \mathcal{E} > 0 \quad ; \\ 0 & \text{si } \mathcal{E} \leq 0 \quad . \end{cases} \quad (8.76)$$

On trouvera dans Binney & Tremaine (1987) tous les développements sur ce modèle. Outre le rayon de King r_0 , ce modèle est caractérisé par un *rayon de marée* $r_t \geq r_0$ où la densité atteint zéro. On définit la *concentration* c du modèle par

$$c = \log\left(\frac{r_t}{r_0}\right) \quad . \quad (8.77)$$

Les modèles avec $0.75 \leq c \leq 1.75$ fittent très bien les amas globulaires, tandis que les modèles avec $c \gtrsim 2.2$ correspondent mieux pour les galaxies elliptiques à symétrie sphérique. Plus c est grand, plus le modèle de King se rapproche de la sphère isotherme.

8.3 L'instabilité de Jeans

La stabilité d'un système dynamique donné s'étudie analytiquement en étudiant la réponse linéaire à des petites perturbations. Un exemple typique de ce type d'étude est l'analyse de l'instabilité de Jeans. On considère donc une sphère homogène initialement en équilibre avec un potentiel U_0 , et une densité ρ_0 supposées homogène dans l'espace. En toute rigueur, ceci est impossible. En effet là où la densité est non nulle, de par l'équation de Poisson, le Laplacien du potentiel n'est pas nul et ce dernier ne peut être constant. Jeans a néanmoins appliqué ces conditions contradictoires⁷, considérant implicitement que ce qui suit n'est valable que sur la *surdensité* par rapport à ρ_0 . Ce qu'il faut comprendre, c'est que la sphère que nous considérons doit être comprise comme baignant dans un milieu infini, et que les nécessaires variations spatiales du potentiel U_0 liées à la densité non nulle ρ_0 sont d'une échelle bien supérieure à l'échelle de notre sphère. Si on considère une situation physique où notre sphère est un fragment de nuage moléculaire de quelques parsecs de diamètre appelé à s'effondrer pour former un cœur protostellaire, le tout baignant dans le potentiel du disque galactique, ces approximations sont justifiées.

8.3.1 L'instabilité de Jeans dans un fluide

Nous prenons notre sphère, et allons la traiter à l'aide des équations de l'hydrodynamique :

$$\text{Equation de continuité :} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad ; \quad (8.78)$$

7. Ce procédé est connu sous le nom d'« arnaque » de Jeans

$$\text{Equation d'Euler : } \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\rho \vec{\nabla} U - \vec{\nabla} P \quad ; \quad (8.79)$$

$$\text{Equation de Poisson : } \quad \Delta U = 4\pi G \rho \quad . \quad (8.80)$$

Nous allons linéariser ces équations. Pour cela, nous allons supposer que toutes les grandeurs apparaissant dans ces équations possèdent une solution indicée « 0 » et nous considérerons une perturbation indicée « 1 ». Par exemple, pour la densité, nous écrirons $\rho = \rho_0 + \rho_1$ avec $\rho_1 \ll \rho_0$. Nous reportons ceci dans les équations ci-dessus. Au passage, nous éliminons les termes d'ordre supérieur contenant des produits croisés. Par exemple pour l'équation de continuité, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_0 + \rho_1)(\vec{v}_0 + \vec{v}_1)] \\ &= \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_1) \quad . \end{aligned} \quad (8.81)$$

Nous négligerons le terme $\vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_1)$ qui est d'ordre supérieur. De plus le terme $\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0)$ s'annule avec le terme $\partial \rho_0 / \partial t$ car l'équation est vérifiée par la solution d'ordre 0. Au bout du compte, l'équation linéarisée est

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0) = 0 \quad . \quad (8.82)$$

Par ailleurs la solution initiale d'ordre 0 est à vitesse nulle, donc $\vec{v}_0 = \vec{0}$. Il nous reste au final

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \quad . \quad (8.83)$$

On procède de même avec l'équation d'Euler. En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, il reste

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \rho_1 (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + \rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + \rho_0 (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 = -\rho_0 \vec{\nabla} U_1 - \rho_1 \vec{\nabla} U_0 - \vec{\nabla} P_1 \quad . \quad (8.84)$$

On utilise ensuite l'hypothèse $\vec{v}_0 = \vec{0}$, ρ_0 uniforme et U_0 uniforme. Il ne reste plus alors que

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\rho_0 \vec{\nabla} U_1 - \vec{\nabla} P_1 \quad . \quad (8.85)$$

On constate au passage que les termes non linéaires en $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ ont disparu. La linéarisation de l'équation de Poisson est immédiate :

$$\Delta U_1 = 4\pi G \rho_1 \quad . \quad (8.86)$$

Il nous manque une équation d'état reliant P à ρ . Faisons l'hypothèse d'un gaz adiabatique d'indice γ : $P \propto \rho^\gamma$. On en tire la vitesse du son :

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P_1}{\rho_1} \quad . \quad (8.87)$$

Les équations (8.83), (8.85), (8.86) et (8.87) constituent les équations de notre système linéarisé. On peut facilement éliminer la pression entre (8.85) et (8.87) :

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} U_1 - \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \quad . \quad (8.88)$$

On élimine \vec{v}_1 en dérivant (8.83) par rapport au temps :

$$0 = \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_0 \left(\vec{\nabla} U_1 + \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \right) \right] = \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \rho_0 \Delta U_1 - \frac{c_s^2}{\gamma} \Delta \rho_1 \quad . \quad (8.89)$$

On applique ensuite (8.86) pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{c_s^2}{\gamma} \Delta \rho_1 - 4\pi G \rho_1 \rho_0 = 0 \quad . \quad (8.90)$$

Pour résoudre cette équation, on y injecte une solution ondulatoire de la forme

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \Re \left\{ C e^{(i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad . \quad (8.91)$$

Une solution générale de l'équation sera obtenue en sommant diverses solutions élémentaires ondulatoires, ce qui fait que le comportement général se déduira de celui de ces solutions. Les équations étant linéaires, nous pouvons laisser tomber les parties réelles dans la résolution (tout est aussi valable pour les parties imaginaires). Dans l'équation (8.91), seule la composante radiale a de l'intérêt, à cause de la symétrie sphérique. En y injectant la forme supposée de ρ_1 , on tire après simplification *l'équation de dispersion*, c'est-à-dire l'équation qui relie la fréquence spatiale k à la fréquence temporelle ω :

$$\boxed{\omega^2 = k^2 \frac{c_s^2}{\gamma} - 4\pi G \rho_0} \quad . \quad (8.92)$$

La discussion porte ensuite sur le nombre d'onde k (ou la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$) de la perturbation. On pose au passage

$$\boxed{k_J^2 = \frac{4\pi\gamma G \rho_0}{c_s^2} \quad \text{et} \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{\gamma G \rho_0}}} \quad . \quad (8.93)$$

λ_J est la *longueur d'onde de Jeans*. Deux cas se présentent :

- Si $\lambda < \lambda_J$ ($k > k_J$), la valeur de ω^2 que nous tirons de (8.92) est positive. On trouve donc une solution avec ω réel, c'est-à-dire une solution d'oscillation. Si la longueur d'onde est très petite (k très grand), ou si, ce qui revient au même, ρ_0 est très petit, le terme d'origine gravitationnel $-4\pi G \rho_0$ peut être négligé dans (8.92), et l'oscillation se réduit essentiellement à une onde sonore classique.
- Si $\lambda > \lambda_J$ ($k < k_J$), nous tirons de (8.92) une valeur de $\omega^2 < 0$. Ceci implique une solution avec ω imaginaire pur, c'est-à-dire une solution en ρ_1 exponentiellement décroissante ou croissante. La présence de la solution croissante implique que le système est instable. Concrètement, pour une perturbation de longueur d'onde supérieure à λ_J , l'autogravité l'emporte sur la pression et le système s'effondre.

On appelle également *masse de Jeans* la masse contenue dans une sphère de rayon $\lambda_J/2$, soit

$$M_J = \frac{\pi}{6} \rho_0 \lambda_J^3 = \frac{\pi \rho_0}{6} \left(\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0} \right)^{3/2} \quad . \quad (8.94)$$

Si le gaz est un gaz parfait de masse par particule μ , on a par ailleurs $c_s^2 = \gamma k T / \mu$, ce qui nous permet d'exprimer la masse de Jeans en fonction de la température T du gaz et de sa densité initiale ρ_0 :

$$M_J = \frac{\pi \rho_0}{6} \left(\frac{\pi \gamma k T}{G \mu \rho_0} \right)^{3/2} \quad . \quad (8.95)$$

Pour $\lambda > \lambda_J$, une perturbation de la sphère homogène la rend instable, ce qui s'interprète en disant que la masse de gaz contenue dans la sphère de rayon $\lambda_J/2$ est susceptible de s'effondrer sous l'effet de sa propre gravité si sa masse est supérieure à M_J .

Faisons une application numérique simple. Prenons un cœur de nuage moléculaire dans la Galaxie, composé essentiellement d'hydrogène moléculaire H_2 , de densité 2000 particules par cm^3 , et température 7K. On trouve $M_J = 11 M_\odot$, ce qui représente un ordre de grandeur raisonnable pour un cœur protostellaire susceptible de s'effondrer et déclencher une formation stellaire.

8.3.2 L'instabilité de Jeans dans un système stellaire

On peut reprendre le même système sphérique, mais vu sous l'angle de la dynamique stellaire. Conceptuellement, on peut traiter le problème de la même façon qu'en hydrodynamique, en partant des équations de Jeans qui sont très similaires aux équations de l'hydrodynamique. Il y a toutefois des différences. Premièrement, si l'ellipsoïde des vitesses n'est pas isotrope, le terme correspondant ne se réduit pas à un simple terme de pression. Deuxièmement, même si c'est le cas, il nous manque un lien entre la densité et la pression qui était assuré dans le cas du gaz par l'équation d'état. Pour ces raisons, il est préférable de repartir de l'équation de Boltzmann que nous allons linéariser. Nous écrirons donc pour la fonction de distribution Ψ et le potentiel U :

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \quad \text{et} \quad U = U_0 + U_1 \quad . \quad (8.96)$$

L'équation de Boltzmann, une fois linéarisée, s'écrit

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi_1 - \vec{\nabla} U_1 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi_0 - \vec{\nabla} U_0 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi_1 = 0 \quad . \quad (8.97)$$

L'équation de Poisson linéarisée s'écrit

$$\Delta U_1 = 4\pi G \rho_1 = 4\pi G \iiint \Psi_1 d^3\vec{v} \quad . \quad (8.98)$$

La résolution de ces équations bute sur la méconnaissance du terme $\vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi_1$. Toutefois, dans le cadre de nos approximations, le potentiel U_0 est uniforme, son gradient est nul et le terme correspondant disparaît. Il reste donc

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Psi_1 - \vec{\nabla} U_1 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi_0 = 0 \quad . \quad (8.99)$$

On cherche maintenant une solution de la forme

$$U_1(\vec{r}, t) = U_a \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad ; \quad (8.100)$$

$$\Psi_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = \Psi_a(\vec{v}) \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad . \quad (8.101)$$

Si on injecte ces solutions dans les équations de Boltzmann et de Poisson linéarisées, il vient

$$(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega) \Psi_a(\vec{v}) = U_a \vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi_0 \quad ; \quad (8.102)$$

$$-k^2 U_a = 4\pi G \iiint \Psi_a(\vec{v}) d^3\vec{v} \quad . \quad (8.103)$$

En éliminant Ψ_a entre les deux équation, nous tirons

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \iiint \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \Psi_0}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} d^3\vec{v} = 0 \quad . \quad (8.104)$$

Cette équation constitue la relation de dispersion du système stellaire dans toute sa généralité. Si on veut aller plus loin il faut faire des hypothèses sur la forme de la fonction de distribution Ψ_0 . Un exemple standard est de supposer une Maxwellienne :

$$\Psi_0(\vec{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma_v^2)^{3/2}} e^{-v^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad (8.105)$$

où σ_v est la dispersion de vitesses. On a alors

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}}\Psi_0(\vec{v}) = -\frac{\rho_0}{\sigma_v^2(2\pi\sigma_v^2)^{3/2}} e^{-v^2/(2\sigma^2)} \vec{v} \quad . \quad (8.106)$$

Pour reporter dans l'équation de dispersion, il faut calculer le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{v}$. Quitte à changer de repère, on peut supposer \vec{k} colinéaire au vecteur de base de l'axe OX : $\vec{k} = k\vec{i}$. Le report dans l'équation de dispersion donne alors

$$1 - \frac{4\pi G}{k^2} \frac{\rho_0}{\sigma_v^2(2\pi\sigma_v^2)^{3/2}} \iiint \frac{v_x}{v_x - \omega/k} \exp\left(-\frac{v_x^2}{2\sigma_v^2}\right) \exp\left(-\frac{v_y^2}{2\sigma_v^2}\right) \exp\left(-\frac{v_z^2}{2\sigma_v^2}\right) dv_x dv_y dv_z = 0 \quad . \quad (8.107)$$

Les intégrales sur v_y et v_z se calculent aisément. Il reste

$$\frac{2\sqrt{2\pi}G\rho_0}{k^2\sigma_v^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_x}{v_x - \omega/k} \exp\left(-\frac{v_x^2}{2\sigma_v^2}\right) dv_x = 1 \quad . \quad (8.108)$$

Par analogie avec le cas fluide, on s'attend à trouver la limite entre les solutions stables et instables en $\omega = 0$. Pour $\omega = 0$ l'intégrale se calcule aisément, et on trouve

$$k^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\sigma_v^2} \equiv k_J^2 \quad , \quad (8.109)$$

où on a défini le nombre d'onde de Jeans de la même manière que dans le cas fluide, le rôle de la vitesse du son étant tenu ici (comme c'est le cas souvent) par σ_v .

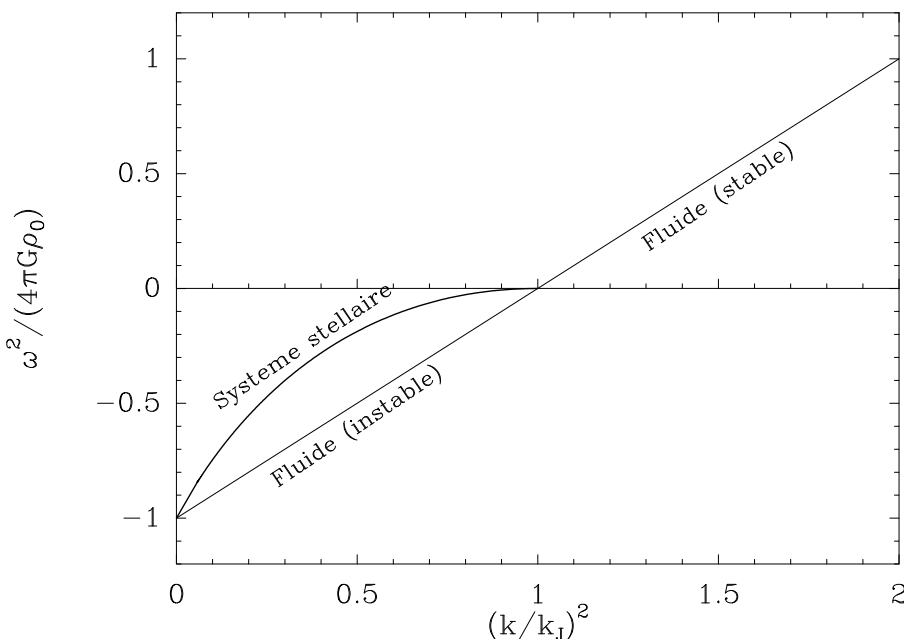


FIGURE 8.2: La relation de dispersion (normalisée) de Jeans pour le fluide et le système stellaire. Pour le système stellaire, seule la branche instable est représentée.

Toujours par analogie avec le cas fluide, on s'attend à trouver des solutions stables pour $k > k_J$ et des solutions instables pour $k < k_J$. Pour chercher les solutions instables, posons $\omega = i\gamma$ où γ est réel⁸. Tous calculs faits, la relation de dispersion devient alors

$$k^2 = k_J^2 \left\{ 1 - \frac{|\gamma|\sqrt{\pi}}{k\sigma_v\sqrt{2}} \exp\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\sigma_v^2}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{|\gamma|}{k\sigma_v\sqrt{2}}\right) \right] \right\}, \quad (8.110)$$

où erf est la fonction d'erreur (voir annexe) et où on a utilisé la relation (D.72).

Cette relation de dispersion, une fois normalisée, est tracée sur la figure 8.2, conjointement avec la relation correspondant au fluide. On voit que comme on pouvait s'y attendre, le système stellaire est lui aussi instable pour toute perturbation de longueur d'onde $\lambda > \lambda_J$. Pour $\lambda < \lambda_J$, la ressemblance entre les deux situations est moins claire. En effet, à courte longueur d'onde, les oscillations supportées par le fluide sont essentiellement des ondes sonores modifiées par l'autogravité. Le système stellaire ne supporte pas de tels ondes. Un traitement plus fin du cas du système stellaire (voir Binney & Tremaine 1987) montre que dans ce cas, toutes les perturbations avec $\lambda < \lambda_J$ sont amorties. Il s'agit d'un amortissement non dissipatif appelé *amortissement de Landau*, et que l'on retrouve en physique des plasmas.

8.4 Relaxation

8.4.1 Introduction

La fonction de distribution Ψ qui intervient dans l'équation de Boltzmann est reliée, comme nous l'avons dit, à un potentiel lissé U . En réalité, le fait que le potentiel réel ne soit pas lissé induit des fluctuations de la fonction de distribution dans l'état stationnaire. La principale cause physique de ces fluctuations concerne les *rencontres* entre étoiles. On parlera de rencontre (ou passage proche) entre deux étoiles lorsqu'elles s'approchent suffisamment pour que leur interaction gravitationnelle mutuelle devienne momentanément dominante par rapport à l'effet d'ensemble (dû au potentiel lissé).

Les rencontres induisent des modifications de trajectoire par rapport à ce que prévoit la seule action du potentiel lissé. Donc, les intégrales premières qui sont définies à partir de ce potentiel ne vont plus rester constantes. L'effet des rencontres étant faible, les intégrales varient lentement, on peut les appeler quasi-intégrales. La fonction de distribution, même une fois l'état stationnaire atteint, va donc varier lentement au cours du temps. Ce phénomène porte le nom de *relaxation*.

Les rencontres détruisent donc l'état stationnaire, mais, l'échelle de temps de mélange étant petite, cet état stationnaire va être rapidement recréé. Ce sera cependant un état stationnaire légèrement différent qui va lentement dériver au cours du temps. Le système est en permanence dans un état quasi-stationnaire. On appliquera donc le théorème de Jeans, mais en y ajoutant une dépendance lente avec le temps.

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, t) \quad . \quad (8.111)$$

On définira le *temps de relaxation* (t_r) comme le temps au bout duquel l'état stationnaire sera substantiellement modifié sous l'effet des rencontres. Mathématiquement, on écrira

$$\frac{1}{t_r} = \frac{1}{\Psi} \left| \frac{d\Psi}{dt} \right| \quad . \quad (8.112)$$

8. On montre (Binney & Tremaine 1987) que les solutions instables ne peuvent être qu'imaginaires pures.

8.4.2 Calcul approché du temps de relaxation

Nous allons maintenant essayer d'estimer le temps de relaxation défini par l'équation (8.112). Pour cela, nous allons nous pencher sur le traitement des rencontres.

Soient donc deux étoiles numérotées 1 et 2. Lors d'une rencontre, on pourra momentanément considérer que les deux étoiles forment un système isolé. Les deux étoiles vont être déviées en

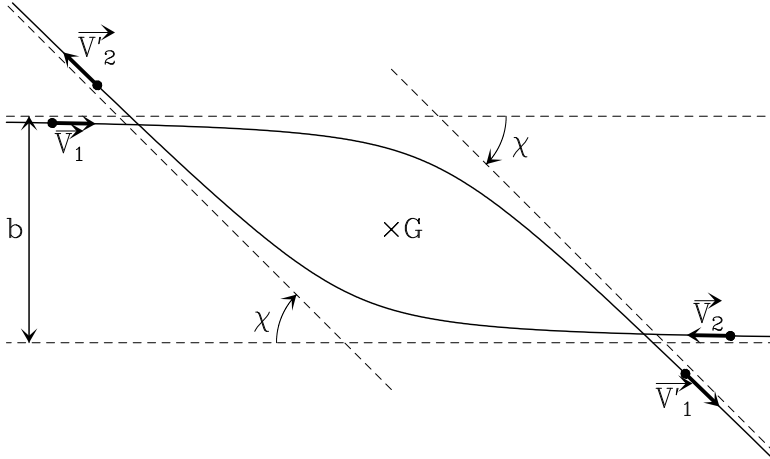


FIGURE 8.3: Géométrie de la rencontre entre deux étoiles

tournant autour de leur centre de gravité commun (Fig. 8.3). Par conservation de l'énergie, la vitesse relative avant et après la rencontre sont identiques en norme, mais pas en direction. Le bilan net de la rencontre est donc une déviation d'un angle χ de la vitesse relative entre les deux étoiles. Le calcul de cet angle de déviation se traite dans le cadre du mouvement képlérien hyperbolique et est donné en annexe. Outre les masses m_1 et m_2 des deux étoiles, les données du problème sont la vitesse relative à l'infini v et le paramètre d'impact b (Fig. 8.3). Le calcul final donne

$$\boxed{\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{b_c}{b} = \frac{G(m_1 + m_2)}{v^2 b}} \quad , \quad (8.113)$$

où l'on a introduit le paramètre d'impact critique

$$b_c = \frac{G(m_1 + m_2)}{v^2} \quad . \quad (8.114)$$

Les fortes déflexions correspondent à $b \lesssim b_c$.

Soit N le nombre total d'étoiles et M la masse du système. En première approximation, on a

$$m_1 = m_2 = \bar{m} = \frac{M}{N} \quad ; \quad (8.115)$$

$$v^2 = \bar{v}^2 \simeq \frac{GM}{2\bar{r}} \quad [\text{Eq. (8.21)}] \quad . \quad (8.116)$$

En combinant les équations (8.21) et (8.114), il vient aisément

$$b_c \simeq \frac{4\bar{r}}{N} \quad . \quad (8.117)$$

La masse volumique moyenne ρ est égale à

$$\rho = \frac{M}{8\bar{r}^3} \quad . \quad (8.118)$$

La distance moyenne entre deux étoiles voisines D_0 est déterminée de telle manière qu'il y ait au moins une étoile dans le cube défini par :

$$\frac{\rho}{\bar{m}} D_0^3 = 1 \quad , \quad (8.119)$$

$$\text{d'où} \quad D_0 = \frac{2\bar{r}}{N^{1/3}} \quad . \quad (8.120)$$

On tire de (8.117) et (8.120)

$$\frac{b_c}{D_0} = 2N^{-2/3} \quad . \quad (8.121)$$

La distance d'interaction b_c est donc très petite devant la distance moyenne séparant entre deux étoiles voisines. Par exemple, pour un amas globulaire typique ($\bar{r} = 5 \text{ pc}$, $N = 10^5$), $b_c = 10^{-4} \text{ pc}$ et $D_0 = 0.2 \text{ pc}$. La déflexion χ est donc très petite. Les rencontres provoquent de petites déflexions.

Pour évaluer le temps de relaxation, nous effectuerons quelques hypothèses simplificatrices. Nous allons premièrement considérer que toutes les étoiles ont la même masse \bar{m} . Nous allons étudier l'effet moyen des déflexions subies par une étoile test se déplaçant au milieu du système. Nous supposerons que l'étoile test est animée d'une vitesse égale à la vitesse \bar{v} définie par l'équation (8.21). Les autres étoiles sont animées de vitesses variables, en moyenne aussi égales à \bar{v} . Ces vitesses sont a priori orientées dans toutes les directions, de telle sorte que vectoriellement, la moyenne de ces vitesses est nulle. Nous considérerons donc pour simplifier que *toutes ces vitesses sont nulles* en moyenne. Ceci revient à dire qu'en moyenne, la vitesse relative des étoiles par rapport à notre étoile test n'est autre que l'opposée de la vitesse (vectorielle) de l'étoile test.

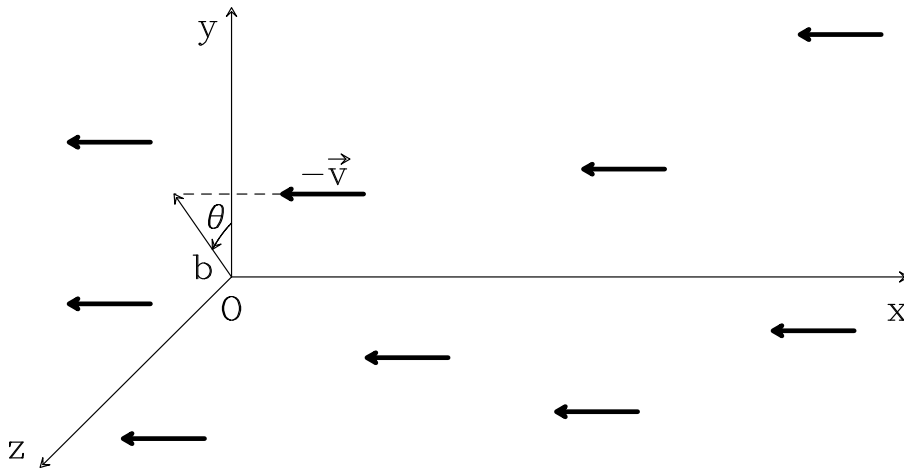


FIGURE 8.4:
Déplacement de l'étoile test dans un champ d'étoiles fixes

Considérons donc notre étoile test se déplaçant à vitesse \bar{v} dans une direction Ox donnée dans un champ d'étoiles fixes de même masse. Nous considérons un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) centré sur l'étoile. Dans ce référentiel, toutes les autres étoiles se déplacent à la vitesse $-\bar{v}$ (Fig. 8.4). Une étoile du champ sera repérée dans ce repère par ses coordonnées cylindriques x, b et θ (Fig. 8.4). b n'est autre que le paramètre d'impact de la rencontre avec l'étoile du champ considérée. Celle-ci a lieu lorsque l'étoile du champ « passe » par le plan (yOz) . La vitesse de l'étoile test se trouve modifiée par chaque rencontre. Dans un repère lié au centre de gravité du système constitué par les deux étoiles, la vitesse de l'étoile test est $\bar{v}/2$. Cette vitesse de trouva modifiée par déviation Képlérienne hyperbolique. Pour obtenir la vitesse dans le repère initial, il convient de rajouter ensuite la vitesse $\bar{v}/2$ de déplacement du référentiel

inertiel. Les vecteurs vitesse \vec{v} et \vec{v}' avant et après une rencontre, dans le référentiel initial, ont donc pour coordonnées respectives

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \bar{v} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad (8.122)$$

$$\vec{v}' = \frac{1}{2}\bar{v} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\bar{v} \begin{vmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \cos \theta \\ \sin \chi \sin \theta \end{vmatrix} , \quad (8.123)$$

où χ est l'angle de déflexion. Le *changement* de vitesse occasionné par la rencontre est donc égal à

$$\Delta v = \frac{\bar{v}}{2} \begin{vmatrix} \cos \chi - 1 \\ \sin \chi \cos \theta \\ \sin \chi \sin \theta \end{vmatrix} = \frac{\bar{v}}{b_c^2 + b^2} \begin{vmatrix} -b_c^2 \\ b_c b \cos \theta \\ b_c b \sin \theta \end{vmatrix} , \quad (8.124)$$

où l'on a tenu compte de l'expression (8.113) de $\tan(\chi/2)$.

En toute rigueur, ceci n'est correct que pour la *première* rencontre. En pratique, on continuera à l'appliquer tant que l'orbite de l'étoile test sera voisine de l'axe Ox . Les rencontres n'occasionnant que de faibles déviations, ceci ne se produira qu'au bout de plusieurs rencontres. Ce critère va précisément nous servir à évaluer le temps de relaxation. Nous le considérerons égal au temps nécessaire pour que le changement de vitesse, *dans une direction donnée perpendiculaire à Ox* , soit de l'ordre de \bar{v} sous l'effet des rencontres. Nous allons faire le calcul pour la direction Oy , étant bien entendu que pour toute autre direction, le résultat serait le même.

Désignant par ρ la masse volumique du système, le nombre d'étoiles par unité de volume est tout simplement ρ/\bar{m} . Pendant un temps Δt , le nombre d'étoiles du champ rencontrées dont les coordonnées sont situées entre b et $b + db$ pour le paramètre d'impact, et $\theta + d\theta$ pour l'angle, vaudra

$$dn = \frac{\rho}{\bar{m}} \bar{v} \Delta t b db d\theta . \quad (8.125)$$

Si ce nombre est plus petit de 1, il représente une probabilité. L'effet moyen des rencontres s'obtient en intégrant sur les variables b et θ . Il apparaît de manière évidente en intégrant sur θ que l'effet moyen dans les directions Oy et Oz est nul. Mais ceci représente une moyenne *algébrique*, traduisant le fait que dans une direction donnée (Oy par exemple), l'étoile sera déviée indistinctement dans un sens ou dans l'autre. Par contre, l'effet *quadratique* sera non nul, traduisant le fait que la vitesse perpendiculairement à Ox s'éloigne de 0. Nous calculerons donc la moyenne du changement quadratique de vitesse dans la direction Oy en un temps Δt . Il vient

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \iint (\Delta v_y)^2 dn . \quad (8.126)$$

En pratique, on intègre θ de 0 à 2π , et b de 0 à une valeur maximale qui n'est autre que \bar{r} (la taille du système est finie). On a donc

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \bar{v}^3 b_c^2 \frac{\rho}{\bar{m}} \Delta t \int_0^{\bar{r}} \frac{b^3 db}{(b^2 + b_c^2)^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta . \quad (8.127)$$

On pose $x = b/b_c$ et on intègre sur θ :

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \pi \bar{v}^3 b_c^2 \frac{\rho}{\bar{m}} \Delta t \int_0^{\bar{r}/b_c} \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2} . \quad (8.128)$$

L'intégrale se calcule en décomposant

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right) \quad . \quad (8.129)$$

Il vient

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \frac{1}{2} \pi \bar{v}^3 b_c^2 \frac{\rho}{\bar{m}} \Delta t \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{r}^2}{b_c^2} \right) - \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}^2 + b_c^2} \right] \quad . \quad (8.130)$$

En utilisant l'équation (B.49) avec $m_1 = m_2 = \bar{m}$, on obtient

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \frac{2\pi \bar{m} G^2 \rho \Delta t}{\bar{v}} \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{r}^2}{b_c^2} \right) - \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}^2 + b_c^2} \right] \quad . \quad (8.131)$$

Compte tenu de $b_c \simeq 4\bar{r}/N$, il vient

$$\ln \left(1 + \frac{\bar{r}^2}{b_c^2} \right) - \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}^2 + b_c^2} = \ln \left(\frac{N^2}{16} + 1 \right) + \frac{1}{1 + \frac{16}{N^2}} \simeq 2 \ln N \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad . \quad (8.132)$$

Il vient donc en définitive

$$\langle (\Delta v_y)^2 \rangle \simeq \frac{4\pi \bar{m} G^2 \rho \Delta t}{\bar{v}} \ln N \quad . \quad (8.133)$$

Le temps de relaxation se définit comme le temps au bout duquel $\langle (\Delta v_y)^2 \rangle$ est de l'ordre de $(\bar{v})^2$, soit

$$t_r = \frac{\bar{v}^3}{4\pi G^2 \bar{m} \rho \ln N} \quad . \quad (8.134)$$

Or $\rho \simeq M/(8\bar{r}^3)$, $t_d = \bar{r}/\bar{v}$ et $\bar{v}^2 = GM/(2\bar{r})$, d'où :

$$\boxed{t_r = \frac{N}{2\pi \ln N} t_d} \quad . \quad (8.135)$$

Pour N grand $t_r \gg t_d$. La relaxation est un phénomène lent. Pour un amas ouvert typique (voir table 8.1), on trouve $t_r = 10^7$ ans ; pour un amas globulaire typique $t_r = 10^9$ ans ; pour une galaxie elliptique $t_r = 5 \times 10^{14}$ ans et pour un amas de galaxies $t_r = 10^{10}$ ans. Pour une galaxie spirale, la vitesse relative des étoiles est faible devant la vitesse absolue. Au voisinage du Soleil, $v \simeq 20 \text{ km s}^{-1}$ et $\rho = 0.1 M_\odot \text{ pc}^{-3}$; on trouve $t_r = 1.5 \times 10^{13}$ ans. Le temps de relaxation d'une galaxie spirale est probablement *beaucoup plus court* : elle contient du gaz en plus des étoiles.

8.4.3 Relaxation violente

Il faut bien garder à l'esprit que l'effet final de la relaxation est de faire « oublier » à un système donné ses conditions initiales. Suite aux rencontres, les orbites voisines diffusent dans l'espace des phases de telle sorte qu'il est impossible de remonter à l'état antérieur du système au-delà d'un temps comparable au temps de relaxation.

La relaxation de nous venons de décrire (due aux rencontres) est encore appelée *relaxation à deux corps* ; il existe en effet d'autres processus de relaxation. On peut ainsi évoquer dans une galaxie spirale tous ce qui concerne les interactions entre les étoiles et le milieu interstellaire, et en particulier les nuages moléculaires. Ces effets ont pour conséquence un raccourcissement considérable du temps de relaxation de ces systèmes.

Un autre mode de relaxation important est la *relaxation violente* qui concerne les systèmes hors équilibre. Prenons par exemple les galaxies elliptiques. Leur profil photométrique est très lisse. Ceci montre qu'elles sont bien relaxées. Or le calcul précédent a montré qu'a priori, le temps de relaxation pour un tel système est extrêmement long, supérieur à l'âge de l'Univers. Manifestement, la relaxation a été accélérée au moins à un moment donné dans ces galaxies. L'explication provient de la formation des galaxies elliptiques, soit par effondrement gravitationnel, soit par coalescence de galaxies de masses comparables. Dans tout les cas, le processus invoqué engendre une variation très rapide du potentiel gravitationnel.

Prenons une étoile dans un système stellaire et exprimons le taux de variation de son énergie :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial t} \quad , \quad (8.136)$$

car $d\vec{v}/dt = -\vec{\nabla}U$. Nous retrouvons bien le fait que si le système (et donc le potentiel lissé U) est dans un état stationnaire ($\partial U/\partial t = 0$), l'énergie de la particule est conservée. Mais dans les cas où tout le système s'effondre en même temps ou bien lorsque deux systèmes rentrent en collision, le terme $\partial U/\partial t = 0$ est loin d'être négligeable, et l'énergie d'une particule n'est plus conservée. La particule échange de l'énergie avec le potentiel et finit par oublier ses conditions initiales. Il s'agit donc bien d'un processus de relaxation, mais il est beaucoup plus rapide que la relaxation à deux corps, et se fait sur *quelques temps dynamiques* ; c'est pourquoi on parle de relaxation violente, un processus initialement décrit par Lynden-Bell (1967).

8.4.4 Évasion des étoiles. Temps de vie

Du fait même que l'état stationnaire évolue sous l'effet des rencontres, on peut se demander si un tel état d'équilibre existe, car *stricto sensu*, un état stationnaire qui évolue, même lentement, n'est pas stationnaire. Tout ceci revient à savoir si la fonction de distribution est non seulement stationnaire, mais aussi invariante par rapport aux rencontres.

Dans le cas d'un système homogène d'étoiles et, en s'inspirant de la théorie cinétique des gaz, on peut montrer que le *seul* état d'équilibre possible est la *distribution de Maxwell*, caractérisée par

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) = N \times \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} e^{-v^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad (8.137)$$

où σ est la dispersion de vitesse et N le nombre total d'étoiles. Dans ces conditions, le nombre d'étoiles dN ayant leur vitesse (en module) comprise entre v et $v + dv$ vaudra par symétrie sphérique :

$$dN = 4\pi N v^2 \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} e^{-v^2/(2\sigma^2)} dv \quad . \quad (8.138)$$

Dans un amas, toute étoile dont la vitesse dépasse une certaine valeur appelée vitesse d'évasion s'évade du système (son énergie est positive). Il n'est donc pas possible d'atteindre une distribution de Maxwell qui implique des vitesses allant jusqu'à l'infini. La distribution est donc tronquée à la vitesse d'évasion (Fig. 8.5).

La fonction de distribution n'est donc jamais indépendante du temps. On peut estimer grossièrement de taux d'évasion en fonction du temps en appliquant le théorème du Viriel. Désignons par \bar{U} l'énergie potentielle moyenne par étoile. En supposant que l'énergie potentielle entre chaque couple d'étoiles est la même, égale à \bar{U}/N , on a, si Ω est l'énergie potentielle du système entier

$$\Omega \simeq \frac{1}{2} N^2 \frac{\bar{U}}{N} \quad . \quad (8.139)$$

L'énergie cinétique totale du système est

$$T = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 \quad . \quad (8.140)$$

En appliquant le théorème du Viriel $2T + \Omega = 0$, il vient

$$\bar{U} = -\frac{2M\bar{v}^2}{N} = -2\bar{m}\bar{v}^2 \quad . \quad (8.141)$$

Une étoile se déplacera à la vitesse d'évasion v_e si son énergie cinétique $(1/2)\bar{m}v_e^2$ vaut exactement $-\bar{U}$, soit

$$v_e = 2\bar{v} \quad . \quad (8.142)$$

La vitesse d'évasion est tout simplement le double de la vitesse quadratique moyenne.

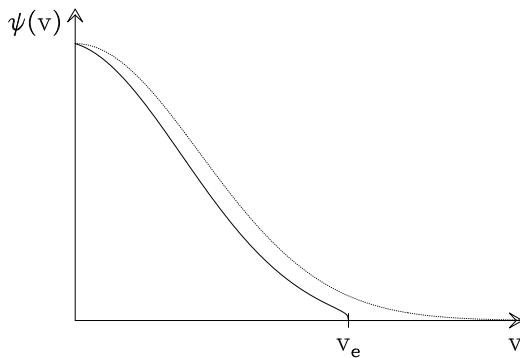


FIGURE 8.5: *Fonction de distribution tronquée*

On peut à partir de là estimer grossièrement le taux d'évasion. Pour cela, on va supposer que la distribution atteinte au bout d'un certain temps est proche d'une distribution de Maxwell. Ceci se justifie par le fait que la relaxation tend à faire évoluer la fonction de distribution initiale vers une distribution de Maxwell, et que (ce qui sera vérifié plus bas), l'évasion est de toutes façons un phénomène assez mineur, ce qui fait que la distribution obtenue n'est jamais très éloignée d'une distribution de Maxwell.

Dans ces conditions on peut relier la vitesse quadratique moyenne à la distribution :

$$\bar{v}^2 = \int_0^{+\infty} v^2 \times 4\pi v^2 \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} e^{-v^2/(2\sigma^2)} dv \quad . \quad (8.143)$$

Ceci s'intègre en posant $x = v/(\sigma\sqrt{2})$. On trouve en définitive

$$\bar{v}^2 = 3\sigma^2 \quad \implies \quad v_e = 2\sigma\sqrt{3} \quad . \quad (8.144)$$

On peut alors estimer le *taux d'évasion* dN/dt , c'est à dire le nombre d'étoiles perdues par unité de temps par évasion, en tenant le raisonnement suivant : Toutes les étoiles dont la vitesse sera supérieure à v_e seront perdues. Soit N_{ev} ce nombre. Le temps typique de perte est de l'ordre du temps dynamique du système, c'est un temps très court devant le temps de relaxation. Par contre il faudra un temps de l'ordre du temps de relaxation pour reformer une distribution de Maxwell à partir de la distribution tronquée par l'évasion. Par conséquent, on pourra estimer le taux d'évasion par $dN/dt \simeq -N_{ev}/t_r$. On écrit alors

$$N_{ev} = N \times \int_{v_e}^{+\infty} 4\pi v^2 \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} e^{-v^2/(2\sigma^2)} dv = N \times \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{6}}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad . \quad (8.145)$$

Posons alors

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{6}}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \simeq 0.00738 \quad . \quad (8.146)$$

On trouve en définitive

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \frac{N}{t_r} \quad . \quad (8.147)$$

Le coefficient λ est de l'ordre de quelques millièmes. L'évasion est un phénomène lent et secondaire, et la distribution est toujours proche d'une distribution de Maxwell.

Les étoiles qui s'évadent ont pratiquement une énergie nulle, de telle sorte que l'énergie totale du système peut être considérée comme constante. Le théorème du Viriel montre alors que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système sont toutes deux constantes. On a

$$\Omega \simeq -\frac{GN^2\bar{m}^2}{2\bar{r}} \quad \Longrightarrow \quad \bar{r} \propto N^2 \quad . \quad (8.148)$$

Comme N diminue, le système *se contracte* au cours du temps. Sa masse volumique moyenne est égale à $\rho = N/(8\bar{r}^3)$, elle est donc proportionnelle à N^{-5} et elle augmente très rapidement. Il vient également

$$T = \frac{Nm\bar{v}^2}{2}, \quad \text{donc} \quad N\bar{v}^2 = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \bar{v} \propto N^{-1/2} \quad ; \quad (8.149)$$

$$t_d = \frac{\bar{r}}{\bar{v}} \propto N^{5/2} \quad ; \quad (8.150)$$

$$t_r = \frac{N}{2\pi \ln N} t_d \propto N^{7/2} \quad (\ln N \text{ varie peu}) \quad . \quad (8.151)$$

D'après (8.147) donc, dN/dt est proportionnel à $N^{-5/2}$, d'où

$$N(t) = N_0 \left(1 - \frac{t}{t_v}\right)^{2/7}, \quad (8.152)$$

où t_v est une constante d'intégration qui n'est rien d'autre que le temps au bout duquel $N = 0$, c'est à dire le *temps de vie* du système. Le système a donc une durée de vie finie. À l'instant $t = 0$, on a

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{2}{7} \frac{N_0}{t_v} = -\lambda \frac{N_0}{t_r(0)} \quad [\text{Eq. (8.147)}] \quad . \quad (8.153)$$

On en déduit le temps de vie du système

$$\boxed{t_v = \frac{2}{7\lambda} t_r(0) \simeq 38 t_r(0)} \quad , \quad (8.154)$$

$t_r(0)$ étant le temps de relaxation initial.

Numériquement, on trouve $t_v = 4 \times 10^8$ ans pour un amas ouvert, 6×10^{10} ans pour un amas globulaire, 2×10^{15} ans pour une galaxie, et 4×10^{11} ans pour un amas de galaxies.

Chapitre 9

Dynamique galactique

Une galaxie n'est pas uniquement formée de 10^{11} à 10^{12} étoiles, mais aussi de gaz interstellaire et de rayons cosmiques. Comme nous l'avons vu, en dehors des galaxies elliptiques, le gaz représente une masse minoritaire, mais significative de la masse totale (jusqu'à 30% pour les Irrégulières). Il joue un rôle essentiel par exemple dans la dynamique des bras spiraux ou encore le taux de formation d'étoiles. Signalons que cette proportion varie d'une galaxie à l'autre. Les galaxies elliptiques ne contiennent presque pas de gaz, alors que les galaxies irrégulières en comportent jusqu'à 30%. La présence de gaz, la symétrie axiale posent des problèmes qu'une simple approche de type « N corps » ne saurait traiter complètement.

9.1 Systèmes axisymétriques. Troisième intégrale

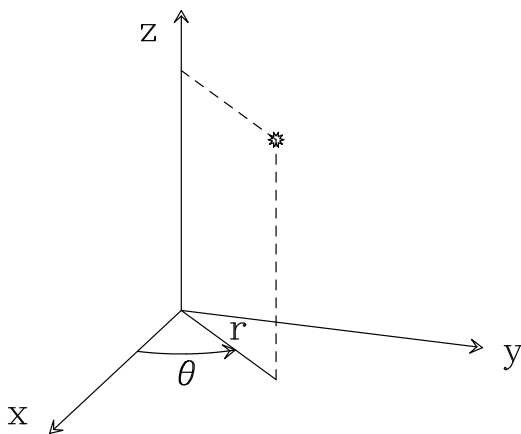


FIGURE 9.1: Géométrie axisymétrique

Nous avons vu plus haut que dans tout système stellaire en état stationnaire, il y avait au moins une intégrale première conservative et isolante : l'énergie. Cette intégrale est traditionnellement notée I_1 . On a souvent fait l'hypothèse que toutes les autres intégrales premières étaient non isolantes. Ceci est certainement vrai en théorie cinétique des gaz, mais c'est assurément faux dans le cas galactique, car dans ce cas, le théorème de Jeans donnerait :

$$\Psi = \Psi(I_1) = \Psi(E) \quad . \quad (9.1)$$

Si la fonction de distribution Ψ ne dépendait que de l'énergie et de la masse, cela signifierait que le moment cinétique de l'ensemble du système est nul. En effet, en un point donné de l'espace, l'énergie E ne dépendant que du carré des vitesses, la distribution des vitesses devrait alors avoir une symétrie sphérique, et il n'y aurait donc pas de rotation d'ensemble. Nous avons vu au chapitre 2 des exemples de tels systèmes. Dans le cas général, il y a donc au moins une ou plusieurs autres intégrales isolantes, mais il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires pour dire lesquelles.

Dans le cas d'un potentiel axisymétrique (Fig. 9.1), le moment cinétique L_z par rapport à l'axe de rotation Oz est une constante : $L_z = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$. C'est évident quand on écrit les équations du mouvement en coordonnées cylindriques (r, θ, z) en considérant que le potentiel

U ne dépend que de r et de z . On a donc au moins deux intégrales isolantes :

$$\begin{cases} I_1 = E \\ I_2 = L_z \end{cases} \quad . \quad (9.2)$$

Comme nous le verrons plus bas, en première approximation le mouvement d'une étoile est caractérisé par la donnée de plusieurs fréquences fondamentales qui dans le cas général n'ont rien de commensurable. Si on applique le théorème de Jeans fort, on en déduit alors qu'au maximum la fonction de distribution ne peut dépendre que de trois intégrales isolantes. Nous savons que Ψ dépend déjà de deux intégrales isolantes E et L_z . La question de savoir si une troisième intégrale isolante notée I_3 existait dans le cas de notre Galaxie a fait l'objet d'un débat pendant des dizaines d'années, connu sous le nom de *problème de la troisième intégrale*. En fait, en 1915, Jeans affirmait que I_3 n'existait pas. Ce n'est qu'après l'apparition de calculateurs électroniques permettant de faire des calculs numériques d'orbites qu'on s'est rendu compte de l'existence de I_3 (1960).

Il y a un moyen observationnel de se rendre compte de la nécessité d'une troisième intégrale dans notre Galaxie. Supposons que I_3 n'existe pas. Alors la fonction de distribution n'est fonction que de E et L_z

$$\Psi = \Psi(E, L_z) = \Psi \left[U(r, z) + \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2), rv_\theta \right] \quad . \quad (9.3)$$

Calculons maintenant les dispersions de vitesses radiales et verticales

$$\rho \langle v_r^2 \rangle = \iiint \Psi(E, L_z) v_r^2 d^3\vec{v} = \iiint \Psi \left[U(r, z) + \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2), rv_\theta \right] v_r^2 dv_r dv_\theta dv_z \quad (9.4)$$

$$\rho \langle v_z^2 \rangle = \iiint \Psi(E, L_z) v_z^2 d^3\vec{v} = \iiint \Psi \left[U(r, z) + \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2), rv_\theta \right] v_z^2 dv_r dv_\theta dv_z \quad (9.5)$$

Il est évident dans les deux formules ci-dessus que les rôles de v_r et v_z sont parfaitement interchangeables. Le calcul des deux intégrales doit nécessairement conduire au même résultat, par conséquent $\langle v_r^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Or les diverses observations font clairement ressortir que dans le voisinage solaire, $\langle v_r^2 \rangle > \langle v_z^2 \rangle$ d'un facteur 2 environ. Les orbites stellaires dans notre Galaxie possèdent donc *nécessairement* une troisième intégrale.

Cette contradiction observationnelle n'avait pas échappé à Jeans. Mais en 1915, il s'en sortait en affirmant que ceci découlait du fait que le voisinage solaire n'avait pas atteint un état stationnaire, auquel cas le théorème de Jeans ne s'appliquait pas. Il conservait ainsi uniquement E et L_z . Il faut dire qu'à cette époque on savait encore peu de choses sur la structure à grande échelle de notre Galaxie, et il n'était même pas évident qu'elle ait atteint un état stationnaire. A l'heure actuelle encore, ce tour de passe-passe qui consiste à ignorer I_3 permet de fournir des modèles acceptables pour des galaxies pour lesquelles les données observationnelles sont peu nombreuses ; ce n'est bien entendu pas le cas pour notre Galaxie.

Si l'on se restreint au cas particulier d'étoiles qui restent près du plan du disque galactique, on peut avoir une idée approchée de I_3 , en appliquant un procédé connu sous le nom d'approximation de Oort-Lindblad (1933). En effet, dans le voisinage du Soleil, à condition de ne pas s'élever trop au-dessus du plan galactique, on peut toujours développer le potentiel galactique et séparer (en éliminant les termes d'ordre élevé) en une partie radiale et une partie azimuthale :

$$U(r, z) \simeq \phi_1(r) + \phi_2(z) \quad . \quad (9.6)$$

Les mouvements plans et transverses peuvent donc dans ce cas être découplés, et les énergies associées se conservent séparément. Il existe donc bien une troisième intégrale :

$$I_3 = \frac{1}{2} v_z^2 + \phi_2(z) \quad . \quad (9.7)$$

Le potentiel (9.6) représente bien les étoiles à faible vitesse par rapport au Soleil. On a dans ce cas

$$\Psi = \Psi \left(\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2), rv_\theta, \frac{1}{2}v_z^2 + \phi_2(z) \right) \quad . \quad (9.8)$$

Il faut cependant garder à l'esprit que ceci ne constitue qu'une *approximation* qui cesse d'être valable dès qu'on s'élève significativement au-dessus du plan galactique. Dans le cadre de l'approximation de Oort-Lindblad, on doit s'attendre à trouver $\langle v_r v_z \rangle = 0$ partout. Observationnellement, ceci n'est plus vérifié pour les étoiles à grande vitesse dans le voisinage solaire (celles qui vont s'élever au-dessus du plan galactique). Le problème avec le cas général est qu'il n'existe aucune loi physique permettant de donner une forme analytique simple pour I_3 , à moins de se donner des modèles *ad hoc* de potentiel (voir plus bas).

9.2 La rotation différentielle de la Galaxie

Il est bien difficile de déterminer la structure à grande échelle de notre Galaxie en raison, entre autres, de l'extinction interstellaire due aux poussières. Les mouvements des étoiles proches du Soleil sont eux bien observés. Il est par contre impossible d'observer des mouvements individuels d'étoiles dans des galaxies extérieures, tandis que leur structure à grande échelle est aisément déterminée. On peut donc considérer que les études simultanées de notre Galaxie et des galaxies extérieures sont en quelque sorte complémentaires.

9.2.1 Aspect historique

Rappelons brièvement quelques étapes historiques. En 1918, Shapley trouvait que le centre du sous-système formé par les amas globulaires était à 15 kpc dans la direction du Sagittaire, prouvant par là-même que le Soleil n'était pas au centre de la Galaxie. Les déterminations modernes donnent plutôt une valeur de 8.7 kpc.

En 1926, Lindblad découvrait que la Galaxie est formée de plusieurs sous-systèmes stellaires ayant des caractéristiques morphologiques et cinématiques distinctes. Il est maintenant connu que la métallicité (et donc l'âge) est fortement corrélée à ces sous-systèmes, initialement classés selon des critères purement cinématiques. C'est cette corrélation entre propriétés chimiques et cinématiques qui a conduit l'identification des populations stellaires (Pop I et Pop II).

Lindblad trouvait que le Soleil tourne sur une orbite circulaire avec une vitesse de 300 km s^{-1} environ, et que la dispersion des vitesses au voisinage du Soleil est de l'ordre de 30 km s^{-1} . Il montrait que les étoiles à faible vitesse ont la même énergie de mouvement que le Soleil et se déplacent aussi sur des orbites quasi-circulaires autour du centre de la Galaxie.

En 1927–1928, Oort faisait une théorie cinématique complète de la rotation de la Galaxie. Il a relié la théorie et les observations. Il a observé que les étoiles à grande vitesse tournent plus lentement que le Soleil par rapport au centre galactique, et en concluait qu'elles se déplaçaient sur des orbites excentriques. Remarquant qu'on observe aucune étoile dont la vitesse par rapport au Soleil est supérieure à 63 km s^{-1} dans la direction de la rotation galactique, Oort émit l'idée que ces étoiles potentielles s'évadaient de la Galaxie. D'une vitesse sur orbite circulaire de $250\text{--}200 \text{ km s}^{-1}$, il déduisait une vitesse d'évasion de l'ordre de $310\text{--}360 \text{ km s}^{-1}$. Dans le cas particulier d'un potentiel Képlérien (rotation d'une particule autour d'un centre massif ponctuel), on a

$$\frac{v_{\text{ev}}}{v_{\text{circ}}} = \sqrt{2} \simeq 1.414 \quad . \quad (9.9)$$

La mesure de Oort montrait pour la Galaxie un rapport de l'ordre de 1.2. Il en concluait que le potentiel de la Galaxie devait être significativement non-Képlérien. La Galaxie ne contenait pas

seulement un corps central massif, mais une partie notable de la masse était distribuée dans toute la Galaxie. Il en déduisait l'image suivante : un corps massif auquel s'ajoute un ellipsoïde moins massif, de rapport d'axes 1/2 avec le Soleil au bord.

9.2.2 Cinématique du voisinage Solaire

TABLE 9.1: *Caractéristiques rotationnelles du Soleil dans la Galaxie*

Distance au centre galactique :	$r_{\odot} = 8.7 \text{ kpc}$
Vitesse orbitale :	$v_{\odot} = 250 \text{ km s}^{-1}$
Vitesse angulaire :	$\omega_{\odot} = 25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$
Période orbitale :	$T_{\odot} = 2.5 \times 10^8 \text{ ans} \quad (= \frac{2\pi}{\omega_{\odot}})$

La Galaxie est animée d'un mouvement de rotation différentielle. Les paramètres de cette rotation concernant le Soleil sont donnés dans la table 9.1. Ils sont précis à 10% près. La caractéristique principale de la rotation différentielle de la Galaxie est que la vitesse angulaire de rotation diminue lorsqu'on s'éloigne du centre. Ceci se traduit par des mouvements relatifs d'étoiles dans le voisinage Solaire par rapport au Soleil.

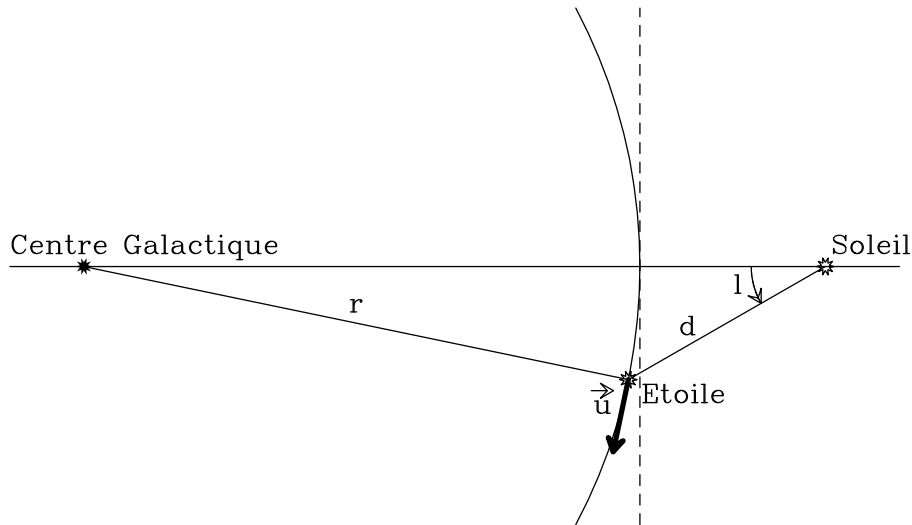


FIGURE 9.2: *Mouvement relatif d'une étoile dans le voisinage Solaire*

Considérons une étoile du voisinage Solaire, située à une distance r du centre galactique, légèrement différente de r_{\odot} (Fig. 9.2) Au premier ordre, sa vitesse angulaire ω vérifie

$$\omega - \omega_{\odot} = \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{\odot} (r - r_{\odot}) \quad . \quad (9.10)$$

$\omega - \omega_{\odot}$ est la vitesse angulaire apparente de l'étoile par rapport au Soleil. La vitesse linéaire apparente u se définit quant à elle par

$$u = r(\omega - \omega_{\odot}) \simeq r_{\odot}(\omega - \omega_{\odot}) = r_{\odot} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{\odot} (r - r_{\odot}) \quad . \quad (9.11)$$

Soient d la distance entre l'étoile et le Soleil et l l'angle entre la direction du centre galactique et celle de l'étoile, vue depuis le Soleil (Fig. 9.2). Si on assimile la portion d'orbite circulaire de l'étoile au voisinage du Soleil à une droite perpendiculaire à l'axe Soleil – centre galactique, on a aisément

$$\dot{d} = u \sin l \quad ; \quad (9.12)$$

$$d\dot{l} = u \cos l \quad . \quad (9.13)$$

En utilisant (9.11) et aussi la relation $r - r_{\odot} = -d \cos l$, il vient

$$\dot{d} = -r_{\odot} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{\odot} d \sin l \cos l \quad ; \quad (9.14)$$

$$\dot{l} = -r_{\odot} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{\odot} \cos^2 l \quad . \quad (9.15)$$

Le mouvement angulaire propre de l'étoile sur le fond du ciel vu depuis la Terre est défini par

$$\mu = \dot{l} - \omega_{\odot} \quad . \quad (9.16)$$

On peut remarquer que le mouvement propre est indépendant de la distance d , et que la vitesse radiale \dot{d} est proportionnelle à d . On pose traditionnellement

$$\boxed{\begin{cases} A = -\frac{1}{2}r_{\odot} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{\odot} \\ B = A - \omega_{\odot} \end{cases}} \quad . \quad (9.17)$$

A et B sont appelées les *constantes de Oort*. On en tire les relations

$$\begin{cases} \dot{d} = Ad \sin 2l \\ \mu = A \cos 2l + B \end{cases} \quad . \quad (9.18)$$

\dot{d} est la *vitesse radiale* de l'étoile. Elle se mesure aisément par décalage Doppler ($\Delta\lambda/\lambda = \dot{d}/c$) des raies spectrales du spectre de l'étoile. Le mouvement propre μ se mesure lui aussi. La distance d s'obtient par parallaxe pour les étoiles proches. Quant à l'angle l , il se mesure directement sur le ciel. En d'autres termes, l'application des formules (9.18) permet de mesurer A et B dans le voisinage solaire à partir de l'observation *d'une seule* étoile. Bien sûr, on n'a pas fait intervenir ici la dispersion de vitesse par rapport à la rotation différentielle pure, mais la mesure sur plusieurs étoiles permet de compenser cette approximation. On trouve, à 15–20% près,

$$\begin{cases} A = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\ B = -10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \end{cases} \quad . \quad (9.19)$$

9.2.3 Cinématique à grande échelle d'ordre 0. Courbe de rotation

Les paramètres de Oort permettent de déterminer les caractéristiques de la rotation différentielle (ω_{\odot} et $(d\omega/dr)_{\odot}$) *au voisinage* du Soleil. La détermination de la courbe de rotation (c'est à dire vitesse orbitale en fonction de la distance au centre) est essentiellement faite à partir de l'observation de la raie de HI à 21 cm (voir chapitre 1).

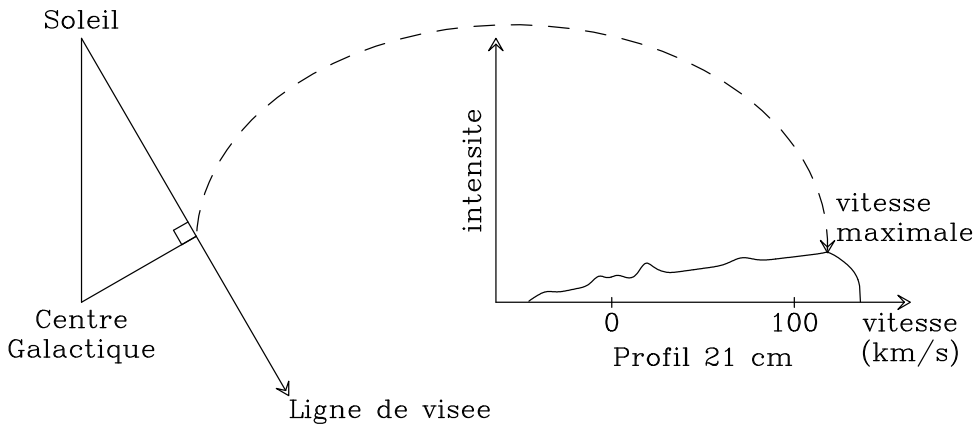


FIGURE 9.3: Mesure de la courbe de rotation de la Galaxie

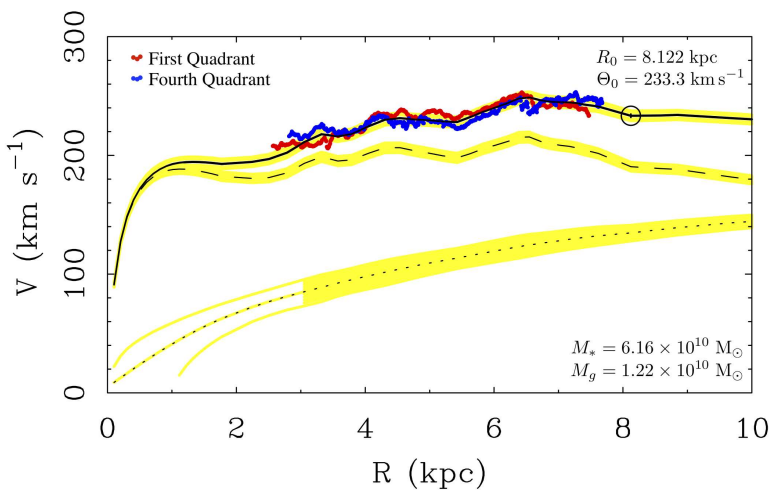


FIGURE 9.4: La courbe de rotation de notre Galaxie (courbe pleine), extraite de McGaugh (2018).

concernant les autres galaxies) qu'il n'y a pas de « retombée Képlérienne » : À grande distance du centre galactique, la dynamique des étoiles devrait se rapprocher de celle d'une masse tournant autour d'un centre massif ponctuel, c'est à dire $v \propto r^{-1/2}$. On ne l'observe *jamais*, ce qui a fait penser que les galaxies contenaient plus de matière que ce qui était vu.

Concernant les autres galaxies, la présence de *barres* au centre de certaines d'entre elles¹ complique les choses. Certaines barres sont en rotation solide (NGC 3351), d'autres non, et on observe parfois un écoulement du gaz le long de la barre, parfois vers l'intérieur (NGC 5383), parfois vers l'extérieur (NGC 4027).

Par ailleurs, dans certaines galaxies (de préférences celles vue de profil) on remarque dans les bulbes et dans les barres des écarts à la rotation circulaire sur des échelles de l'ordre du kiloparsec, liés au gauchissement des disques (lui-même dû à des effets de marée). Notre Galaxie présente elle-même un léger gauchissement, lié probablement à l'effet de marée des nuages de Magellan.

De manière générale, la courbe de rotation de notre Galaxie (Fig. 9.4) est tracée à partir de l'hypothèse que le mouvement est circulaire. Or, il existe de fortes déviations, des mouvements d'expansion et des asymétries.

Théoriquement, la détermination de la courbe de rotation permet de remonter au potentiel $U(r, 0)$ de la Galaxie dans son plan de symétrie. En effet, le champ gravitationnel radial est

1. Une controverse subsiste encore aujourd'hui sur le fait que notre Galaxie soit barrée ou non. . .

$-\partial U/\partial r$, et l'équilibre avec l'accélération centrifuge s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{v^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad U(r, 0) = - \int_r^{+\infty} \frac{v^2(r)}{r} dr \quad . \quad (9.20)$$

Ceci constituera l'ordre 0 de la vision de la dynamique galactique. Le problème vient du fait que la mesure de la courbe de rotation est faite à partir du gaz, et que ce dernier est fortement influencé par le champ magnétique et les effets hydrodynamiques. La déduction du potentiel galactique est donc incertaine.

9.3 Approximation d'ordre 1 : mouvement épicyclique

Nous allons maintenant examiner les légères déviations à une orbite circulaire dans le potentiel galactique. La position d'une étoile dans la Galaxie se repère par ses coordonnées cylindriques r, θ, z . Si l'étoile suit une orbite parfaitement circulaire dans le plan de la Galaxie, on a

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \omega_0 t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \omega(r_0) \quad . \quad (9.21)$$

Supposons maintenant que l'étoile subisse de légères déviations par rapport à cette orbite

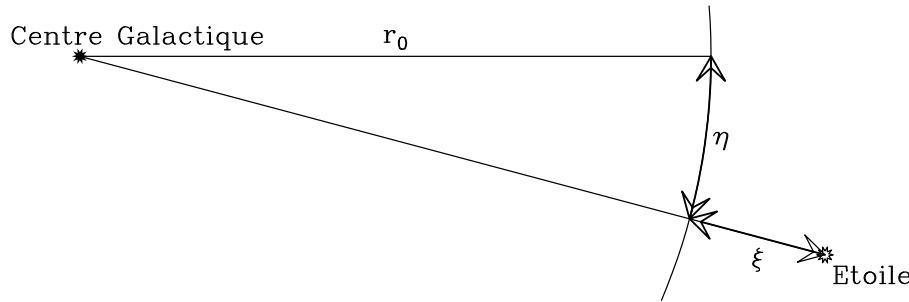


FIGURE 9.5: Légère déviation à l'orbite circulaire

circulaire. Concrètement, posons (Fig. 9.5) :

$$\begin{cases} r = r_0 + \xi \\ \theta = \omega_0 t + \frac{\eta}{r_0} \\ z = z \end{cases} \quad . \quad (9.22)$$

ξ, z et η sont des longueurs. Ce sont des coordonnées dans un système d'axes tournant à la vitesse ω_0 . Ces quantités sont petites par rapport à r_0 :

$$\xi, \eta, z \ll r_0 \quad . \quad (9.23)$$

L'orbite est donc voisine d'une orbite circulaire. On obtient les équations du mouvement en égalant les composantes de l'accélération en coordonnées cylindriques au composantes de l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\ \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad . \quad (9.24)$$

On développe en série de Taylor le second membre au voisinage de $(r_0, 0)$ en ne gardant que les termes du premier ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} - (r_0 + \xi) \left(\omega_0 + \frac{\dot{\eta}}{r_0} \right)^2 = - \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r_0,0} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r_0,0} \times \xi - \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \Big|_{r_0,0} \times z \\ 2\dot{\xi} \left(\omega_0 + \frac{\dot{\eta}}{r_0} \right) + (r_0 + \xi) \frac{\ddot{\eta}}{r_0} = 0 \\ \ddot{z} = - \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{r_0,0} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r} \Big|_{r_0,0} \times \xi - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big|_{r_0,0} \times z \end{array} \right. . \quad (9.25)$$

La symétrie par rapport au plan galactique impose

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{r_0,0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \Big|_{r_0,0} = 0 . \quad (9.26)$$

Par ailleurs, on a [Eq. (9.20)]

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r_0,0} = r_0 \omega_0^2 . \quad (9.27)$$

Dans le membre de gauche du système (9.25), nous allons négliger les termes du second ordre $\xi\dot{\eta}$, $\dot{\xi}\dot{\eta}$... Il reste donc en définitive

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} - 2\omega_0\dot{\eta} - \omega_0^2\xi = - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \cdot \xi \\ \ddot{\eta} + 2\omega_0\dot{\xi} = 0 \\ \ddot{z} = - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot z \end{array} \right. . \quad (9.28)$$

Dans ce système, nous avons omis les indices $(r_0, 0)$ pour les dérivées partielles, étant entendu qu'implicitement, toutes les dérivées du potentiel sont prises en ce point. On peut remarquer que le système (9.28) est séparable : la troisième équation est indépendante des deux autres. Ceci montre bien ce que nous avons dit plus haut sur la séparation du mouvement vertical (en z) par rapport au reste [Eq. (9.6)]. On peut donc s'attendre à trouver une troisième intégrale isolante.

L'équation en z s'intègre immédiatement, en remarquant que $\partial^2 U / \partial z^2 > 0$ au point $r_0, 0$ (le long de l'axe des z , la densité est maximale dans le plan galactique, donc le potentiel le long de l'axe présente un minimum en ce point) :

$$z = z_0 \cos \omega_z (t - t_2) , \quad (9.29)$$

où z_0 et t_2 sont des constantes d'intégration, et où ω_z vérifie

$$\boxed{\omega_z^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big|_{r_0,0}} . \quad (9.30)$$

Le mouvement en z est donc sinusoïdal. Il existe une force de rappel vers le plan galactique proportionnelle à la distance au plan.

L'intégration de la deuxième équation de (9.28) est également immédiate et donne

$$\dot{\eta} + 2\omega_0\xi = a , \quad (9.31)$$

où a est une nouvelle constante d'intégration. En reportant dans la première équation de (9.28), on obtient une équation pour ξ seul :

$$\ddot{\xi} = - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 3\omega_0^2 \right) \xi + 2\omega_0 a \quad . \quad (9.32)$$

La figure 9.4 a montré que la vitesse linéaire décroissait “moins vite” qu’une vitesse de type Képlérien ($\propto r^{-1/2}$). Ceci peut se traduire dans le plan de la galaxie par

$$\frac{\partial v}{\partial r} > -\frac{1}{2} \frac{v}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r \frac{\partial U}{\partial r}} \right) > -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}} \quad . \quad (9.33)$$

Ceci peut encore s'écrire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial U}{\partial r} > \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \omega_0^2 > 0 \quad . \quad (9.34)$$

Par conséquent le terme entre parenthèses dans l'équation (9.32) est positif, et on peut poser

$$\boxed{\kappa_0^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r_{0,0}} + \frac{3}{r_0} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r_{0,0}} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r_{0,0}} + 3\omega_0^2 = r_0 \frac{\partial(\omega_0^2)}{\partial r} \Big|_{r_{0,0}} + 4\omega_0^2} \quad . \quad (9.35)$$

κ_0 est la *fréquence épicyclique*. Les équations (9.32) et (9.31) s'intègrent alors en

$$\xi = \frac{2\omega_0 a}{\kappa_0^2} + c \cos \kappa_0 (t - t_0) \quad ; \quad (9.36)$$

$$\eta = a \left(1 - \frac{4\omega_0^2}{\kappa_0^2} \right) (t - t_1) - \frac{2\omega_0 c}{\kappa_0} \sin \kappa_0 (t - t_0) \quad , \quad (9.37)$$

où t_0, t_1 et c sont de nouvelles constantes d'intégration.

La fréquence épicyclique peut être reliée aux constantes de Oort définies par les équations (9.17). En effet, il vient

$$\frac{\partial U}{\partial r} = r_0 \omega_0^2 \quad ; \quad (9.38)$$

$$\implies \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \omega_0^2 + 2r_0 \omega_0 \frac{d\omega_0}{dr} \quad ; \quad (9.39)$$

$$\implies \kappa_0^2 = 4\omega_0^2 - 4\omega_0 A = -4\omega_0 B \quad . \quad (9.40)$$

Au voisinage du Soleil, on trouve donc

$$\kappa_0 \simeq 32 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad . \quad (9.41)$$

Examinons quelques cas particuliers :

1. $a = 0$. On trouve un mouvement elliptique en ξ et η à la vitesse angulaire κ_0 (Fig. 9.6). Le rapport des axes est $2\omega_0/\kappa_0$, et la direction de rotation est opposée à celle de la Galaxie. Au voisinage du Soleil, le rapport des axes est de 50/32.
2. $c = 0$. Alors $\xi = \text{cte}$ et η croît uniformément. Le mouvement est circulaire par rapport au centre galactique. Si $a > 0$, le mouvement a lieu en sens inverse de la rotation galactique.
3. En général, a et c sont différents de 0. Le mouvement est la composition d'un mouvement épicycloïdal en ξ et η , et d'un mouvement oscillatoire en z .

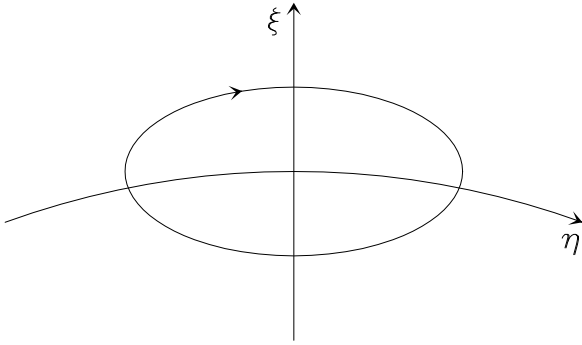
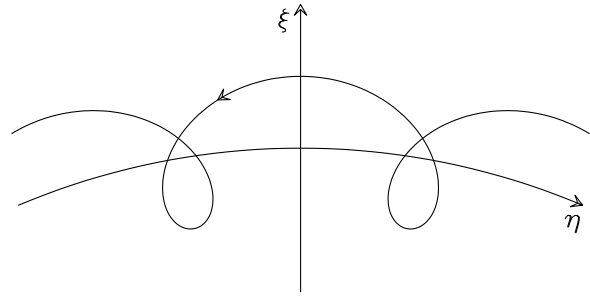
FIGURE 9.6: Mouvement elliptique en ξ et η 

FIGURE 9.7: Mouvement epicycloïdal dans le plan galactique

Vue du Soleil, la forme du mouvement d'une étoile ressemble à la figure 9.7. Le mouvement apparent en ξ et η est dû à l'emploi d'un système de coordonnées mobiles. Dans un système fixe, on n'aurait pas un mouvement épicycloïdal, mais une courbe en rosette. Le mouvement circulaire épicycloïdal est la manifestation de la rotation différentielle de la Galaxie : ξ oscille entre $2\omega_0 r / \kappa_0^2 + c$ et $2\omega_0 r / \kappa_0^2 - c$. Si $a > 0$, ξ est en moyenne positif, c'est à dire qu'en moyenne l'étoile est plus éloignée du centre galactique que le Soleil, elle tourne donc moins vite et a donc un mouvement apparent rétrograde. En fait, on peut toujours se ramener au cas $a = 0$. En effet, il suffit de changer le rayon de référence r_0 de manière à annuler a .

En résumé, dans un repère fixe, l'orbite est la superposition de trois mouvements :

1. une rotation par rapport au centre galactique à la vitesse angulaire ω_0 ;
2. un mouvement épicyclique de sens opposé dans le plan de rotation à la vitesse angulaire κ_0 ;
3. des oscillations perpendiculaires au plan à la pulsation ω_z .

Près du Soleil, ces fréquences valent

$$\begin{cases} \omega_0 = 25 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\ \kappa_0 = 32 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \\ \omega_z = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \end{cases} . \quad (9.42)$$

En général, ces trois fréquences ne sont pas commensurables, et dans le plan horizontal et vertical, l'orbite remplit entièrement un volume représenté sur la figure 9.8.

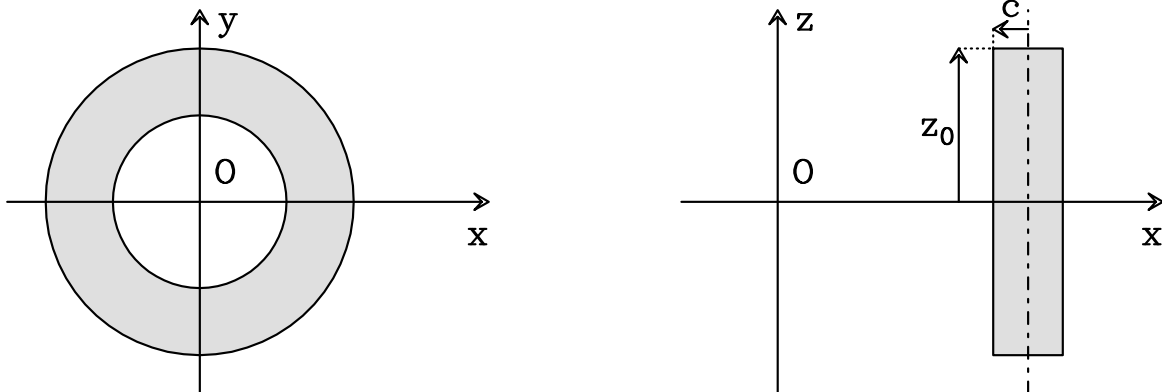


FIGURE 9.8: Volume de l'orbite d'une étoile

Il y a donc dans le cas général deux intégrales non isolantes et trois intégrales isolantes,

correspondant aux trois constantes d'intégration non-temporelles :

$$\begin{cases} a = 2\omega_0\xi + \dot{\eta} \\ c^2 = \left[\left(1 - \frac{4\omega_0^2}{\kappa_0^2}\right)\xi - \frac{2\omega_0}{\kappa_0}\dot{\eta} \right]^2 + \frac{\xi^2}{\kappa_0^2} \\ z_0^2 = z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega_z^2} \end{cases} . \quad (9.43)$$

Le mouvement des étoiles dans le voisinage du Soleil est donc décrit par une fonction de distribution $\Psi(\bar{r}, c^2, z_0^2)$, où on a pris au lieu de a la rayon moyen \bar{r} , qui vérifie

$$\bar{r} = r_0 + \frac{2\omega_0 a}{\kappa_0^2} . \quad (9.44)$$

c^2 et z_0^2 sont les amplitudes des oscillations radiales et verticales.

Un cas particulier de ce formalisme est à mentionner : le potentiel Képlérien pur, créé par une masse centrale M . Dans ce cas, on a $U = -GM/\sqrt{(r^2 + z^2)}$, et on peut vérifier par simple application des formules (9.30) et (9.35), que

$$\omega_z = \kappa_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} . \quad (9.45)$$

Ainsi, dans ce cas très particulier, les trois fréquences sont égales. Ceci se comprend bien intuitivement, car dans le cas d'un potentiel Képlérien, la solution est donnée par les lois de Kepler classiques, les orbites étant des ellipses. Par conséquent, les déviations à l'orbite circulaire ont forcément la périodicité de l'orbite elle-même, ce que traduit l'équation (9.45). On peut également remarquer que le potentiel Képlérien correspond exactement au cas d'égalité dans l'inéquation (9.34), ce qui signifie $\kappa_0 = \omega_0$.

Ceci nous montre bien que la non-commensurabilité des trois fréquences est exactement une conséquence du caractère non-képlérien du potentiel galactique. Dans le cas d'un potentiel Képlérien, toutes les intégrales sont isolantes, l'orbite emplit un volume de dimension 1 ($= 6 - 5$), elle est donc périodique. Dans le potentiel galactique, il y a deux intégrales non-isolantes, et donc l'orbite emplit un volume de dimension 3, ce que traduit exactement la figure 9.8.

Mentionnons deux autres cas particuliers :

- La rotation solide $\omega_0 = \text{cte } \forall r$. Ceci impose $\partial\omega_0^2/\partial r = 0$ et donc $\kappa_0 = 2\omega_0$;
- La rotation plate $v = r_0\omega_0 = \text{cte}$. On a donc $\omega_0^2 \propto 1/r_0^2$ et par suite $\kappa_0 = \sqrt{2}\omega_0$.

Nous avons déjà vu que la courbe de rotation des galaxies en général décroissait moins vite qu'une courbe de rotation Képlérienne, ce qui imposait $\kappa_0 > \omega_0$. Intuitivement on imaginera aisément que la galaxie ne peut pas tourner dans ses parties externes *plus vite* qu'à l'intérieur. La rotation rigide constitue donc une sorte de limite supérieure. En définitive, nous aurons toujours

$$\omega_0 \leq \kappa_0 \leq 2\omega_0 . \quad (9.46)$$

On pourrait croire que le mouvement des étoiles au voisinage du Soleil est entièrement déterminé par le mouvement épicyclique, et qu'il suffit de remonter dans le passé pour retrouver l'endroit où les étoiles se sont formées. En fait, ceci n'est possible que pour les étoiles dont l'âge n'excède pas quelques millions d'années (voir chapitre 2). Sous l'effet des rencontres, l'étoile finit par quitter l'orbite théorique, dans un temps de l'ordre du temps de relaxation. Les orbites *diffusent*. Après une ou deux rotations autour du centre galactique, la diffusion est telle que ça n'a

plus aucun sens de remonter dans le passé. En raison des fluctuations locales du champ gravitationnel, on observe une augmentation de la dispersion des vitesses des étoiles avec l'âge. Une étoile du disque subit des variations aléatoires de vitesse de l'ordre de 10 km s^{-1} par révolution galactique. La diffusion en position est de l'ordre de 1.5 kpc après 2×10^8 ans. Ce phénomène a un certain nombre de conséquences :

- Il est illusoire de calculer, en arrière dans le temps, les orbites stellaires et de déterminer l'endroit de naissance d'une étoile.
- La dissolution des groupes d'étoiles est accélérée par ce mécanisme en raison de l'augmentation de la dispersion des vitesses internes du groupe.
- L'existence de la diffusion a des conséquences importantes sur l'existence des intégrales du mouvement et la validité de l'équation de Boltzmann-Liouville.

9.4 Modèles de potentiels galactiques et détermination des masses

Les modèles de galaxies permettent de calculer la masse totale, les orbites des étoiles et d'estimer la vitesse circulaire pour $r > r_{\odot}$. Ils sont également censés pouvoir décrire les mouvements des étoiles en dehors du voisinage du plan galactique.

On peut soit imposer une forme de potentiel, soit imposer une distribution de masse. Pour la deuxième méthode, un des modèles les plus utilisés pour notre Galaxie a été conçu par Schmidt. Il comprend trois composantes :

- une masse centrale ponctuelle de $0.07 \times 10^{11} M_{\odot}$;
- un corps sphérique inhomogène et plat à l'intérieur de l'orbite du Soleil de masse $0.82 \times 10^{11} M_{\odot}$;
- une enveloppe extérieure de masse volumique ρ , proportionnelle à r^{-4} et de masse $0.33 \times 10^{11} M_{\odot}$.

9.4.1 Modèles en coordonnées cylindriques

Aujourd'hui on cherche plutôt à imposer une forme donnée de potentiel et à en déduire le reste. En général, on cherche des modèles qui possèdent une retombée Képlérienne $U(r, 0) \propto 1/r$ pour r tendant vers l'infini et garantissant une masse totale finie M . Lorsque c'est possible, on cherche aussi des modèles où il est possible d'identifier explicitement une troisième intégrale I_3 . Un certain nombre de modèles classiques et plus ou moins simples ont été proposés dans le passé. Citons par exemple

Le disque de Kuzmin : On considère le potentiel

$$U(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + (a + |z|)^2}} \quad , \quad (9.47)$$

où a est un paramètre positif. Pour $z > 0$, il correspond au potentiel généré par une masse ponctuelle située en $(r = 0, z = -a)$. Il vérifie donc naturellement $\Delta U = 0$ pour $z > 0$, et symétriquement pour $z < 0$. Il s'agit donc d'un modèle de potentiel où la densité est nulle en dehors du plan $z = 0$. Par application du théorème de Gauss sur un petit cylindre droit situé de part et d'autre du plan galactique, on trouve la densité surfacique de masse dans le plan :

$$\sigma(r) = \frac{Ma}{2\pi (r^2 + a^2)^{3/2}} \quad . \quad (9.48)$$

Le potentiel de Miyamoto-Nagai : On considère des familles de potentiels de la forme

$$U(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + \left(a + \sqrt{z^2 + b^2}\right)^2}} \quad . \quad (9.49)$$

Cette fois, la masse n'est pas cantonnée dans le plan $z = 0$. Par application de l'équation de Poisson en coordonnées cylindriques, on trouve la densité correspondante

$$\rho(r, z) = \frac{Mb^2}{4\pi} \frac{ar^2 + \left(a + 3\sqrt{z^2 + b^2}\right) \left(a + \sqrt{z^2 + b^2}\right)^2}{\left[r^2 + \left(a + \sqrt{z^2 + b^2}\right)^2\right]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}} \quad . \quad (9.50)$$

Il est intéressant de noter que pour $a = 0$ on retrouve le modèle à symétrie sphérique de Plummer, alors que pour $b = 0$ on retrouve de disque de Kuzmin. Lorsque $b/a \simeq 0.2$, les contours d'égalité de densité s'accordent qualitativement à la distribution de lumière dans une galaxie spirale. Quantitativement, l'accord est moins bon car dans le modèle considéré on a $\rho(r, 0) \propto r^{-3}$ pour r grand, alors que dans une galaxie spirale la décroissance est plutôt exponentielle.

Potentiel logarithmique : Ce potentiel est introduit dans le but explicite de générer une courbe de rotation plate, soit

$$U(r, z) = \frac{1}{2}v_0^2 \left(r_c^2 + r^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) \quad \text{avec} \quad 0 < q \leq 1 \quad , \quad (9.51)$$

r_c , v_0 et q étant des constantes. On calcule la vitesse circulaire :

$$v_c = \frac{rv_0}{\sqrt{r_c^2 + r^2}} \quad . \quad (9.52)$$

On voit bien que pour $r \gg r_c$, on a $v_c \simeq v_0$. La densité correspondante s'obtient là encore par l'équation de Poisson, soit

$$\rho(r, z) = \frac{v_0^2}{4\pi Gq^2} \frac{(2q^2 + 1)r_c^2 + r^2 + (2 - 1/q^2)z^2}{(r_c^2 + r^2 + z^2/q^2)^2} \quad . \quad (9.53)$$

On doit prendre $q \geq \sqrt{2}/2 \approx 0.7$ si on veut éviter que la densité devienne négative pour les grandes valeurs de z .

9.4.2 Potentiels de Stäckel et modèles en coordonnées sphéroïales

Les modèles modernes de potentiels galactiques reposent sur des décompositions en *potentiels de Stäckel*. Ces potentiels se définissent dans un jeu de coordonnées particulières appelées *sphéroïdales* ou *confocales elliptiques* que nous introduisons ici. Se fixant deux réels c et a (positifs) avec $a > c$, on passe du système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) aux coordonnées sphéroïales (λ, θ, ν) par la transformation suivante définissant λ et ν :

$$r^2 = \frac{(\lambda - a^2)(\nu - a^2)}{c^2 - a^2} \quad \text{et} \quad z^2 = \frac{(\lambda - c^2)(\nu - c^2)}{a^2 - c^2} \quad . \quad (9.54)$$

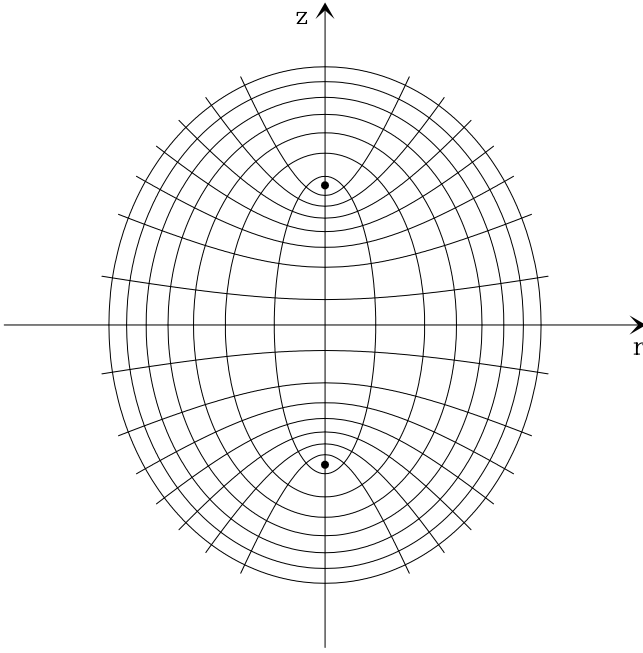


FIGURE 9.9: Coordonnées sphéroïdales dans le plan (r, z) . Les ellipses sont les courbes $\lambda = \text{cte}$, $\lambda = a^2$ correspondant à un segment de l'axe Oz . Les hyperboles sont les courbes $\nu = \text{cte}$, $\nu = c^2$ correspondant à l'axe Or et $\nu = a^2$ à l'axe Oz . Toutes ces coniques ont les mêmes foyers représentés par deux points gras. Ils correspondent à $z = \Delta = \sqrt{a^2 - c^2}$. Le centre correspond à $(\lambda = a^2, \nu = c^2)$.

Les coordonnées (λ, ν) doivent en outre vérifier $c^2 \leq \nu \leq a^2 \leq \lambda$. On remarquera qu'on a gardé l'angle polaire θ . c et a ont les dimensions d'une longueur, λ et ν celles d'une surface. Les constantes a et c sont parfois aussi introduites via

$$\alpha = -a^2 \quad \text{et} \quad \gamma = -c^2 \quad . \quad (9.55)$$

La figure 9.9 illustre ce jeu de coordonnées. Dans la pratique, il faut savoir que a^2 et c^2 sont définis à une constante près : Rajoutez la même constante à ces deux paramètres, si vous retranchez la même constante à λ et μ , et vous ne changez rien à la géométrie. Par contre la quantité $\Delta = \sqrt{c^2 - a^2}$ est un paramètre important. Pour $\Delta \rightarrow 0$, le jeu de coordonnées (λ, θ, ν) devient sphérique, pour $\Delta \rightarrow +\infty$, il devient cylindrique.

On peut aussi remarquer (et c'est une autre manière de les introduire) que les nouvelles coordonnées λ et ν sont les deux racines de l'équation du second degré en τ :

$$\frac{r^2}{\tau - a^2} + \frac{z^2}{\tau - c^2} = 1 \quad , \quad (9.56)$$

avec pour convention que $\lambda \geq \nu$.

Si on se place dans une géométrie axisymétrique, la densité et le potentiel seront uniquement fonction de r et z dans un système de coordonnées cylindriques. Dans un système de coordonnées sphéroïdales, ces quantités dépendront de λ et ν . Un potentiel de Stäckel sera un potentiel de ce type, défini en coordonnées sphéroïdales, qui peut se séparer sous la forme

$$U(\lambda, \nu) = \frac{(\nu - c^2)\mathcal{F}(\nu) - (\lambda - c^2)\mathcal{F}(\lambda)}{\lambda - \nu} \quad , \quad (9.57)$$

où \mathcal{F} est une fonction quelconque d'une variable réelle. La seule contrainte pour un modèle réaliste de galaxie est que la masse soit finie, donc que $U \rightarrow 0$ à l'infini avec une retombée Képlérienne. Il est à noter que ces potentiels sont parfois introduits sous la forme

$$U(\lambda, \nu) = \frac{f(\nu) - f(\lambda)}{\lambda - \nu} \quad (9.58)$$

où f est une fonction quelconque. Les deux formes sont bien entendu équivalentes en posant $f(x) = (x - c^2)\mathcal{F}(x)$. L'intérêt de la définition (9.57) réside dans le fait que la contrainte de retombée Képlérienne s'exprime simplement sous la forme $\mathcal{F}(x) \sim GM/\sqrt{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

La distribution de masse $\rho(\lambda, \nu)$ correspondante s'obtient au moyen de l'équation de Poisson. La difficulté consiste bien sûr à exprimer le Laplacien en coordonnées sphéroïdales. On consultera l'annexe C pour plus de détails. Au bout du compte, on aboutit à l'équation

$$\begin{aligned} -\pi G(\nu - \lambda)\rho(\lambda, \nu) = & (\lambda - a^2)(\lambda - c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} + \left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}a^2 - c^2\right)\frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ & -(\nu - a^2)(\nu - c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} - \left(\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}a^2 - c^2\right)\frac{\partial U}{\partial \nu} \quad . \quad (9.59) \end{aligned}$$

Les distributions obtenues ont typiquement des structures d'ellipsoïdes emboîtés (variables suivant la forme de \mathcal{F}), où la densité est constante sur un ellipsoïde de révolution allongé dans le plan galactique, et où la densité décroît en s'éloignant du centre (Fig. 9.10). Les potentiels

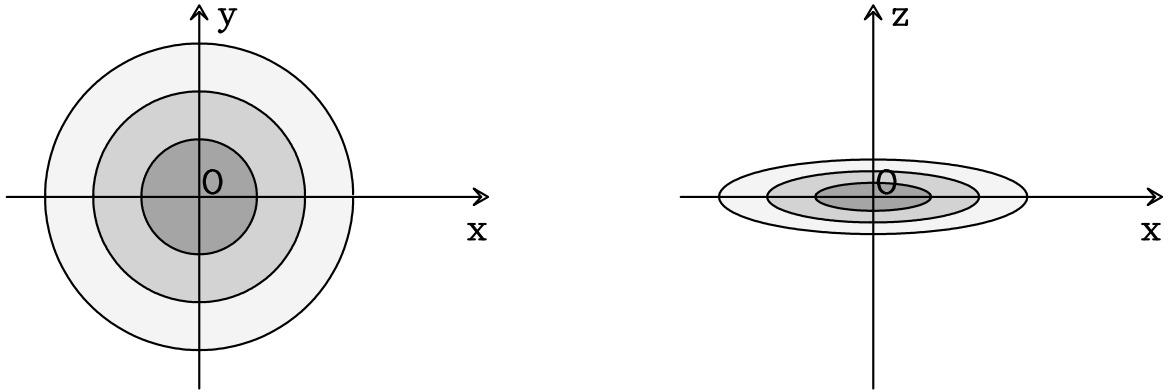


FIGURE 9.10: Distribution d'ellipsoïdes emboîtés

introduits étant axisymétriques, ils possèdent immédiatement les deux intégrales premières (9.2) communes à tous ces potentiels, et ce quelle que soit la forme de la fonction \mathcal{F} . Une application de la méthode d'Hamilton-Jacobi (voir annexe D) permet ensuite de montrer que les potentiels de Stäckel possèdent tous une autre intégrale isolante I_3 qui peut se mettre sous la forme

$$I_3 = \frac{1}{2}(L_x^2 + L_y^2) + (a^2 - c^2) \left(\frac{1}{2}v_z^2 - z^2 \frac{\mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}(\nu)}{\lambda - \nu} \right) \quad , \quad (9.60)$$

ce qui fait bien sûr l'intérêt de ces modèles. On peut vérifier que pour des mouvements proches du plan (z petit), cette intégrale revient bien à l'énergie mécanique verticale. A partir de là, on peut réduire d'un ordre les équations du mouvement en les mettant sous la forme

$$p_\lambda^2 = \frac{1}{2(c^2 + a^2)} \left[-E + \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{\lambda - a^2} + \frac{I_3}{\lambda - c^2} - \mathcal{F}(\lambda) \right] \quad ; \quad (9.61)$$

$$p_\theta = L_z \quad ; \quad (9.62)$$

$$p_\nu^2 = \frac{1}{2(c^2 + a^2)} \left[-E + \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{\nu - a^2} + \frac{I_3}{\nu - c^2} - \mathcal{F}(\nu) \right] \quad , \quad (9.63)$$

$$(9.64)$$

où p_λ, p_θ et p_ν sont les moments conjugués des variables (λ, θ, ν) (voir annexe D).

Du fait que p_ν^2 et p_λ^2 doivent rester positifs, le mouvement dans le plan méridional (λ, ν) est restreint à certaines zones caractérisées par

$$c^2 \leq \nu \leq \nu_0 < a^2 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \quad , \quad (9.65)$$

les bornes ν_0 , λ_1 et λ_2 étant les trois racines en τ de l'équation

$$-E + \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{\tau - a^2} + \frac{I_3}{\tau - c^2} - \mathcal{F}(\tau) = 0 \quad (9.66)$$

Le potentiel de la Galaxie se modélise assez bien dans le voisinage Solaire au moyen d'un potentiel de Stäckel. Le potentiel galactique global n'est certainement pas rigoureusement un potentiel de Stäckel, mais n'en reste probablement pas très éloigné. La géométrie locale de ce potentiel dans le voisinage Solaire a pu récemment être contrainte, à partir de statistiques sur les mouvements des étoiles remesurés par le satellite Hipparcos. On aboutit à la contrainte

$$\Delta = 5.7 \pm 1.4 \text{ kpc} \quad . \quad (9.67)$$

Présentée comme cela, cette valeur ne semble pas signifier grand chose. En fait, compte tenu de la distance r_\odot du Soleil au centre galactique, on peut montrer que cette mesure est incompatible avec une distribution de masse très aplatie (dans ce cas, on devrait avoir $\Delta \simeq r_\odot$), et que de ce fait une fraction non négligeable de la masse de la Galaxie se situe hors du plan galactique, contrairement à ce que la simple observation des étoiles laisserait supposer, même en y ajoutant les amas globulaires. Ce résultat récent (Bienaymé 1999) plaide donc en faveur d'un halo sphérique relativement massif entourant la Galaxie.

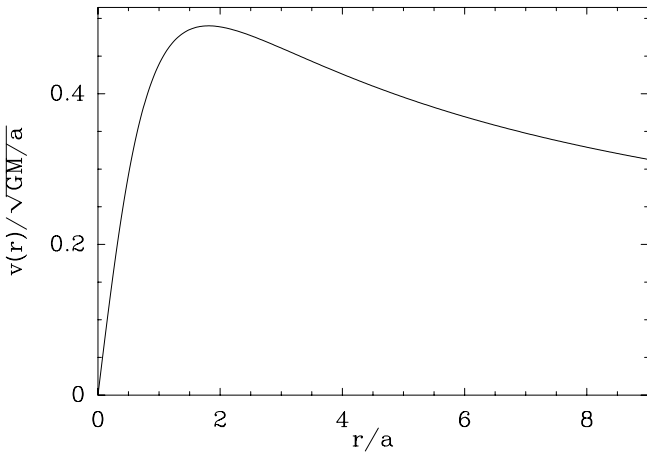


FIGURE 9.11: Courbe de rotation correspondant à un potentiel de Kuzmin-Kutuzov, pour $c/a = 0.5$. Pour d'autres rapports c/a , l'allure des courbes est très similaire.

A titre illustratif, nous décrivons ici un des plus simples potentiels de Stäckel qui soient réalistes, à savoir le modèle de Kuzmin-Kutuzov, caractérisé par

$$\mathcal{F}(x) = \frac{GM}{c + \sqrt{x}} \quad , \quad (9.68)$$

où M est la masse totale de la Galaxie. On obtient dans ce cas, en application directe des formules données ci-dessus :

$$U(\lambda, \nu) = -\frac{GM}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\nu}} \quad ; \quad (9.69)$$

$$\rho(\lambda, \nu) = \frac{Mc^2 \lambda \nu + a^2(\lambda + 3\sqrt{\lambda\nu} + \nu)}{4\pi (\lambda\nu)^{3/2} (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\nu})^3} \quad (9.70)$$

Si on se place dans le plan galactique ($z = 0$, c'est à dire $\nu = c^2$), et si on repasse en coordonnées cylindriques, on obtient

$$U(r, 0) = -\frac{GM}{c + \sqrt{a^2 + r^2}} \quad , \quad (9.71)$$

ce qui montre que le potentiel a bien la bonne dépendance à l'infini. En outre, on voit que a sera la distance typique au-delà de laquelle le potentiel commencera à ressembler à un potentiel Képlérien.

Le calcul de la courbe de rotation s'en déduit simplement à partir de (9.20). Le résultat est illustré sur la figure 9.11, à comparer avec les courbes réelles de galaxies.

9.4.3 Extension aux galaxies elliptiques triaxiales

Le formalisme des potentiels de Stäckel s'étend naturellement à la description des galaxies elliptiques triaxiales (de Zeeuw 1985). Dans ce cas, la géométrie n'étant plus axisymétrique, la coordonnée θ ne peut pas être gardée. Les trois coordonnées (r, θ, z) sont alors remplacées par des nouvelles (λ, μ, ν) définies comme (dans l'ordre décroissant) les trois racines en τ de l'équation

$$\frac{x^2}{\tau - a^2} + \frac{y^2}{\tau - b^2} + \frac{z^2}{\tau - c^2} \quad , \quad (9.72)$$

où a , b et c sont des constantes. L'ensemble satisfait les inégalités

$$c^2 \leq \nu \leq b^2 \leq \mu \leq a^2 \leq \lambda \quad . \quad (9.73)$$

Là encore, on présente parfois ces modèles à l'aide de $\alpha = -a^2$, $\beta = -b^2$ et $\gamma = -c^2$. On a alors les relations

$$x^2 = \frac{(\lambda - a^2)(\mu - a^2)(\nu - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \quad ; \quad (9.74)$$

$$y^2 = \frac{(\lambda - b^2)(\mu - b^2)(\nu - b^2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \quad ; \quad (9.75)$$

$$z^2 = \frac{(\lambda - c^2)(\mu - c^2)(\nu - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \quad . \quad (9.76)$$

Les surfaces $\lambda = \text{cte}$ sont des ellipsoïdes triaxiaux qui tendent à devenir des sphères de rayon $\sqrt{\lambda - a^2}$ pour λ grand. Les surfaces $\mu = \text{cte}$ sont des hyperboloïdes à une nappes centrés autour de l'axe OX . Les surfaces $\nu = \text{cte}$ sont des hyperboloïdes à deux nappes centrés autour de l'axe OZ .

Dans ces conditions, un potentiel de Stäckel triaxal sera de la forme

$$U(\lambda, \mu, \nu) = \frac{(\lambda - a^2)(\lambda - c^2)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \mathcal{F}(\lambda) + \frac{(\mu - a^2)(\mu - c^2)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)} \mathcal{F}(\mu) + \frac{(\nu - a^2)(\nu - c^2)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \mathcal{F}(\nu) \quad , \quad (9.77)$$

où \mathcal{F} est une fonction arbitraire qui doit vérifier les mêmes propriétés à l'infini qu'auparavant.

Ensuite, la densité se déduit là aussi par l'équation de Poisson, qui s'écrit dans ce système de coordonnées

$$\begin{aligned} 2\pi G\rho(\lambda, \mu, \nu) &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\phi(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\phi(\mu)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)} + \frac{\partial U}{\partial \nu} \frac{\phi(\nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \\ &+ 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} \frac{\psi(\mu)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} \frac{\psi(\nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \end{aligned} \quad (9.78)$$

avec

$$\phi(\tau) = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)\tau + 3\tau^2 \quad \text{et} \quad \psi(\tau) = (\tau - a^2)(\tau - b^2)(\tau - c^2) \quad . \quad (9.79)$$

Les surfaces $\rho(\lambda, \mu, \nu) = \text{cte}$ correspondent alors à des ellipsoïdes triaxiaux.

La géométrie du potentiel n'étant plus axiymétrique, la composante verticale du moment cinétique L_z n'est plus conservée. Nous n'avons donc plus pour l'instant que l'intégrale première de l'énergie $I_1 = E$. Néanmoins, une nouvelle application de la méthode d'Hamilton-Jacobi

permet de dégager deux autres intégrales que nous nommerons I_2 et I_3 , et qui peuvent après manipulation algébrique s'exprimer sous la forme

$$I_2 = \frac{1}{2}L_z^2 + \frac{1}{2}L_y^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} + (b^2 - a^2) \left[\frac{1}{2}v_x^2 + x^2 \left(\frac{(\mu - b^2)\mathcal{F}(\mu)}{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)} + \frac{(\lambda + b^2)\mathcal{F}(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + \frac{(\nu - b^2)\mathcal{F}(\nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \right) \right] \quad (9.80)$$

$$I_3 = \frac{1}{2}L_x^2 + \frac{1}{2}Ly^2 \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2} + (b^2 - c^2) \left[\frac{1}{2}v_z^2 + z^2 \left(\frac{(\mu - a^2)(\mu - b^2)\mathcal{F}(\mu)}{(\mu - c^2)(\mu - \lambda)(\mu - \nu)} + \frac{(\lambda - b^2)(\lambda - a^2)\mathcal{F}(\lambda)}{(\lambda - c^2)(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + \frac{(\nu - b^2)(\nu - a^2)\mathcal{F}(\nu)}{(\nu - c^2)(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \right) \right] \quad (9.81)$$

Lorsque la géométrie redevient axisymétrique, ces deux intégrales se confondent alors avec les I_2 et I_3 introduites précédemment. Les équations du mouvement se mettent quant à elles sous la forme

$$2p_\lambda^2 = \frac{E}{\lambda - b^2} - \frac{I_2}{(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)} - \frac{I_3}{(\lambda - c^2)(\lambda - b^2)} - \frac{\mathcal{F}(\lambda)}{\lambda - c^2} \quad ; \quad (9.82)$$

$$2p_\mu^2 = \frac{E}{\mu - b^2} - \frac{I_2}{(\mu - a^2)(\mu - b^2)} - \frac{I_3}{(\mu - c^2)(\mu - b^2)} - \frac{\mathcal{F}(\mu)}{\mu - c^2} \quad ; \quad (9.83)$$

$$2p_\nu^2 = \frac{E}{\nu - b^2} - \frac{I_2}{(\nu - a^2)(\nu - b^2)} - \frac{I_3}{(\nu - c^2)(\nu - b^2)} - \frac{\mathcal{F}(\nu)}{\nu - c^2} \quad . \quad (9.84)$$

où p_λ, p_μ et p_ν sont les moments conjugués des variables (λ, μ, ν) . Ces équations peuvent être utilisées pour classifier les orbites et les régions de mouvement. De Zeeuw (1985) les classe en quatre familles : orbites boîtes, orbites à grand axe interne, orbite à grand axe externe, et orbites tubes à petit axe.

9.5 Structure spirale des galaxies

9.5.1 Généralités

Parmi l'ensemble des galaxies dont la magnitude apparente est inférieure à 12.7, 61% sont des galaxies spirales. En outre, les mesures dans la raie de H I à 21 cm ont permis de prouver que notre Galaxie avait une structure spirale. Un certain nombre de points sont communs à ces Spirales :

- Il existe une structure d'ensemble dans la plupart des cas (par exemple deux bras principaux symétriques), mais aussi des bras multiples et des irrégularités locales.
- Alors qu'une galaxie a connu environ 50 rotations galactiques depuis sa formation, l'enroulement des bras est généralement faible. Ou bien ils sont jeunes, ou bien un autre phénomène que la rotation différentielle intervient.
- On observe une différenciation : les étoiles jeunes et l'hydrogène ionisé sont rassemblés dans les bras étroits, l'hydrogène neutre dans les bras larges, et les étoiles vieilles sont distribuées dans tout le disque. L'existence des bras paraît donc liée au processus de formation d'étoiles.
- Au début de sa vie, une galaxie est peu aplatie, et probablement turbulente. Le phénomène bras est donc probablement plus tardif.

Plusieurs théories ont été avancées pour expliquer l'existence des bras spiraux :

- Les bras seraient d'origine explosive. Les promoteurs de cette idée ont été Ambartsumyan, Burbidge, Arp, etc. . . mais elle n'a pas encore été développée quantitativement ;
- Des théories magnétiques ont été présentées par Chandrasekhar, Fermi, etc. . . Elles n'ont jamais été complètement développées. De manière globale, l'effet de la gravitation semble l'emporter largement sur le champ magnétique dans tous les cas. La densité d'énergie magnétique $B^2/2\mu_0$ est toujours largement inférieure à la densité d'énergie cinétique de rotation $\rho v^2(r)/2$. Il semble que le champ magnétique n'ait qu'une influence *locale* (mais importante).

Il semble donc que les bras soient d'origine gravitationnelle. On a supposé au départ que ces bras étaient des structures matérielles, c'est à dire que les étoiles qui en font partie restent en place dans le bras. Ceci est assez incompatible avec la rotation différentielle, car compte tenu des quelque 50 rotations galactiques accomplies par environ toutes les galaxies depuis leur formation, dans ce cas, les bras devraient être beaucoup plus enroulés. Inversement, compte tenu de la structure actuelle des bras spiraux de notre Galaxie, ceux-ci auraient dû être alignés avec le centre galactique il y a seulement 3×10^8 ans.

Cette analyse conduit à la conclusion que les bras spiraux sont des structures immatérielles où les étoiles ne font que *passer*. Ceci permet de supposer que les bras spiraux sont la manifestation d'une *onde de densité*, ce qui signifie que les étoiles présentes à un moment donné dans un bras ne font qu'y passer, sans que leur mouvement soit lié à celui du bras. Prenons une image à titre de comparaison, celle de l'autoroute. Les voitures y roulent, mettons à 120 km/h. Un camion se déplaçant à 60 km/h va créer derrière lui un « bouchon », car il oblige les voitures à se concentrer sur la file de gauche pour le dépasser. Le bouchon se déplacera à la vitesse du camion, mais les voitures, prises individuellement, ne feront qu'y passer. Le bouchon n'est pas une structure matérielle permanente, mais une onde de densité. Dans le cas d'une galaxie spirale, le rôle du camion est tenu par des perturbations auto-entretenues du champ gravitationnel, et celui des voitures par les étoiles et le gaz interstellaire.

La figure 9.12 (Kalnajs 1975) donne une bonne idée de la notion d'onde de densité. Dans les figures (a), on a représenté un ensemble d'étoiles en rotation quasi-circulaire autour du centre galactique avec une vitesse angulaire moyenne Ω . Les petits épicycles qui tournent en sens inverse sont représentés à chaque quart de période. Le lieu géométrique « ovale » de l'ensemble des étoiles avance en longitude beaucoup plus lentement que les étoiles elles-mêmes. Les figures (b) représentent trois ondes de densités cinématiques obtenues en superposant quelques figures du même type que (a). Les ondes représentées sur la figure 9.12 ne sont que *cinématiques*. Il faut garder à l'esprit que dans le cas de systèmes stellaires réels, ces phénomènes sont amplifiés par la perturbation gravitationnelle que la concentration cinématique de masse génère. Les ondes spirales des galaxies sont des phénomènes *dynamiques*.

Toomre pour les étoiles et Goldreich et Lynden-Bell pour le gaz ont proposé une théorie locale : toute concentration de matière est allongée par la rotation différentielle, et en même temps, une vaguelette est produite autour. De telles structures seraient continûment créées et détruites.

Lindblad, puis Lin ont proposé une théorie globale : une onde de densité serait liée aux déviations systématiques de vitesse moyenne des étoiles et du gaz dans la direction radiale. Les orbites seraient des cercles « déformés » et le matériau (gaz ou étoile) resterait plus longtemps dans la région de haute densité. En gros, on part de l'équation de Boltzmann-Liouville, et on suppose par exemple que le potentiel (et de même, la densité, la fonction de distribution. . .), peut s'écrire sous la forme

$$U = U_0 + U_1 + \dots \quad , \quad (9.85)$$

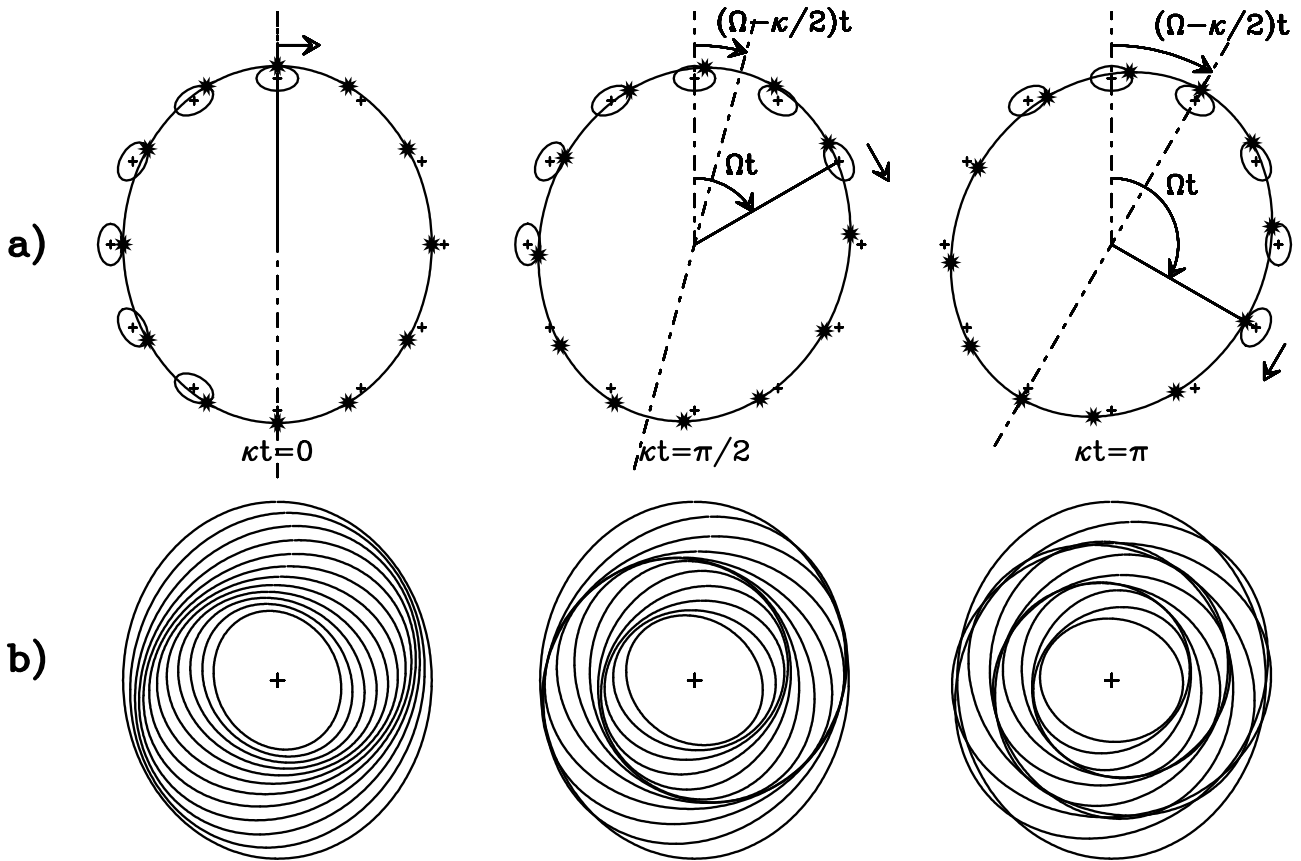


FIGURE 9.12: Illustration d'ondes de densités à partir de mouvements épicycliques

où U_0 est la solution axisymétrique sans spirale, et où U_1 est la perturbation ($U_1 \ll U_0$). D'un côté par l'équation de Poisson, on en déduit la masse volumique ρ correspondante. De l'autre côté, en résolvant Boltzmann-Liouville, on tire la fonction de distribution Ψ , puis en intégrant, on réobtient la masse volumique ρ . Au passage on a linéarisé les équations ce qui permet un traitement analytique. La cohérence de l'ensemble s'exprime alors par le fait que les deux déterminations de la masse volumique doivent coïncider, ce qui se traduit mathématiquement par une équation du style

$$U_1 = \mathcal{P}(U_1) \quad , \quad (9.86)$$

où \mathcal{P} est un opérateur compliqué. Cette équation n'est satisfaite que pour certaines formes de U_1 , en autres des solutions spirales. La résolution locale de cette équation fixe les paramètres du modèle, en clair la forme de la spirale.

9.5.2 Perturbations spirales

En toute généralité, une perturbation spirale du potentiel s'écrira, en se limitant au plan de la galaxie ($z = 0$) :

$$U_1 = \Re [U_1^*(r) \exp(i(\omega t - m\theta))] \quad , \quad (9.87)$$

où $U_1^*(r)$ est l'amplitude complexe de l'onde, ω une constante, et m un entier qui représente le nombre de bras. On peut écrire

$$U_1^*(r) = A(r) \exp(-i\phi(r)) \quad , \quad (9.88)$$

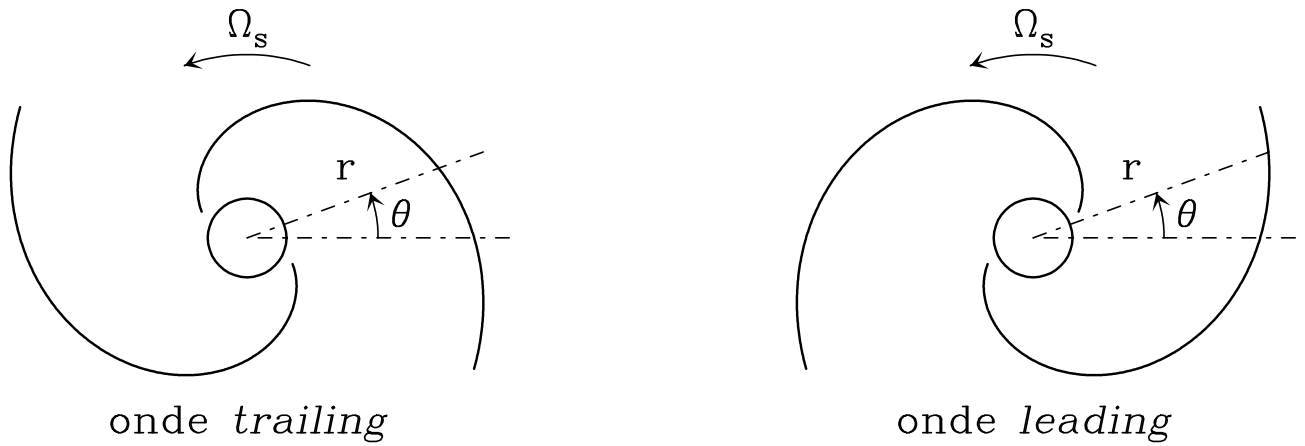


FIGURE 9.13: Ondes trailing et leading

où $A(r)$ et $\phi(r)$ sont des réels. Il vient alors de manière évidente

$$U_1 = A(r) \cos(-\phi(r) + \omega t - m\theta) \quad . \quad (9.89)$$

À un instant t donné, les points de phase constante seront définis par une relation du type

$$\phi(r) + m\theta = \omega t + C + 2p\pi \quad , \quad (9.90)$$

où C est une constante et p un entier quelconque. C'est a priori l'équation polaire d'une spirale. Pour une valeur de r donnée, il y a m valeurs de θ espacées de $2\pi/m$. Il y a donc bien m bras spiraux. Cette équation montre également qu'à $t + dt$, la spirale correspondant à la même valeur C vérifiera

$$\theta(t + dt) = \theta(t) + \frac{\omega}{m} dt \quad . \quad (9.91)$$

En d'autres termes, le champ spiral tourne en rotation solide à la vitesse angulaire

$$\Omega_s = \frac{\omega}{m} \quad . \quad (9.92)$$

On pose également

$$\boxed{k(r) = \frac{d\phi(r)}{dr} = -m \frac{d\theta(r)}{dr}} \quad , \quad (9.93)$$

si $\theta(r)$ représente l'équation polaire du bras spiral. Deux cas se présentent (Fig. 9.13) :

- $k(r) > 0$. θ décroît quand r croît. L'onde est dite « *trailing* » ;
- $k(r) < 0$. θ croît quand r croît. L'onde est dite « *leading* ».

On peut donner une autre interprétation géométrique de $k(r)$. Définissant $\lambda(r) = 2\pi/|k(r)|$, on peut voir que $\lambda(r)$ n'est autre que la longueur d'onde radiale de la spirale (Fig. 9.14). En d'autre terme, $k(r)$ est un nombre d'onde.

Il est difficile observationnellement de déterminer si les bras d'une galaxie donnée sont *leading* ou *trailing*. Pour cela il faut déterminer dans quel sens la galaxie tourne par rapport à nous, c'est-à-dire si nous voyons son côté nord ou son côté sud, faute de quoi il y a ambigüité. On peut pour cela effectuer des comptages d'objets comme des amas globulaires de part et d'autre du grand axe apparent de la galaxie, ou étudier les structures en absorption dans les bandes centrales de poussières. Dans pratiquement tous les cas où ça a pu être effectué, le champ spiral s'est révélé *trailing*. C'est aussi le cas dans notre Galaxie.

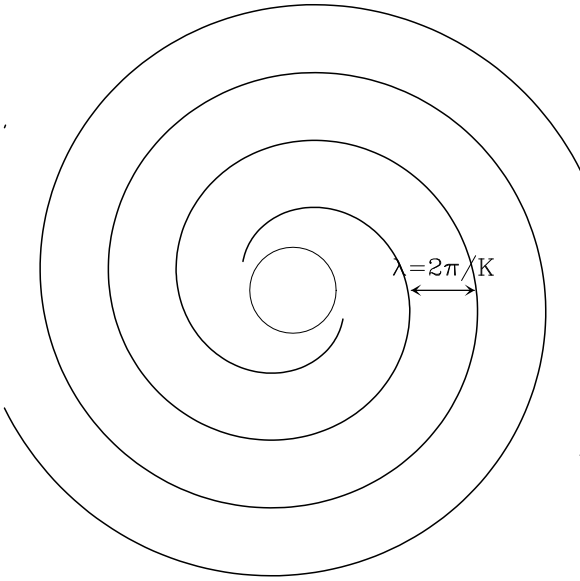


FIGURE 9.14: Signification géométrique de $k(r)$: nombre d'onde

On résout alors l'équation (9.86) en y introduisant d'office une solution de type (9.87). La résolution donne la relation de dispersion locale, c'est à dire une relation locale entre la longueur d'onde radiale $\lambda(r)$ et la fréquence $\nu(r) = \omega$ de l'onde. On obtient ainsi la forme de la spirale. La forme de l'onde de densité (la fonction $k(r)$) est en général très affectée au voisinage de certaines valeurs particulières de r correspondant à des *résonances*, et plus principalement les résonances de corotation et de Lindblad dont il va être question maintenant.

9.5.3 Orbites des étoiles dans un champ spiral. Résonances de Lindblad

Nous allons examiner maintenant la réponse des étoiles à une perturbation de type spiral donnée. On suppose donc que le potentiel s'écrit $U = U_0(r, z) + U_1(r, \theta)$ ($U_1 \ll U_0$), avec

$$U_1(r, \theta) = \Re \{ U_1^*(r) \exp [i(m\Omega_s t - m\theta)] \} \quad (9.94)$$

Nous allons étudier le mouvement des étoiles dans ce potentiel exactement comme nous l'avons fait pour le mouvement épicyclique. Supposons donc une étoile grossièrement en orbite circulaire à $r = r_0$, et nous posons

$$\begin{cases} r = r_0 + \xi \\ \theta = \theta_0 + \frac{\eta}{r_0} = \omega_0 t + \frac{\eta}{r_0} \end{cases} \quad (9.95)$$

Par souci de simplicité, nous nous limiterons ici à des mouvements dans le plan galactique (donc $z = 0$). Le système d'équations de base (9.24) est toujours valable, sauf que les dérivées du potentiel ont maintenant changé. Au total, le système (9.25) devient

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - (r_0 + \xi) \left(\omega_0 + \frac{\dot{\eta}}{r_0} \right)^2 = - \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r_0, \theta_0, 0} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r_0, \theta_0, 0} \times \xi - \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \Big|_{r_0, \theta_0, 0} \times \frac{\eta}{r_0} \\ 2\dot{\xi} \left(\omega_0 + \frac{\dot{\eta}}{r_0} \right) + (r_0 + \xi) \frac{\ddot{\eta}}{r_0} = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases} \quad (9.96)$$

Les membres de gauche des équations de ce système se développent comme précédemment. En ne gardant que les termes du premier ordre, on aboutit à un système voisin de (9.28), à savoir

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\omega_0 \dot{\eta} - \omega_0^2 \xi - r_0 \omega_0^2 = - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r_0, \theta_0, 0} \times \xi - \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \Big|_{r_0, \theta_0, 0} \times \frac{\eta}{r_0} \\ \ddot{\eta} + 2\omega_0 \dot{\xi} = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = - \frac{1}{r_0 + \xi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases} \quad (9.97)$$

A ce niveau, écrivons $U = U_0 + U_1$ avec $U_1 \ll U_0$. Comme précédemment, le terme $-\partial U_0 / \partial r$ s'élimine avec le $-r_0 \omega_0^2$ du membre de gauche (c'est la solution non perturbée), et ne subsiste

donc de $-\partial U/\partial r$ que $-\partial U_1/\partial r$ qui est un terme d'ordre 1. Le terme $(\partial^2 U_1/\partial r^2)\xi$ est d'ordre 2 car ξ est une petite quantité. On peut donc dans le membre de droite de la première équation remplacer U par U_0 dans le terme $\partial^2 U/\partial r^2$. De même, $\partial^2 U/\partial r\partial\theta$ se confond avec $\partial^2 U_1/\partial r\partial\theta$ (car U_0 ne dépend pas de θ). C'est donc une petite quantité qui multipliée par η/r_0 donne un terme d'ordre 2 que l'on peut négliger devant l'autre.

Intéressons nous maintenant à la deuxième équation de notre système, qui contrairement à (9.28), comporte cette fois un second membre. Il est d'abord clair que dans ce second membre, nous pouvons remplacer U par U_1 vu qu'il s'agit de dériver par rapport à θ . On peut ensuite en développer l'expression comme suit

$$-\frac{1}{r_0 + \xi} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} = -\frac{1}{r_0} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \theta} \Big|_{r_0, \theta_0} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial \theta} \Big|_{r_0, \theta_0} \times \xi + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} \Big|_{r_0, \theta_0} \times \frac{\eta}{r_0} - \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \Big|_{r_0, \theta_0} \times \frac{\xi}{r_0} + \dots \right] \quad (9.98)$$

Comme U_1 est une petite quantité, on voit dans cette expression que tous les termes hormis le premier seront d'ordre 2. On peut donc ne garder que le premier, et notre système se résume à

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} - 2\omega_0 \dot{\eta} - \omega_0^2 \xi = -\frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r_0, \theta_0} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} \Big|_{r_0, 0} \times \xi \\ \quad \iff \ddot{\xi} - 2\omega_0 \dot{\eta} + (\kappa_0^2 - 4\omega_0^2) \xi = -\frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r_0, \theta_0} \\ \dot{\eta} + 2\omega_0 \dot{\xi} = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \Big|_{r_0, \theta_0} \end{array} \right. , \quad (9.99)$$

où l'on a réintroduit la fréquence épicyclique κ_0 définie précédemment. Remarquons à ce niveau que dans le cas $U_1 = 0$, nous retrouvons le système qui nous a donné les mouvements épicycliques. S'ajoute ici un second membre qui est un terme d'oscillations forcées.

Nous allons maintenant introduire dans ce système la forme spirale (9.94) de U_1 . Au passage, nous omettrons volontairement d'écrire les "parties réelles". En effet, les équations en question sont aussi valables pour les parties imaginaires. La linéarité des opérations fait qu'il suffit de considérer la partie réelle du résultat pour avoir la solution cherchée. Ce procédé très classique facilite grandement les calculs. Dans l'expression de U_1 nous allons aussi approximer θ par $\omega_0 t$. C'est là une approximation très classique dans ce type de problème.

La deuxième de nos équations s'écrit donc

$$\dot{\eta} + 2\omega_0 \dot{\xi} = \frac{U_1^*}{r_0} im \exp [im(\Omega_s - \omega_0)t] \quad , \quad (9.100)$$

ce qui s'intègre immédiatement en

$$\dot{\eta} + 2\omega_0 \xi = \frac{U_1^*}{r_0(\Omega_s - \omega_0)} \exp [im(\Omega_s - \omega_0)t] + cte \quad . \quad (9.101)$$

On reporte dans l'autre équation et il vient

$$\ddot{\xi} + \kappa_0^2 \xi = \left(\frac{2\omega_0 U_1^*}{r_0(\Omega_s - \omega_0)} + \frac{\partial U_1^*}{\partial r} \right) \exp [im(\Omega_s - \omega_0)t] + C_0 \quad , \quad (9.102)$$

où C_0 est une constante. Cette équation est celle d'un oscillateur forcé. La solution est la somme d'une oscillation libre à la fréquence κ_0 et d'une oscillation forcée à la fréquence $m(\Omega_s - \omega_0)$. Plus précisément, on trouve

$$\xi(t) = \frac{C_0}{\kappa_0^2} + C_2 e^{i\kappa_0 t} + C_3 e^{-i\kappa_0 t} + \frac{C_1}{\kappa_0^2 - m^2(\Omega_s - \omega_0)^2} \exp [im(\Omega_s - \omega_0)t] \quad , \quad (9.103)$$

où on a appelé C_1 le terme constant en facteur de l'exponentielle complexe dans (9.102), et où C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration.

Examinons maintenant la solution (9.103) trouvée. La constante C_1 est a priori une quantité petite, car proportionnelle à U_1^* . Par conséquent le mouvement est bien principalement un mouvement épicyclique à la fréquence κ_0 assorti d'une perturbation forcée de moindre amplitude liée au potentiel spiral. Cependant, cette description n'est plus valable lorsque l'amplitude du terme forcé devient grande, en particulier lorsque les dénominateurs qui y interviennent tendent vers zéro, auquel cas on a une divergence. Ces situations correspondent à des *résonances*, autrement dit des rapports simples entre les diverses fréquences introduites. Dans tous ces cas, les équations sont singulières. En fait c'est notre traitement au premier ordre qui n'est pas valable. Les perturbations induites par le champ spiral sont importantes et ne peuvent être traitées de cette façon.

La première situation où ceci se produit correspond au cas $\Omega_s = \omega_0$. Dans ce cas, la constante C_1 n'est elle-même pas définie. Cette résonance porte le nom de *corotation*. Elle correspond au cas particulier où les étoiles tournent à la même vitesse que le champ spiral ; en d'autres termes le étoiles ne voient pas bouger le champ spiral par rapport à elles. Il faut bien comprendre qu'il existera toujours un endroit dans la galaxie où cette situation se produira. En effet, la vitesse du champ spiral Ω_s est en gros la même partout, tandis que la vitesse angulaire ω_0 est en général une fonction décroissante de la distance au centre r_0 (voir les courbes de rotation). Il y a toujours un r_0 particulier où les deux coïncident.

La deuxième situation de singularité correspond à l'annulation du dénominateur qui apparaît sous C_1 dans (9.103), soit $\kappa_0^2 - m^2(\Omega_s - \omega_0)^2 = 0$. Les résonances en question sont appelées *Résonances de Lindblad*. Plus précisément, on distingue

$$\omega_0 = \Omega_s + \frac{\kappa_0}{m} \quad \text{Résonance interne de Lindblad (ou ILR : Inner Lindblad Resonance)} \quad ;$$

$$\omega_0 = \Omega_s - \frac{\kappa_0}{m} \quad \text{Résonance externe de Lindblad (ou OLR : Outer Lindblad Resonance)} \quad .$$

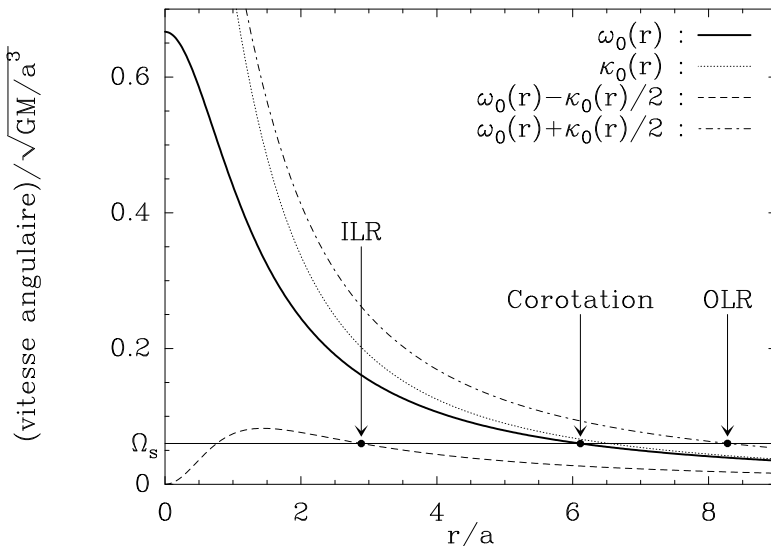


FIGURE 9.15: Représentation de ω_0 , κ_0 , $\omega_0 - \kappa_0/2$ et $\omega_0 + \kappa_0/2$ en fonction de r_0 , dans le cas du potentiel de Kuzmin-Kutuzov, pour $c/a = 0.5$. Pour un Ω_s donné, les résonances de Lindblad se lisent sur les courbes comme indiqué sur la figure.

Comme ω_0 est une fonction décroissante de r_0 il apparaît clairement que la résonance interne de Lindblad est à l'intérieur de la corotation et que la résonance externe est à l'extérieur, d'où leur dénomination. Physiquement, une étoile dans une de ces résonances verra le champ spiral passer devant elle en phase avec son mouvement épicyclique, ce qui induit des perturbations importantes.

En général on a $m = 2$ (il y a deux bras spiraux), et c'est souvent avec $m = 2$ que l'on définit les résonances de Lindblad. Cela dit, le champ spiral d'une galaxie donnée n'est jamais purement $m = 2$, mais comporte outre un terme $m = 2$ dominant, des termes harmoniques supérieurs plus petits correspondant à des m plus élevés. Par conséquent même si les résonances de Lindblad correspondant à $m = 2$ sont les plus importantes, il existera toujours des résonances moins importantes correspondant à des m plus élevés.

Dans un repère fixe par rapport à la Galaxie, les orbites sont en rosette loin des résonances, en ovale près des résonances de Lindblad et forment une ellipse épicyclique près de la corotation. Signalons que les dernières mesures cinématiques dans notre Galaxie tendent à montrer que le Soleil est très proche de la résonance de corotation. Localement donc, le Soleil ne bouge pas par rapport au champ spiral, mais ce n'est bien sûr que pur hasard.

A titre indicatif, on a représenté sur la figure (9.15) ω_0 , κ_0 , $\omega_0 - \kappa_0/2$ et $\omega_0 + \kappa_0/2$ en fonction de r_0 pour le potentiel de Kuzmin-Kutuzov introduit plus haut. La comparaison avec un Ω_s donné donne la position des résonances de Lindblad.

9.5.4 Un modèle linéaire de structure spirale

Au paragraphe précédent, nous avons examiné la réponse des étoiles à une perturbation spirale donnée. Ceci ne constitue qu'une "moitié" d'une théorie complète. En effet, une théorie complète devrait permettre de déduire le champ spiral de la structure de la galaxie par le biais des équations de Poisson et de Boltzmann-Liouville. Nous n'allons pas développer complètement ici une telle théorie qui dépasse le cadre de ce cours. Nous allons cependant développer ici un modèle linéaire qui va nous permettre de retrouver par le calcul les principales caractéristiques de la théorie complète. Ce modèle suivra pas à pas la démarche esquissée plus haut, mais sans utiliser le formalisme de l'équation de Boltzmann-Liouville qui est plus compliqué. Nous allons étudier les déformations linéaires d'un disque auto-gravitant *infinitement mince* et *gazeux*. Même s'il est vrai que la masse dans la Galaxie est essentiellement due aux étoiles, il est bien connu que le gaz participe activement à la structure spirale.

Les équations de base

Nous allons nous placer dans un système plan en coordonnées cylindriques (r, θ) . Notre approche sera *hydrodynamique*, en ce sens que nous définirons en tout point de coordonnées (r, θ) pour le gaz situé à cet endroit, une masse volumique $\rho(r, \theta)$, une vitesse $\vec{v}(r, \theta)$, et un potentiel gravitationnel $U(r, \theta)$. Si \vec{e}_r et \vec{e}_θ représentent les vecteurs unitaires de base, nous écrirons en outre

$$\vec{v}(r, \theta) = u(r, \theta)\vec{e}_r + [w(r, \theta) + r\omega_0(r)]\vec{e}_\theta \quad , \quad (9.104)$$

où $\omega_0(r)$ est la vitesse angulaire circulaire de la solution non perturbée. Par la suite, u et w seront donc de petites quantités.

Nous allons écrire les équations de base de l'hydrodynamique pour notre système, à savoir l'équation de continuité et l'équation d'Euler de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad ; \quad (9.105)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\rho \vec{\nabla} U - \vec{\nabla} P \quad . \quad (9.106)$$

On peut virtuellement intégrer ces équations sur la coordonnée z , ce qui signifie qu'on va remplacer la densité volumique de masse ρ par une densité surfacique $\sigma = \int \rho dz$. Nous allons

maintenant expliciter ces équations en coordonnées cylindriques. Pour cela je vous renvoie au formulaire donné en annexe pour les expressions des opérateurs vectoriels. On trouve en définitive

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma w + \sigma r\omega_0) = 0 \quad ; \quad (9.107)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma \frac{w + r\omega_0}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \sigma \frac{(w + r\omega_0)^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \sigma \frac{\partial U}{\partial r} \quad ; \quad (9.108)$$

$$\sigma \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial}{\partial r} (w + r\omega_0) + \sigma \frac{w + r\omega_0}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \sigma u \frac{w + r\omega_0}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad . \quad (9.109)$$

Notez que P est devenu ici une pression surfacique ($P \equiv \int P dz$). À ceci il convient de rajouter l'équation de Poisson

$$\Delta U = 4\pi G\sigma\delta(z) \quad . \quad (9.110)$$

Pour ce qui concerne la pression, il faudrait théoriquement la relier à la température et la masse volumique par une équation d'état (de type gaz parfait) et écrire une équation de conservation de l'énergie pour la température. Dans la pratique, nous ne le ferons pas. Nous supposons (ce qui est vrai) que le gaz est en mouvement turbulent, et que la turbulence est responsable de la pression. Nous supposons en outre que la vitesse moyenne de turbulence est une constante à travers le disque que nous appellerons a_0 . Moyennant ces hypothèses simplificatrices, on a

$$\vec{\nabla} P = \vec{\nabla}(\sigma a_0^2) = a_0^2 \vec{\nabla} \sigma \quad . \quad (9.111)$$

On peut assimiler a_0 aussi à la vitesse du son. La résolution des équations (9.107), (9.108), (9.109) et (9.110) donne théoriquement la solution cherchée.

Linéarisation

On va maintenant linéariser les équations selon le procédé indiqué plus haut. On va premièrement écrire

$$\sigma(r, \theta, t) = \sigma_0(r) + \sigma_1(r, \theta, t) \quad ; \quad (9.112)$$

$$U(r, \theta, t) = U_0(r) + U_1(r, \theta, t) \quad , \quad (9.113)$$

où les quantités indicées « 1 » sont supposées être de petites perturbations. Il en ira de même des perturbations de vitesse u et w . On va maintenant développer nos équations de base en ne gardant que les termes du premier ordre. Prenant notre système de trois équations, il vient

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u \sigma_0) + \omega_0 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} + \frac{\sigma_0}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad (9.114)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2w\omega_0 = -\frac{a_0^2}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} - \frac{\partial U_1}{\partial r} \quad ; \quad (9.115)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_0) + \omega_0 \frac{\partial w}{\partial \theta} + u\omega_0 = -\frac{1}{r} \left(\frac{a_0^2}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) \quad . \quad (9.116)$$

Au passage, on a éliminé les termes contenant des produits croisés de quantités du premier ordre. À ce stade, on peut noter que

$$u \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_0) + u\omega_0 = 2u(\omega_0 - A) = -2uB = \frac{u\kappa_0^2}{2\omega_0} \quad , \quad (9.117)$$

où A et B sont les constantes de Oort définies par l'équation (9.17), κ_0 la fréquence épicyclique, et où on a utilisé la relation (9.40). L'équation (9.116) se réécrit donc avantageusement

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\kappa_0^2}{2\omega_0} u = -\frac{1}{r} \left(\frac{a_0^2}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \right) \quad . \quad (9.118)$$

Enfin, la linéarisation de l'équation de Poisson est immédiate.

Perturbations spirales

Nous allons maintenant développer chacune des quantités du premier ordre, à savoir u , w , σ_1 et U_1 , sous la forme de perturbations spirales. De manière précise, si $f(r, \theta, t)$ désigne l'une quelconque de ces quatre grandeurs, on l'écrira sous la forme d'une somme de termes spiraux, à savoir

$$f(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \Re [f_m(r) \exp(i(\omega t - m\theta))] \quad . \quad (9.119)$$

D'autre part nous décomposerons chaque amplitude complexe $f_m(r)$ sous la forme $f_m(r) = f_m^*(r) \exp(-i\phi(r))$. Comme nous l'avons remarqué plus haut $\phi(r)$ définit la forme de la spirale, et est donc indépendant de la quantité concernée et du mode m . Nous allons de plus traiter chaque mode séparément (donc laisser momentanément tomber les Σ), sans écrire l'indice « m ». Comme précédemment, nous omettrons volontairement les \Re pour simplifier l'écriture (tout ceci est linéaire et également valable pour les parties imaginaires...). On écrira donc

$$\begin{cases} \sigma_1 &= \sigma_1^*(r) \exp [i(\omega t - m\theta - \phi(r))] \\ u &= u^*(r) \exp [i(\omega t - m\theta - \phi(r))] \\ w &= w^*(r) \exp [i(\omega t - m\theta - \phi(r))] \\ U_1 &= U_1^*(r) \exp [i(\omega t - m\theta - \phi(r))] \end{cases} \quad . \quad (9.120)$$

Ensuite, il convient de reporter ces expressions dans les équations de base (9.114), (9.115) et (9.118). Je passe sous silence ici quelques calculs un peu longs mais sans la moindre difficulté. On aboutit en définitive² à :

$$\sigma_1^* \nu - \frac{1}{\kappa_0} \left[k \left(1 - \frac{ix}{m} \right) \sigma_0 u^* + i \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_0 u^*) \right] = -\frac{\sigma_0 x k}{\kappa_0} w^* \quad ; \quad (9.121)$$

$$i \nu u^* - 2w^* \frac{\omega_0}{\kappa_0} = \frac{a_0^2}{\kappa_0 \sigma_0} \left(ik \sigma_1^* - \frac{\partial \sigma_1^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{\kappa_0} \left(ik U_1^* - \frac{\partial U_1^*}{\partial r} \right) \quad (9.122)$$

$$i \nu w^* + \frac{\kappa_0}{2\omega_0} u^* = -\frac{ikx}{\kappa_0} \left(U_1^* + \frac{a_0^2}{\sigma_0} \sigma_1^* \right) \quad , \quad (9.123)$$

où $k = k(r)$ est défini par l'équation (9.93), et où on a posé :

$$\nu = \frac{\omega - m\omega_0}{\kappa_0} = \frac{m(\Omega_s - \omega_0)}{\kappa_0} \quad \text{et} \quad x = -\frac{m}{kr} \quad . \quad (9.124)$$

Approximation WKB

Il convient maintenant de faire quelques approximations. Premièrement, remarquons que l'on a $x = \tan \alpha$, si α désigne l'angle d'ouverture de la spirale³. Comme les galaxies spirales

2. Vous pouvez vérifier cela à titre d'exercice !

3. l'angle entre la tangente à la spirale en un point et \vec{e}_θ

sont en générales peu ouvertes (spiraales bien enroulées), on peut considérer que cet angle est petit et donc x aussi. Pour notre Galaxie, on a $\alpha \simeq 6.3^\circ$, ce qui donne $x \simeq 0.11$. Cette approximation est raisonnable pour les Spirales de type Sa et Sb. Pour les spirales de type Sc, α va de 10° à 20° ($x \simeq 0.4$), l'approximation est moins bonne mais donne quand même des résultats satisfaisants.

On va donc négliger tous les termes en x dans notre système. Cette approximation porte le nom classique de *tight-winding* en anglais ou encore « WKB ». Une fois que les termes en x ont été négligés, il reste dans notre système d'équations des termes de la forme

$$ikF - \frac{\partial F}{\partial r} \quad ,$$

avec $F = \sigma_1^*$, U_1^* et $\sigma_0 u^*$. Dans chacun des cas les fonctions concernées sont les amplitudes des ondes, et peuvent être considérées comme pas trop rapidement variables en fonction de r . Nous supposons donc que dans chacun de ces cas $\partial F/\partial r$ est de l'ordre de grandeur (en tout cas pas très supérieur) de F/r . Or nous avons

$$\frac{F}{r} = -\frac{Fkx}{m} \quad . \quad (9.125)$$

Donc l'approximation WKB ($x \ll 1$) revient alors à dire que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial r} \right| \sim \left| \frac{F}{r} \right| \ll |Fk| \quad , \quad (9.126)$$

ce qui signifie que nous pouvons négliger les dérivées par rapport à r dans nos équations.

Résolution

Une fois ces approximations faites, il nous reste en fait un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues : u^* , w^* , σ_1^* et U_1^* . Pour une valeur donnée de U_1^* , on peut exprimer les trois autres inconnues en résolvant le système. Il vient

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_0} = -\frac{k^2 U_1^*}{\kappa_0^2(1 - \nu^2) + k^2 a_0^2} \quad ; \quad (9.127)$$

$$u^* = -\frac{k\nu\kappa_0 U_1^*}{\kappa_0^2(1 - \nu^2) + k^2 a_0^2} \quad ; \quad (9.128)$$

$$w^* = -\frac{ikU_1^* \kappa_0^2 / 2\omega_0}{\kappa_0^2(1 - \nu^2) + k^2 a_0^2} \quad . \quad (9.129)$$

La quatrième équation qui nous manque pour boucler le problème est l'équation de Poisson, qui doit relier U_1^* à σ_1^* . Cette équation, même linéarisée, est difficile à résoudre telle quelle, mais on peut avoir une idée de la forme qu'elle prend à l'ordre le plus bas. On peut en théorie « inverser » cette équation sous la forme

$$U_1(r, \theta, t) = -G \iint \frac{\sigma_1(r', \theta', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2\vec{r}' \quad . \quad (9.130)$$

On va dire pour simplifier que $\sigma_1(r', \theta', t)$ est constant au voisinage de (r, θ) , jusqu'à une distance R , et que ce qui est au-delà de R ne compte pas dans $U_1(r, \theta, t)$ Ceci donne immédiatement

$$U_1(r, \theta, t) \simeq -2\pi G \sigma_1 R \quad \implies \quad U_1^* \simeq -2\pi G \sigma_1^* R \quad . \quad (9.131)$$

Quel peut-être le bon ordre de grandeur pour R ? Il suffit de remarquer que les variations spatiales de σ_1^* sont contrôlées par le vecteur d'onde k de l'onde spirale. La distance sur laquelle σ_1 ne variera pas trop est de l'ordre de $1/|k|$. Prenant cette valeur pour R , nous dirons donc

$$U_1^* \simeq -\frac{2\pi G\sigma_1^*}{|k|} \quad , \quad (9.132)$$

relation qui complète les équations (9.127)–(9.129).

Discussion

En reportant dans (9.127), on élimine σ_1^* , et on obtient la *relation de dispersion* de l'onde spirale, qui relie la forme de la spirale, c'est à dire sa longueur d'onde radiale ($2\pi/|k|$) aux fréquences temporelles ω_0 et ω :

$$(1 - \nu^2) + \frac{k^2 a_0^2}{\kappa_0^2} = \frac{2\pi G\sigma_0 |k|}{\kappa_0^2} \equiv \frac{|k|}{k_0} \quad . \quad (9.133)$$

où l'on a introduit $k_0 = \kappa_0^2/(2\pi G\sigma_0)$. Posons maintenant

$$Q = \frac{2a_0 k_0}{\kappa_0} = \frac{a_0 \kappa_0}{\pi G\sigma_0} \quad . \quad (9.134)$$

Q est un paramètre sans dimension qui caractérise l'importance des effets de pression ($\propto a_0$). L'équation de dispersion (9.133) peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{Q^2 k^2}{4 k_0^2} - \frac{|k|}{k_0} + (1 - \nu^2) = 0} \quad . \quad (9.135)$$

Nous allons maintenant exprimer une condition de *stabilité* locale du disque. La relation de dispersion (9.133) relie localement la fréquence spatiale k à la fréquence temporelle ω (par le biais de ν). En un endroit donné, des perturbations à n'importe quelle longueur d'onde $2\pi/|k|$ peuvent arriver. Si pour une valeur de k donnée et un mode m donné, l'équation de dispersion donne $\omega^2 < 0$, alors la valeur de ω correspondante sera imaginaire pure, ce qui signifie que pour l'une des deux valeurs possibles, les termes en $e^{i\omega t}$ deviennent des exponentielles croissantes en fonction du temps. La perturbation va s'amplifier en fonction du temps, en d'autres termes le disque sera localement *instable*. Il convient donc que pour n'importe quelle valeur de k , et n'importe quel mode (jusqu'à $m = 0$ y compris), on ait toujours $\omega^2 > 0$. Il est facile de voir que ceci se traduit par

$$\frac{Q^2 k^2}{4 k_0^2} - \frac{|k|}{k_0} + 1 > 0 \quad \forall k \quad (9.136)$$

Ceci est une équation du second degré en $|k|$. Il faut donc que son discriminant soit négatif si on veut que ω soit réel. Cette condition s'écrit

$$Q^2 > 1 \quad \iff \quad a_0 > \frac{\pi G\sigma_0}{\kappa_0} \quad . \quad (9.137)$$

Cette condition traduit le fait que le terme de pression doit être *suffisamment* important pour assurer la stabilité de la Galaxie. Concrètement la pression doit être suffisamment forte pour que le disque puisse lutter contre l'effondrement sous l'effet de sa propre gravité.

Disque stellaire

La relation de dispersion (9.133) est valable pour un disque de gaz infiniment fin. Si on veut tenir compte du fait que la Galaxie est un disque d'étoiles dans un potentiel, nous devons en fait repartir de l'équation de Boltzmann linéarisée pour aboutir une équation de type (9.86) donnant la relation de dispersion. En fait la technique est assez proche, car au lieu d'utiliser les équations de l'hydrodynamique, on va utiliser les équations de Jeans vues au chapitre 2 qui leur sont formellement équivalentes. On aura au passage juste remplacé la vitesse turbulente a_0 par la dispersion des vitesses radiales des étoiles sur leurs orbites σ_r . Le point le plus délicat de l'opération consiste à évaluer la perturbation que la perturbation spirale du potentiel impose à la vitesse radiale *moyenne* des étoiles sur leur orbites épicycliques. Je ne décrirai pas ici les calculs qui sont détaillés dans Binney & Tremaine (1987). L'important est de savoir qu'on aboutit au final à une équation de dispersion de la forme suivante :

$$\boxed{1 - \nu^2 - \frac{|k|}{k_0} \mathcal{F} \left(\nu, \frac{k^2 \sigma_r^2}{\kappa_0^2} \right) = 0} \quad , \quad (9.138)$$

où ν et k_0 ont les mêmes significations que précédemment, et où \mathcal{F} est une fonction compliquée de deux variables appelée *facteur de réduction* et qui s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{F}(s, \chi) = \frac{1 - s^2}{\sin(\pi s)} \int_0^\pi e^{-\chi(1+\cos \tau)} \sin(s\tau) \sin \tau \, d\tau = \frac{2}{\chi} (1 - s^2) e^{-\chi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n(\chi)}{1 - s^2/n^2} \quad , \quad (9.139)$$

où I_n est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n .

On peut procéder à une analyse de stabilité de l'équation de dispersion (9.138) de la même manière que plus haut. Il y aura stabilité si la condition $\omega^2 > 0$ est assurée pour tout m , ce qui se traduit par

$$1 - \frac{|k|}{k_0} \mathcal{F} \left(0, \frac{k^2 \sigma_r^2}{\kappa_0^2} \right) > 0 \quad \forall k \quad , \quad (9.140)$$

En utilisant l'expression de \mathcal{F} on peut réarranger cette condition en disant que l'équation suivante (Toomre 1964) ne doit pas avoir de solution en k :

$$\frac{|k| \sigma_r^2}{2\pi G \sigma_0} = \left[1 - \exp \left(-\frac{k^2 \sigma_r^2}{\kappa_0^2} \right) \times I_0 \left(\frac{k^2 \sigma_r^2}{\kappa_0^2} \right) \right] \quad . \quad (9.141)$$

On vérifie numériquement qu'il n'y a pas de solution à cette équation (en dehors de la solution triviale $k = 0$) si

$$\boxed{Q \equiv \frac{\sigma_r \kappa_0}{3.358 G \sigma_0} > 1} \quad . \quad (9.142)$$

Cette condition porte le nom de *Critère de Toomre*. On remarquera la similarité entre les deux conditions (gaz et étoiles), où le facteur $\pi \simeq 3.14$ a juste été remplacé par un facteur numérique assez voisin.

Il est peut-être bon à ce stade de se demander si cette condition est effectivement remplie dans la Galaxie. Dans la Galaxie au voisinage du Soleil, on peut prendre $\sigma_r \simeq 45 \text{ km s}^{-1}$. La densité surfacique σ_0 peut y être estimée $\sigma_0 \simeq 75 M_\odot \text{ pc}^{-2}$. Avec la valeur de κ_0 donnée plus haut, on trouve en définitive $Q \simeq 1.3$, avec une marge d'erreur possible jusqu'à 3 ce qui montre que la condition est remplie. La Galaxie est donc stable! En fait Q est même probablement plus grand que 1.3 car le disque galactique n'est pas infiniment mince et car il y a du gaz.

Ondes longues, ondes courtes

Exprimons maintenant dans le cas du gaz les deux solutions de l'équation de dispersion (9.133), que nous nommerons k_c et k_l :

$$\frac{|k_c|}{k_0} = \frac{4 + 4\sqrt{1 - Q^2(1 - \nu^2)}}{Q^2} ; \quad (9.143)$$

$$\frac{|k_l|}{k_0} = \frac{4 - 4\sqrt{1 - Q^2(1 - \nu^2)}}{Q^2} . \quad (9.144)$$

A ce stade, remarquons plusieurs choses :

- Pour chaque valeur de $|k|$ trouvée correspondra *deux* valeurs possibles opposées de k , en d'autres termes une onde *leading* et une onde *trailing* symétrique. Lorsque les deux solutions k_c et k_l sont valables, il y a donc en tout 4 valeurs possibles.
- Il est également clair que $|k_l| < |k_c|$, ce qui en termes de longueurs d'ondes correspondantes ($\lambda = 2\pi/|k|$), se traduit par $\lambda_c < \lambda_l$. Pour cette raison, la solution correspondant à $|k_c|$ portera le nom d'*ondes courtes*, tandis que l'autre sera dénommée *ondes longues*. Dans le

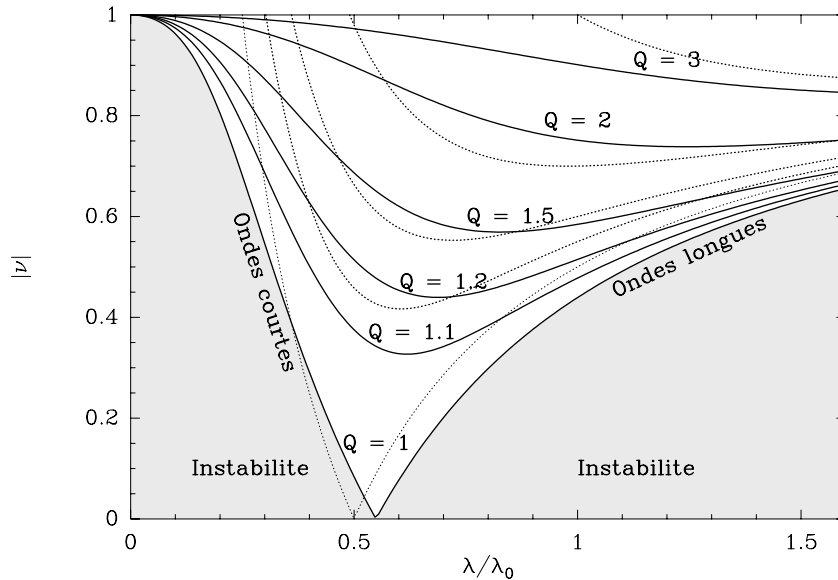


FIGURE 9.16: Solutions de l'équation de dispersion (9.138). On a représenté des courbes reliant ν à la longueur d'onde (λ/λ_0), pour diverses valeurs de Q . Les régions grises qui correspondraient à $Q < 1$ et sont donc interdites. On remarque la branche des ondes courtes et celle des ondes longues. Les courbes pointillées représentent quant à elles les solutions de l'équation du gaz (9.133).

cas de l'équation de dispersion stellaire (9.138), on trouve également une solution d'ondes courtes et une d'ondes longues. Ces solutions sont représentées sur la figure 9.16.

- Il y a des domaines de validité de ν , et donc des régions du disque où il n'y a pas de solution possible (Fig. 9.16). Dans ces régions, les ondes sont dites *évanescentes*, en ce sens qu'elles s'atténuent exponentiellement. Si on considère la relation de dispersion (9.138) pour un disque stellaire, on voit que les courbes ne vont pas au-delà de $|\nu| \leq 1$. Rappelons que $\nu = -1$ correspond à la résonance interne de Lindblad, $\nu = 0$ à la corotation et $\nu = 1$ à la résonance externe. ω_0 étant une fonction décroissante de r , il est immédiat de voir que la condition $|\nu| < 1$ signifie que l'onde ne peut exister *qu'entre les deux résonances de Lindblad*, dans une zone encadrant la corotation. Dans un disque de gaz, on peut avoir des ondes courtes au-delà mais elles correspondent à de très petites valeurs de λ et se confondent pratiquement avec des ondes sonores.
- Pour une valeur de $Q > 1$ fixée, il y a une valeur de $|\nu|$ en dessous de laquelle il n'y a pas de solution (sous le minimum de la courbe). Ceci se traduit par l'existence d'une zone entourant la corotation dans laquelle les ondes seront aussi évanescentes. Cette zone est

d'autant plus large que Q est grand. Au final, à Q donné, les ondes existent dans deux régions encadrant la corotation, et bornées par les résonances de Lindblad.

- Prenons l'exemple extrême d'un potentiel Képlérien. Un tel potentiel est créé par une masse centrale, par conséquent dans le disque la densité surfacique σ_0 est comparativement très faible, voire nulle. Il en résulte que le paramètre Q est nécessairement très grand. Donc la zone où peuvent se développer les ondes spirales est nécessairement très réduite au voisinage des résonances de Lindblad. En d'autres termes, si nous voyons des ondes spirales de grande ampleur se développer dans les galaxies, *c'est une conséquence du caractère non-Képlérien de leur dynamique.*
- Examinons maintenant la dépendance en m . La condition $|\nu| < 1$ se traduit par

$$\omega_0 - \frac{\kappa_0}{m} \leq \Omega_s \leq \omega_0 + \frac{\kappa_0}{m} \quad . \quad (9.145)$$

Ceci montre que plus m est grand, plus la région autorisée sera petite autour de la corotation. Une onde spirale de mode m élevé ne pourra donc pas se développer sur une grande largeur dans la galaxie. Ceci *favorise* donc les modes à m petit, à commencer par le mode $m = 2$, premier mode symétrique. On comprend donc pourquoi les galaxies spirales se présentent la plupart du temps comme des spirales à deux bras. C'est la structure du disque *non perturbé* et sa courbe de rotation qui imposent ce choix.

- Il y a quelque chose de plus dans la distinction entre ondes longues et ondes courtes. Si on regarde l'expression de λ_c dans le cas du gaz, on voit que ces ondes sont dominées par les effets de pression. A l'inverse k_1 dépend assez peu des termes de pression. Ces ondes sont donc bien créées par l'instabilité gravitationnelle, alors pour des longueurs d'onde très courtes, les ondes courtes sont essentiellement des ondes sonores modifiées par la gravité. Dans le cas du disque stellaire, on se retrouve dans une situation comparable à celle de l'instabilité de Jeans. Les ondes courtes sont sujettes à l'amortissement de Landau, ce qui fait que seules les ondes longues sont susceptibles de se développer sur de grandes échelles dans la Galaxie. Ce sont donc bien elles les ondes qui nous intéressent.

Tous ces résultats sortis du calcul ont une base physique. Le paramètre ν représente le rapport entre la fréquence $m(\Omega_s - \omega_0)$ des oscillations forcées que perçoit une étoile et sa fréquence naturelle d'oscillation κ_0 . Si aucune force additionnelle (comme la gravité) n'est prise en compte, alors une onde stationnaire ne pourra se développer que si ces deux fréquences sont égales au signe près, donc si $\nu = \pm 1$; ce sera le cas dans un disque où $Q \gg 1$, car dans ce cas les forces de gravitation et de pression sont négligeables. On voit bien d'ailleurs sur la figure (9.16) que pour les grandes valeurs de Q les courbes se rapprochent de la droite $\nu = 1$.

Pour une valeur de Q plus petite, l'autogravité du disque devient importante ce qui réduit la fréquence radiale naturelle d'oscillations et autorise des ondes à $|\nu| < 1$. Dans la branche des ondes longues, plus k est grand (plus λ est petit), plus la gravité est importante et la fréquence naturelle diminue. Arrive un point où les forces de pression (dans le cas du disque de gaz) ou le facteur de réduction (dans le cas du disque stellaire) agissent comme une force répulsive qui s'oppose à la gravité et font remonter la courbe vers $|\nu| = 1$.

Vitesse de groupe

Les ondes que nous venons de décrire sont des perturbations locales du disque et ont tendance à se propager radialement comme tout paquet d'ondes dans un milieu dispersif à la *vitesse de groupe* $v_g = d\omega(k)/dk$ du milieu⁴. Le calcul de la vitesse de groupe se fait

4. C'est cette vitesse que nous devons considérer et non la vitesse de phase ω/k .

théoriquement à l'aide de la relation de dispersion reliant ω (par l'intermédiaire de ν) et k . Le calcul est faisable dans le cas du disque de gaz mais beaucoup plus pénible dans le cas du disque stellaire. Du reste il n'est nul besoin de faire ce calcul complètement pour tirer des informations physiques.

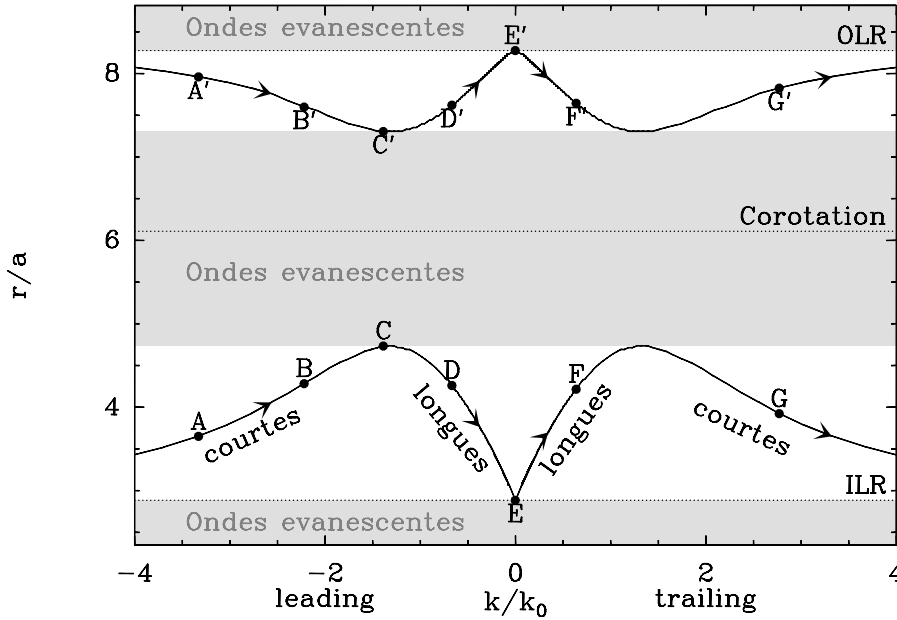


FIGURE 9.17: Une autre représentation des solutions de l'équation de dispersion (9.138), pour le disque stellaire seulement et $Q = 1.5$, dans le cas potentiel de Kuzmin-Kutuzov avec $c/a = 0.5$, et $\Omega_s = 0.06\sqrt{GM/a^3}$ (les mêmes paramètres que sur la figure 9.15). On représente le lien entre le vecteur d'onde k et la distance, dans les deux régions possibles où les ondes peuvent exister.

Au fur et à mesure que le paquet d'ondes se propage radialement, sa longueur d'onde λ (son vecteur d'onde k) s'adapte aux changements constatés de ν de manière à maintenir vérifiée la relation de dispersion. Dans la mesure où nous supposons ω constant (ou Ω_s), nous avons

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\kappa}{k_0} \frac{d\nu}{d(k/k_0)} \quad (9.146)$$

On voit donc qu'à un facteur près, la vitesse de groupe correspondra à la pente des courbes de la figure 9.16. Pour mieux suivre l'évolution d'un paquet d'onde, j'ai représenté d'une autre manière sur la figure 9.17 une solution de l'équation de dispersion. La figure 9.16 est labellée en fonction de ν ce qui la rend universelle. Si on veut passer à une dépendance en fonction de r il faut se donner un modèle de galaxie. La figure 9.17 est faite en adoptant le même modèle que sur la figure 9.15, c'est-à-dire le potentiel de Kuzmin-Kutuzov avec les mêmes valeurs de c/a et de Ω_s . J'y représente le lien qui existe entre le vecteur d'onde k (positif ou négatif), et la distance au centre r par le biais de l'équation de dispersion (ν est fonction de r) en fixant $Q = 1.5$. On reconnaît immédiatement les deux zones de part et d'autre de la corotation où les ondes peuvent exister. Les courbes valent pour le modèle de potentiel adopté, mais sont similaires pour tout autre modèle réaliste. L'évolution d'un paquet d'ondes peut se lire sur la figure. En effet, lors de la propagation nous aurons

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \kappa \frac{d\nu}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dk}{dt} = \frac{\kappa}{v_g} \frac{d\nu}{dt} = \frac{\kappa}{v_g} \frac{d\nu}{dr} \frac{dr}{dt} \quad (9.147)$$

Or, v_g se confond avec dr/dt car c'est la vitesse de propagation du paquet d'onde. Il en ressort

$$\frac{dk}{dt} = \kappa \frac{d\nu}{dr} \quad (9.148)$$

Il est facile de se convaincre que $d\nu/dr > 0$. En effet dans la partie du disque qui nous intéresse, ν passe de -1 à 1 de l'intérieur à l'extérieur. En conséquence, nous en tirons que $dk/dt > 0$. Par conséquent, un paquet d'onde va se propager radialement en suivant une des courbes de la figure 9.17 de la gauche vers la droite, dans le sens des k croissants.

Prenons donc un paquet d'ondes *leading* ($k < 0$) situé en A sur la figure 9.17. Se déplaçant dans le sens des k croissants, il voit sa longueur d'onde augmenter et se déplace radialement vers l'extérieur (point B) dans la direction de la corotation. Arrivant au point C , à la limite de la région interdite, la vitesse de groupe change de signe, et notre paquet d'onde part désormais sur la branche des ondes longues (point D) *leading* en se redéplaçant vers la résonance interne de Lindblad (point E). Ce changement de direction de la vitesse de groupe peut être compris comme une *réflexion* de l'onde sur la limite de la zone interdite. Arrivant au point E il est difficile d'être exact sur ce qui se passe car à $k = 0$ l'approximation WKB n'est pas valable. Néanmoins, on montre qu'on doit avoir une nouvelle réflexion de l'onde sur la résonance interne pour repartir ensuite sur la branche des ondes longues *trailing* (point F); ensuite il est de nouveau réfléchi sur la barrière interne et repart vers la résonance interne sous forme d'onde courte *trailing* de longueur d'onde de plus en plus courte avant de disparaître. Bien entendu, on peut décrire une évolution symétrique pour un paquet évoluant dans l'autre zone permise entre la corotation et la résonance externe (trajet $A' \rightarrow G'$).

9.5.5 Effets non linéaires. Amplification swing

Il semble donc que le destin de toute perturbation spirale apparaissant dans le disque soit de commencer courte et *leading*, puis de se « dérouler » progressivement en passant par les ondes longues *leading*, puis *trailing*, et de se réenrouler en onde *trailing* courte. Dans ce temps, le paquet d'onde traverse radialement la galaxie de part en part. On peut faire une estimation grossière du temps que prend toute cette séquence. La vitesse de groupe v_g , d'après (9.146), est de l'ordre de grandeur de κ/k_0 , car $d\nu/d(k/k_0)$ est de l'ordre de l'unité (pente des courbes). Dans le voisinage solaire, on peut estimer $\kappa/k_0 \simeq 57 \text{ km s}^{-1}$. Le temps mis par le paquet pour parcourir 10 kpc, une distance de l'ordre de grandeur de la distance du centre galactique, est donc de l'ordre de $10 \text{ kpc}/57 \text{ km s}^{-1} \simeq 2 \times 10^8 \text{ yr}$. Ce temps est comparable à la période orbitale du Soleil autour du centre galactique. En d'autres termes, la séquence complète d'évolution d'un paquet d'ondes ne doit pas excéder quelques rotations galactiques.

Ce temps est relativement court. Dès lors, on est en droit de se demander comment un disque galactique peut maintenir une structure spirale à grande échelle pendant un temps plus long. La réponse vient du comportement non-linéaire des perturbations qui tend à les stabiliser lorsque l'approximation WKB devient mauvaise⁵, c'est-à-dire lorsque l'angle d'ouverture de la spirale devient grand. Clairement cette situation correspondra aux ondes longues plutôt qu'aux courtes. Ceci constitue une raison supplémentaire pour le développement sur le long terme des ondes longues au détriment des courtes.

Une description plus complète de la dynamique des ondes spirales galactiques nécessiterait un traitement non-linéaire qui s'affranchirait de l'approximation WKB. Ce genre de travail doit être mené numériquement et c'est sur ce point que la recherche a avancé ces dernières années, grâce à l'augmentation de la puissance de calcul.

Peut-être le plus connu des effets non-linéaires et non pris en compte par l'approximation WKB est l'*amplification swing*. Des expériences numériques visant à suivre l'évolution d'un paquet d'onde depuis sa naissance en temps que perturbation *leading* courte jusqu'à sa fin en *trailing* courte ont montré que qualitativement le comportement

5. Ceci résulte d'expériences numériques et est impossible à exprimer analytiquement.

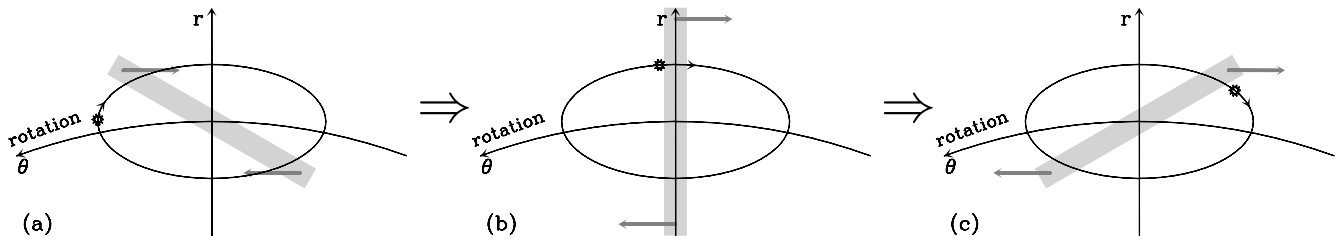


FIGURE 9.18: Illustration du mécanisme de l'amplification swing : Une étoile est suivie dans son mouvement épicyclique (a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) en même temps qu'une perturbation spirale (en grisé) leading (en (a)) qui évolue en trailing dans le même temps (en (c)). Au passage de l'un à l'autre, la vitesse de déroulement du bras est comparable à la vitesse de l'étoile.

du paquet était bien celui décrit par la théorie linéaire, à une différence majeure près : l'amplitude de l'onde (donnée au départ avec la perturbation initiale) se trouve considérablement amplifiée (des dizaines de fois) lorsque celle-ci passe par le stade *trailing* (voir Binney & Tremaine 1987, et Toomre 1981). Cette amplification n'est pas prévue dans la théorie linéaire où l'amplitude est indépendante du reste.

L'amplification swing trouve son origine dans la vitesse de déroulement du paquet d'ondes spirales, lorsqu'il passe de *leading* à *trailing*. On peut montrer en effet que c'est au milieu de la séquence que le taux de variation de l'angle d'ouverture de la spirale est maximal, et qu'à ce moment il devient comparable à la vitesse angulaire d'une étoile dans son mouvement épicyclique⁶. Temporairement donc, une étoile aura tendance à accompagner le déroulement de la perturbation spirale. Il en résulte une perturbation plus importante du mouvement de l'étoile qui est à l'origine de l'amplification swing.

D'un point de vue observationnel, ce phénomène permet qualitativement d'expliquer pourquoi la quasi-totalité des structures spirales observées dans les galaxies sont *trailing*. Les ondes *leading* existent, mais l'amplification swing montre que l'amplitude des ondes *trailing* est systématiquement

beaucoup plus grande. Ce sont donc elles qu'on voit.

Une forte amplification swing impose que le paramètre Q ne soit pas trop grand au-dessus de 1, de manière à ce qu'un début d'instabilité gravitationnelle (c'est bien de cela qu'il s'agit ici) puisse se développer. Les expériences numériques ont montré que le facteur d'amplification est extrêmement sensible à la valeur de $Q - 1$. Les amplifications d'un facteur supérieur à 10 ne sont possibles que si $Q \lesssim 1.5$.

9.5.6 Les Barres

Propriétés

Près de la moitié des galaxies spirales sont barrées. Quand une galaxie possède une barre, on y trouve en général des bras spiraux à l'extérieur de la barre. Il est au passage de plus en plus certain que notre propre Galaxie est barrée, la barre faisant un angle de 36° avec la direction centre galactique – Soleil. Cette constatation résulte essentiellement de statistique de vitesses du gaz observé en 21 cm. On constate en effet que dans la direction du centre galactique, la vitesse radiale du gaz H I n'est pas nulle en moyenne contrairement à ce qu'on pourrait attendre d'une rotation essentiellement circulaire. Ceci s'interprète comme la conséquence de mouvements à l'intérieur d'une barre.

6. Rappelons que ce mouvement se fait en sens *opposé* à celui de la rotation différentielle d'ensemble

Les barres sont les plus communes des structures triaxiales, et de ce fait leur étude se rapproche de celle des galaxies triaxiales. Il y a cependant une différence : Contrairement aux galaxies elliptiques triaxiales, les barres semblent plates, aussi plates en tout cas que les disques qui les abritent. Ainsi il est bien difficile de reconnaître une barre dans une galaxie vue de côté. Les barres sont en général assez allongées, avec un rapport d'axe variant entre 2.5 et 1. Contrairement aux bras spiraux qui semblent essentiellement dus au gaz, les barres sont bien formées d'étoiles. Ce sont des structures matérielles.

Formation

Pour comprendre la formation des barres, il faut revenir à l'évolution dynamique des paquets d'ondes spirales. Nous avons vu qu'un paquet d'ondes évolue toujours de *leading* à *trailing*, et qu'il est réfléchi sur les résonances de corotation et de Lindblad. Or dans certains cas, un disque galactique peut ne pas avoir de résonance interne de Lindblad⁷. On peut le voir sur l'exemple de la figure 9.15 avec le potentiel de Kuzmin-Kutuzov. On voit bien que si la valeur de Ω_s est trop élevée, il n'y a pas de résonance interne de Lindblad, et qu'autrement il peut y en avoir deux⁸. On trouve d'autres disques galactiques où $\omega_0 - \kappa/2$ est toujours décroissant et où il n'y a qu'une seule résonance interne de Lindblad.

Considérons donc le cas où cette résonance n'existe pas. Un paquet d'ondes se propageant sous la corotation ne pourra pas être réfléchi vers l'extérieur et se propagera alors jusqu'au centre du disque. On peut montrer qu'une onde *trailing* se propageant jusqu'au centre va en ressortir sous la forme d'une onde *leading* de même amplitude qui se propagera vers l'extérieur. Cette onde *leading* va elle-même recommencer le processus d'évolution qui va l'amener à devenir *trailing* et se repropager vers le centre. Au passage, l'amplification swing fait croître l'amplitude de l'onde lorsqu'elle passe de *leading* à *trailing*. On imagine donc bien qu'à chaque cycle, l'onde est de plus en plus importante. Cette boucle de rétroaction peut conduire à une instabilité appelée *instabilité de barre*.

La naissance d'une barre est liée à une interférence entre une onde *trailing* se propageant vers le centre et l'onde *leading* transmise à travers le centre. Faisons la superposition de deux telles ondes avec $m = 2$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \Re [A(r) \exp(i(-\phi(r) + \omega t - m\theta)) + A(r) \exp(i(\phi(r) + \omega t - m\theta))] \\ &= 2A(r) \cos(-\phi(r)) \cos(\omega t - m\theta) \quad . \end{aligned} \quad (9.149)$$

On voit qu'on arrive à la formation d'une onde stationnaire où r et θ sont découplés. Dans le cas usuel où $m = 2$, les crêtes de potentiel seront les extrêma de $\cos(\omega t - 2\theta)$ indépendants de r , donnant naissance à des structures radiales symétriques par rapport au centre. Si on admet par exemple que les étoiles vont se rassembler le long par exemple de la crête $\cos(\omega t - 2\theta) = 1$, on voit bien qu'on va former une barre qui avance à la vitesse $\omega/2$.

Dans la pratique, une barre croît du centre vers l'extérieur. Les simulations numériques montrent que, si on part d'un disque uniforme au départ, une structure spirale se développe rapidement, puis laisse place ensuite à la formation d'une barre qui attire par son autogravité de plus en plus d'étoiles de ω_0 petit. Au bout d'une dizaine de rotations, à son maximum d'intensité, cette barre peut atteindre 40% de la masse. Puis elle se dilue un peu et se stabilise à environ 25% de la masse. La barre cesse de croître pour deux raisons. Premièrement, le processus que nous avons vu montre qu'elle ne peut pas croître au-delà de la corotation. Ensuite, la barre, au fur et à mesure qu'elle croît, attire des étoiles de ω_0 de plus en plus petit. Sa vitesse

7. La résonance externe existe toujours à cause de la retombée Képlérienne.

8. Dans ce cas, c'est la plus externe des deux qui compte.

de rotation Ω_s décroît donc jusqu'à ce que qu'une résonance interne de Lindblad apparaisse, ce qui stoppe l'instabilité et le processus d'alimentation de la barre.

Pour empêcher une barre de se former, ou en détruire une, il faut accumuler de la matière au centre de la galaxie de manière à créer une très forte résonance interne de Lindblad. Tout dépend donc de la structure du potentiel de la galaxie considérée. Les barres entraînent aussi le gaz vers le centre quand il n'y a pas de résonance interne. Si le gaz se concentre au centre, il peut conduire à la destruction de la barre.

Annexe A

Potentiel gravitationnel

A.1 Equation de Poisson

Le module de la force qu'exerce une masse M' sur une masse M est par la loi de Newton

$$F = \frac{GMM'}{|r - r'|^2} \quad , \quad (\text{A.1})$$

si $|r - r'|$ est la distance séparant les deux masses et où G est la constante de la gravitation. Vectoriellement cette force s'écrit

$$\vec{F} = \frac{GMM'}{|r - r'|^3} (\vec{r}' - \vec{r}) \quad (\text{A.2})$$

Plus généralement, la force de gravitation subie par la masse M sous l'effet d'une distribution continue de masses $dm = \rho(\vec{r}') d^3r'$ s'écrit

$$\vec{F}(\vec{r}) = GM \iiint \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}') d^3r' \quad . \quad (\text{A.3})$$

En adoptant la convention que le potentiel est nul à l'infini, le potentiel gravitationnel U au point r vérifie

$$U(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3r' \quad . \quad (\text{A.4})$$

On vérifie aisément que l'on a

$$\vec{F} = -M \vec{\nabla} U \quad , \quad (\text{A.5})$$

le gradient étant bien entendu pris par rapport au coordonnées de \vec{r} (comme dans tout ce qui suit). Prenons maintenant la divergence (par rapport à \vec{r}) de la force. Il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = GM \iiint \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) \rho(\vec{r}') d^3r' \quad . \quad (\text{A.6})$$

Si on explicite en fonction des coordonnées de \vec{r} , on finit par trouver

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) = -\frac{3}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} + 3 \frac{(\vec{r}' - \vec{r})^2}{|\vec{r}' - \vec{r}|^5} \quad , \quad (\text{A.7})$$

ce qui fait bien sûr 0 dès que $\vec{r}' \neq \vec{r}$. On peut donc réduire l'intégrale à une sphère aussi petite que l'on veut autour de \vec{r} et du coup sortir $\rho(\vec{r}')$ de l'intégrale qui restera égal à $\rho(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = GM \rho(\vec{r}) \iiint_{|r-r'| \leq h} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) d^3r'$$

$$\begin{aligned}
&= -GM\rho(\vec{r}) \iiint_{|r-r'|\leq h} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) d^3\vec{r}' \\
&= -GM\rho(\vec{r}) \iint_{|r-r'|=h} \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \quad , \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

la dernière expression étant obtenue à l'aide de la formule d'Ostrogradsky. Ceci se réduit à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -GM \frac{\rho(\vec{r})}{h^3} \iint_{|r-r'|=h} (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot d\vec{S}' = -GM \frac{\rho(\vec{r})}{h^3} (4\pi h^2 \times h) = -4\pi GM\rho(\vec{r}) \quad . \quad (\text{A.9})$$

Si on compare maintenant à l'équation (A.5), on tire immédiatement

$$\Delta U(r) = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad , \quad (\text{A.10})$$

C'est-à-dire l'équation de Poisson.

A.2 Le théorème de Gauss et les théorèmes de Newton

Partons de l'équation de Poisson et intégrons là sur un volume V bordé par une surface ∂V :

$$\iiint_V 4\pi G\rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = 4\pi GM \quad , \quad (\text{A.11})$$

M étant la masse comprise à l'intérieur de V . Nous avons donc

$$4\pi GM = \iiint_V \Delta U(\vec{r}) d^3\vec{r} = \iint_{\partial V} \vec{\nabla} U(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad . \quad (\text{A.12})$$

Ce résultat constitue le *théorème de Gauss* qui dit en substance que le flux du champ gravitationnel ($-\vec{\nabla}U$) à travers ∂V est égal à $-4\pi G$ fois la masse contenue dans V .

On en tire deux résultats importants dans le cas de distribution sphérique de masse. Dans ce cas, le potentiel U ne dépend que de la distance au centre r . On en tire immédiatement que le champ gravitationnel $-\vec{\nabla}U$ est en tout point radial et possède la symétrie sphérique. En appliquant le théorème de Gauss, on tire immédiatement qu'à toute distance r , on a

$$|-\vec{\nabla}U| = \frac{GM(r)}{r^2} \quad , \quad (\text{A.13})$$

si $M(r)$ est la masse contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r . On en tire deux cas particuliers :

- A l'intérieur d'une coquille sphérique creuse, le champ gravitationnel est nul, car $M(r) = 0$. Ceci constitue le premier théorème de Newton ;
- A l'extérieur d'une masse M de distribution sphérique, le champ gravitationnel vaut GM/r^2 , ou encore on a $U(r) = -GM/r$, car pour tout r , on a $M(r) = M$. Ceci constitue le deuxième théorème de Newton qui dit que le champ gravitationnel créé à l'extérieur d'une masse de distribution sphérique est identique à celui créé par la même masse ponctuelle située au centre.

Annexe B

Résolution du problème Képlérien

B.1 Cas général

Nous choisirons ici de résoudre le problème Képlérien à partir de ses intégrales premières. D'autres méthodes (par exemple l'utilisation des formules classiques de Binet) peuvent être employées. La première intégrale est celle de l'énergie :

$$\dot{\vec{r}} \cdot \left[\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} \left(-\frac{\mu}{r} \right) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = \text{Cte}} \quad . \quad (\text{B.1})$$

la seconde intégrale première est celle du moment cinétique :

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{C} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \text{Cte}} \quad . \quad (\text{B.2})$$

Posons $C = \|\vec{C}\|$ et $\vec{C} = C\vec{k}$. L'équation précédente montre qu'à tout instant $\vec{r} \cdot \vec{k} = 0$ si C est non nul. Dans ce cas, on voit donc que le mouvement s'effectue dans le plan orthogonal à \vec{k} . Par ailleurs, en notant $\vec{r} = r\vec{u}$ (\vec{u} vecteur unitaire), on $r^2 \|\dot{\vec{u}}\| = C$, ce qui montre que le mouvement s'effectue dans le plan suivant la loi des aires. On obtient donc la première loi de Kepler qui est une caractéristique commune à tous les mouvements à force centrale. Si $C = 0$, le mouvement plan est dégénéré en un mouvement rectiligne suivant la direction commune à \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$.

On peut tirer une autre intégrale première (dite de Laplace) de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}) &= \ddot{\vec{r}} \wedge \vec{C} = -\frac{\mu}{r^2} \vec{u} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) \quad ; \\ &= -\frac{\mu}{r} \vec{u} \wedge [\vec{u} \wedge (r\dot{\vec{u}} + r\dot{\vec{u}})] \quad ; \\ &= -\mu \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \dot{\vec{u}}) \quad ; \\ &= -\mu [(\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}})\vec{u} - (\vec{u}^2)\dot{\vec{u}}] \quad ; \\ &= \mu \dot{\vec{u}} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

d'où l'existence d'un vecteur \vec{E} constant :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}}{\mu} - \vec{u}} \quad . \quad (\text{B.4})$$

\vec{E} n'est pas tout-à-fait arbitraire, car il doit manifestement vérifier $\vec{E} \cdot \vec{C} = 0$, et donc, si \vec{C} n'est pas nul, \vec{E} appartient au plan du mouvement. Si $\vec{C} = 0$, l'intégrale se réduit à $\vec{E} = -\vec{u}$ et elle est

compatible avec un mouvement rectiligne suivant la direction fixe \vec{u} . Projétons \vec{E} sur \vec{u} :

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{u} &= \frac{1}{\mu} (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{u} - 1 \\ &= \frac{1}{\mu r} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{C} - 1 = \frac{C^2}{\mu r} - 1 \quad .\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

On obtient ainsi une relation entre r et la direction de \vec{r} qui définit la trajectoire :

$$r(1 + \vec{E} \cdot \vec{u}) = \frac{C^2}{\mu} \quad .\quad (\text{B.6})$$

C étant constant, on voit que la distance r est minimale lorsque la direction de \vec{u} coïncide avec celle de \vec{E} . Le vecteur \vec{E} est dirigé vers le *périastre*.

Il est temps d'introduire quelques noms. \vec{E} est le *vecteur excentricité*. Posons $e = \|\vec{E}\|$. Soit ν l'angle entre \vec{E} et \vec{u} . ν est l'*anomalie vraie*. Posons enfin $p = C^2/\mu$. p est le *paramètre*. L'équation de la trajectoire s'écrit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad .\quad (\text{B.7})$$

L'équation polaire (B.7) est celle d'une conique d'excentricité e dont le centre occupe un foyer. On retrouve ici la première loi de Képler. Géométriquement, une telle conique peut se définir dans un plan comme le lieu des points tels que la distance r au foyer O et la distance d à une droite directrice D vérifie

$$\frac{r}{d} = e = \text{constante} \quad ,\quad (\text{B.8})$$

la distance du foyer O à la directrice D valant p/e . Cette définition est illustrée sur la figure B.1. Un raisonnement trigonométrique simple à partir de cette figure assorti de la condition $d = r/e$ montre aisément¹ que la courbe vérifie l'équation polaire (B.7).

Formons maintenant

$$\begin{aligned}\vec{E} \wedge \vec{C} &= \frac{1}{\mu} (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}) \wedge \vec{C} - \vec{u} \wedge \vec{C} \quad ; \\ &= \frac{1}{\mu} [(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{C}) \vec{C} - C^2 \dot{\vec{r}}] - \vec{u} \wedge \vec{C} \quad ; \\ &= -p \dot{\vec{r}} - \vec{u} \wedge \vec{C} \quad ,\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

soit

$$p \dot{\vec{r}} = \vec{C} \wedge (\vec{u} + \vec{E}) \quad .\quad (\text{B.10})$$

Élevons au carré cette dernière expression :

$$p^2 \dot{\vec{r}}^2 = C^2 (1 + e^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{E}) = C^2 (e^2 - 1 + 2\frac{C^2}{\mu r})\quad (\text{B.11})$$

en utilisant (B.6). Il vient finalement

$$e^2 = 1 + \frac{2hp}{\mu} \quad ,\quad (\text{B.12})$$

ce qui relie l'excentricité à l'énergie. Résumons nous. Nous avons trois cas (Fig. B.2) :

1. On a de manière claire $p/e = r \cos \theta + d$.

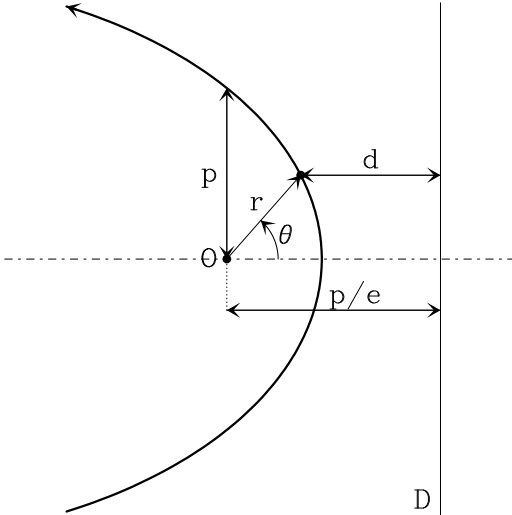


FIGURE B.1: Définition géométrique d'une conique de paramètre p et d'excentricité e en fonction de son foyer et de sa directrice.

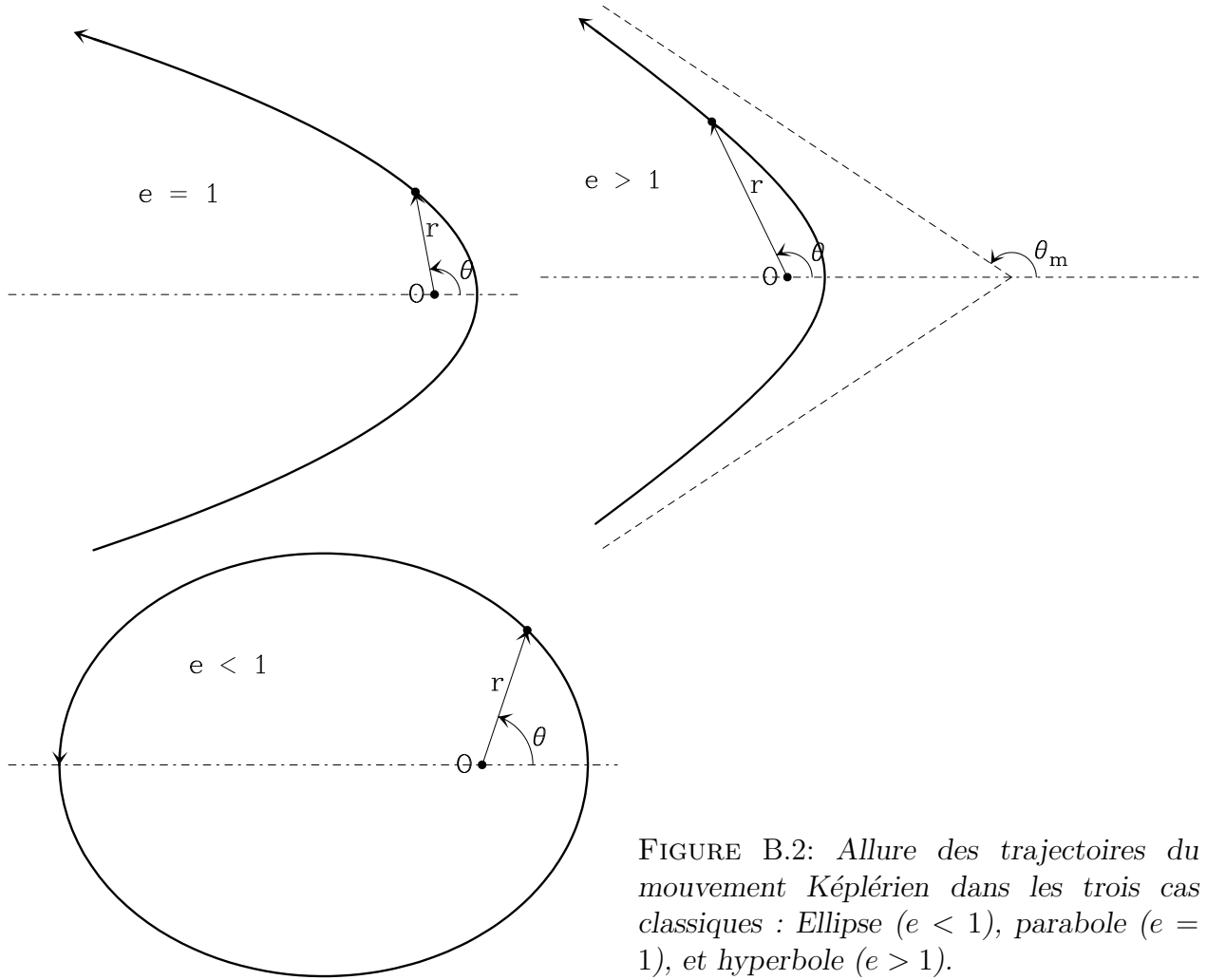


FIGURE B.2: Allure des trajectoires du mouvement Képlérien dans les trois cas classiques : Ellipse ($e < 1$), parabole ($e = 1$), et hyperbole ($e > 1$).

1. $h < 0 \Rightarrow e < 1$: La trajectoire est une ellipse. C'est une courbe fermée, sans point à l'infini. Le mouvement est périodique. Les deux objets sont dits *liés* gravitationnellement. C'est le cas correspondant aux planètes par rapport au Soleil. Dans le cas $e = 0$, on a un cercle.
2. $h = 0 \Rightarrow e = 1$: La trajectoire est une parabole. De nombreuses comètes sont proches de cette situation dans le Système Solaire.
3. $h > 0 \Rightarrow e > 1$: La trajectoire est une hyperbole.

B.2 Le mouvement sur la trajectoire

Focalisons nous maintenant sur le cas elliptique. Le demi-grand axe de l'ellipse vérifie

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\mu}{2h} \quad . \quad (\text{B.13})$$

Intéressons nous maintenant au mouvement sur la trajectoire. Pour cela, on opère le changement de variable :

$$dt = r \, d\tau \quad . \quad (\text{B.14})$$

Ainsi, on régularisera les équations. On tire

$$\frac{d}{d\tau} = r \frac{d}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = r^2 \frac{d^2}{dt^2} + r\dot{r} \frac{d}{dt} \quad , \quad (\text{B.15})$$

dont on déduit tout d'abord

$$r' = \frac{dr}{d\tau} = r\dot{r} \quad \text{et} \quad r'' = \frac{d^2r}{d\tau^2} = r\dot{r}^2 + r^2\ddot{r} \quad . \quad (\text{B.16})$$

On tire également des dérivées successives de $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$

$$\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \ddot{\vec{u}} = -\dot{\vec{u}}^2 \quad . \quad (\text{B.17})$$

On projette alors l'accélération :

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{u} = (\ddot{r}\vec{u} + 2\dot{r}\dot{\vec{u}} + r\ddot{\vec{u}}) \cdot \vec{u} = \ddot{r} - r\dot{\vec{u}}^2 = \frac{-\mu}{r^2} \quad ; \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vec{u}}^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h \quad . \quad (\text{B.19})$$

De ces deux équations, et de (B.16), on tire r'' en fonction de r , h , et μ ($\dot{\vec{u}}^2$ s'élimine) :

$$r'' = 2hr + \mu \quad . \quad (\text{B.20})$$

Cette équation s'intègre aisément sous la forme (α et β étant deux constantes d'intégration)

$$r = -\frac{\mu}{2h} + \alpha \cos(\sqrt{-2h}\tau) + \beta \sin(\sqrt{-2h}\tau) \quad . \quad (\text{B.21})$$

Posons $u = \sqrt{-2h}\tau$, et fixons $\tau = 0$ à l'instant t_p de passage au périastre. A cet instant on a

$$r(t_p) = \frac{p}{1+e} = \frac{\mu}{2h} \frac{e^2 - 1}{1+e} = -\frac{\mu}{2h}(1-e) \quad \text{et} \quad r'(t_p) = 0 \quad . \quad (\text{B.22})$$

Ceci nous donne $\beta = 0$ et $\alpha = r(t_p)$, soit

$$r = -\frac{\mu}{2h}(1 - e \cos u) = a(1 - e \cos u) \quad . \quad (\text{B.23})$$

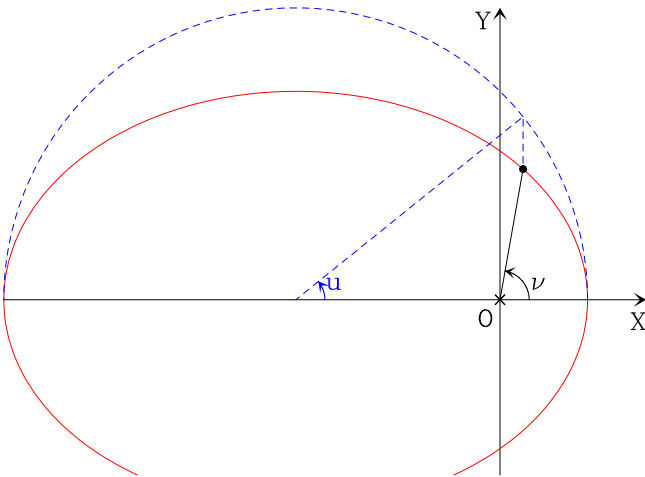


FIGURE B.3: Définition géométrique de l'anomalie excentrique et de l'anomalie vraie pour une orbite elliptique.

On obtiendra une relation avec le temps en écrivant

$$t - t_p = \int_0^{\tau} r d\tau \Rightarrow -\frac{2h\sqrt{-2h}}{\mu}(t - t_p) = u - e \sin u \quad . \quad (\text{B.24})$$

Posons alors

$$n = -\frac{2h\sqrt{-2h}}{\mu} \quad \text{et} \quad M = n(t - t_p) \quad . \quad (\text{B.25})$$

Introduisons maintenant un peu de terminologie. u est l'anomalie excentrique, n est le moyen mouvement, et M l'anomalie moyenne. Les trois anomalies (ν, u, M) s'annulent en même temps à t_p . Si le mouvement est circulaire, elles coïncident à tout moment. Un simple calcul montre également que l'on a

$$n^2 a^3 = \mu \quad . \quad (\text{B.26})$$

Par ailleurs, les équations (B.23) et (B.24) montrent bien que la période du mouvement est $T = 2\pi/n$. On obtient donc en définitive

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \quad , \quad (\text{B.27})$$

c'est à dire la troisième loi de Kepler.

Toute la loi horaire est comprise sans le lien $M \leftrightarrow u \leftrightarrow \nu$. La figure (B.3) montre la signification géométrique de l'anomalie excentrique. Cependant, cet aspect est tout-à-fait mineur. Il faut avant tout voir l'anomalie excentrique comme paramétrage commode du mouvement képlérien. Le lien entre le temps et l'anomalie vraie étant en effet assez complexe, passer par l'intermédiaire de l'anomalie excentrique est un intermédiaire pratique.

Résumons pour terminer les équations classiques que l'on obtient :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} = a(1 - e \cos u) = a \frac{dM}{du} \quad ; \quad (\text{B.28})$$

$$M = n(t - t_p) = u - e \sin u \quad (\text{Équation de Kepler}) \quad ; \quad (\text{B.29})$$

$$\cos \nu = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \quad ; \quad \sin \nu = \frac{\sin u \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos u} \quad ; \quad (\text{B.30})$$

$$X = r \cos \nu = a(\cos u - e) \quad ; \quad Y = r \sin \nu = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \quad ; \quad (\text{B.31})$$

$$\dot{X} = -\frac{na^2}{r} \sin u \quad ; \quad \dot{Y} = \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos u \quad . \quad (\text{B.32})$$

On peut procéder de même avec les mouvements hyperboliques et paraboliques. Là aussi, on définit une anomalie excentrique u . Le formulaire est le suivant :

Cas hyperbolique :

$$n^2 a^3 = \mu \quad ; \quad M = n(t - t_p) = e \sinh u - u \quad (\text{Équation de Kepler}) \quad ; \quad (\text{B.33})$$

$$\cos \nu = \frac{e - \cosh u}{e \cosh u - 1} \quad ; \quad \sin \nu = \frac{\sinh u \sqrt{e^2 - 1}}{e \cosh u - 1} \quad ; \quad (\text{B.34})$$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu} = a(e \cosh u - 1) = a \frac{dM}{du} \quad ; \quad (\text{B.35})$$

$$X = r \cos \nu = a(e - \cosh u) \quad ; \quad Y = r \sin \nu = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh u \quad ; \quad (\text{B.36})$$

$$\dot{X} = -\frac{na^2}{r} \sinh u \quad ; \quad \dot{Y} = \frac{na^2}{r} \sqrt{e^2 - 1} \cosh u \quad . \quad (\text{B.37})$$

Cas parabolique :

$$n^2 p^3 = \mu \quad ; \quad M = n(t - t_p) = \frac{u}{2} + \frac{u^3}{6} \quad (\text{Équation de Barker}) \quad ; \quad (\text{B.38})$$

$$u = \tan \frac{\nu}{2} \quad ; \quad (\text{B.39})$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos \nu} = \frac{p/2}{1 + u^2} \quad ; \quad (\text{B.40})$$

$$X = r \cos \nu = \frac{p}{2} (1 - u^2) \quad ; \quad Y = r \sin \nu = pu \quad ; \quad (\text{B.41})$$

$$\dot{X} = -\frac{np^2}{r} u \quad ; \quad \dot{Y} = \frac{np^2}{r} \quad . \quad (\text{B.42})$$

Une application importante du formalisme ci-dessus est le calcul de la *vitesse d'évasion*. On a vu que les deux objets sont liés gravitationnellement si et seulement si $h < 0$. Ce résultat est assez général et ne vaut pas que pour le mouvement des deux corps. Quoi qu'il en soit, en un point donné, on voit tout de suite que la condition $h < 0$ se traduit par

$$\frac{v^2}{r} < \frac{2\mu}{r} \quad . \quad (\text{B.43})$$

Ainsi il existe une vitesse d'évasion au-delà de laquelle les deux objets ne sont plus liés. Plaçons nous à la surface d'une planète de masse m et de rayon r . Pour un objet de masse négligeable par rapport à la planète, la vitesse d'évasion vaut

$$v_{\text{ev}} = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \quad . \quad (\text{B.44})$$

À la surface de la Terre, cette vitesse est de l'ordre de 11 km s^{-1} .

B.3 Le mouvement hyperbolique. Calcul de la déviation

Le mouvement Képlérien hyperbolique est celui qui correspond à $h > 0$. Les deux objets ne sont pas liés gravitationnellement. Ils s'approchent et tournent autour de leur centre de gravité commun avant de s'éloigner. Par conservation de l'énergie, on voit immédiatement que la norme de la vitesse relative v sera inchangée entre avant et après la rencontre. Par contre, la direction a changé. Le bilan de la rencontre est donc une déviation d'un angle χ de la vitesse des deux étoiles. Nous allons calculer ici cette déviation. Pour cela, repartons de l'équation (3.6) du mouvement Képlérien.

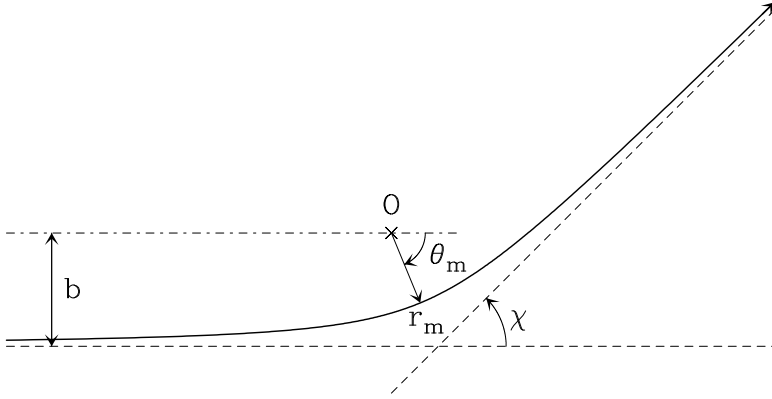


FIGURE B.4: *Le mouvement Képlérien hyperbolique*

La figure B.4 illustre le mouvement Képlérien hyperbolique. La quantité b , représentée également dans la figure 8.3, est appelée *paramètre d'impact*. Il représente la composante de \vec{r} perpendiculaire à la vitesse \vec{v} à l'infini.

Le calcul de l'angle de déviation χ est un calcul classique de mécanique céleste. La position le long de la trajectoire se représente par la donnée des coordonnées polaires $\theta(t)$ et $r(t)$. Nous désignerons par v la vitesse à l'infini. Le mouvement s'étudie par la conservation de l'énergie h et du moment cinétique C :

$$h = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2} v^2 \quad (\text{B.45})$$

$$C = r^2 \dot{\theta} = vb \quad (\text{B.46})$$

En éliminant $\dot{\theta}$, on exprime \dot{r} :

$$\dot{r}^2 = v^2 - \frac{b^2 v^2}{r^2} + 2 \frac{\mu}{r} \quad . \quad (\text{B.47})$$

\dot{r} peut être positif ou négatif. Au début, en arrivant de l'infini, \dot{r} est négatif. On se place dans ce cas de figure. On écrira alors

$$\frac{dr}{d\theta} = \dot{r} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{r^2}{b} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + 2 \frac{\mu}{v^2 r}} \quad . \quad (\text{B.48})$$

Dans cette expression apparaît une quantité que nous appellerons *paramètre d'impact critique* b_c défini par

$$b_c = \frac{\mu}{v^2} \quad . \quad (\text{B.49})$$

Le point d'approche minimale r_m s'obtient en demandant $dr/d\theta = 0$, soit

$$1 - \frac{b^2}{r_m} + 2\frac{b_c}{r_m} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r_m^2 + 2r_m b_c - b^2 = 0 \quad . \quad (\text{B.50})$$

Il vient donc

$$r_m = -b_c + \sqrt{b_c^2 + b^2} \quad . \quad (\text{B.51})$$

Au point d'approche maximale, r vaut r_m . Désignons par θ_m la valeur de θ correspondante. Il est facile de voir (Fig. B.4) que θ_m est relié à χ par

$$\chi = 2\theta_m + \pi \quad . \quad (\text{B.52})$$

Calculer χ revient donc à calculer θ_m . Pour $t \rightarrow -\infty$, $\theta \rightarrow -\pi$ et $r \rightarrow +\infty$. On a donc

$$\pi + \theta_m = \int_{+\infty}^{r_m} \frac{dr}{\left(\frac{dr}{dt}\right)} = \int_{r_m}^{+\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + 2\frac{b_c}{r}}} \quad . \quad (\text{B.53})$$

L'autre racine de l'équation (B.50) peut s'écrire $-b^2/r_m$, de telle sorte qu'on peut écrire

$$r^2 + 2rb_c - b^2 = (r - r_m) \left(r + \frac{b^2}{r_m} \right) \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{b^2}{r^2} + 2\frac{b_c}{r} = \left(1 - \frac{r_m}{r}\right) \left(1 + \frac{b^2}{rr_m}\right) \quad . \quad (\text{B.54})$$

En posant alors $x = r_m/r$ comme changement de variable dans l'intégrale, il vient

$$\pi + \theta_m = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x) \left(x + \frac{r_m^2}{b^2}\right)}} \quad . \quad (\text{B.55})$$

Pour calculer l'intégrale, on change une nouvelle fois de variable en passant à la variable centrée par rapport aux racines du dénominateur. Concrètement, on pose

$$x = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{r_m^2}{b^2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_m^2}{b^2}\right) \quad . \quad (\text{B.56})$$

Il vient alors

$$\pi + \theta_m = \int_{\frac{y^2-1}{y^2+1}}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arccos \left(\frac{y^2-1}{y^2+1} \right) \quad , \quad (\text{B.57})$$

où l'on a posé $y = r_m/b$. On utilise ensuite des relations trigonométriques usuelles :

$$\pi + \theta_m = \pi - \arccos \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right) = \pi - 2 \arctan y \quad . \quad (\text{B.58})$$

L'équation (B.52) donne ensuite

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan y \quad . \quad (\text{B.59})$$

On écrit donc

$$\tan \left(\frac{\chi}{2} \right) = \frac{1}{\tan(2 \arctan y)} = \frac{1-y^2}{2y} \quad . \quad (\text{B.60})$$

L'équation (B.50) peut s'écrire

$$1 - y^2 = 2\frac{b_c}{b}y \quad \Longrightarrow \quad \tan \left(\frac{\chi}{2} \right) = \frac{b_c}{b} \quad . \quad (\text{B.61})$$

On obtient donc la relation finale

$$\boxed{\tan \left(\frac{\chi}{2} \right) = \frac{b_c}{b} = \frac{\mu}{v^2 b} = \frac{G(m_1 + m_2)}{v^2 b}} \quad . \quad (\text{B.62})$$

Pour $b = b_c$, $\chi = \pi/2$. Chaque étoile est déviée de 90° . Les fortes déflexions correspondent à $b \lesssim b_c$.

Annexe C

Une théorie planétaire d'ordre supérieur

Nous esquissons ici une théorie à l'ordre 4 développée par Bretagnon (1974) qui montre comment on peut passer de la solution de Laplace-Lagrange à une théorie planétaire d'ordre plus élevé. La solution de Laplace-Lagrange se base sur le développement (4.80)–(4.81) des termes $\overline{U}_{k,i}$ en retenant les termes d'ordre 2 dans les variables $(q_{2,k}, p_{2,k}, q_{3,k}, p_{3,k})_{1 \leq k \leq n}$. On peut imaginer prendre en compte les termes d'ordre supérieur. Pour les mêmes raisons de symétrie qu'avec la résonance de Kozai, les termes d'ordre 3 sont nuls après moyennisation. Les termes suivants non nuls sont les termes d'ordre 4. Après dérivation, ces termes donneront des termes d'ordre 3 dans le système différentiel en plus des termes déjà présents. Considérons par exemple l'équation (4.83) qui régit les variations du terme $q_{2,k}$, sachant que tout ce qui suit s'appliquerait de manière équivalente aux autres variables. Cette équation peut se schématiser sous la forme

$$\frac{dq_{2,k}}{dt} = \sum_{i \neq k} \alpha_{k,i} p_{2,k} + \beta_{k,i} p_{2,i} \quad , \quad (\text{C.1})$$

où les $\alpha_{k,i}$ et $\beta_{k,i}$ sont des coefficients constants. L'introduction des termes d'ordre 3 dans le système différentiel conduit à écrire maintenant cette équation sous la forme

$$\frac{dq_{2,k}}{dt} = \sum_{i \neq k} \alpha_{k,i} p_{2,k} + \beta_{k,i} p_{2,i} + P_{k,i}(q_{2,k}, q_{2,i}, p_{2,k}, p_{2,i}, q_{3,k}, q_{3,i}, p_{3,k}, p_{3,i}) \quad , \quad (\text{C.2})$$

où $P_{k,i}$ est un polynôme homogène de degré 3 dans les variables en argument. Nous ne chercherons pas ici à expliciter ces termes additionnels qui sont assez compliqués, notre but étant de résumer la méthode. Bien entendu nous aurons des expressions similaires pour les autres variables. Avant d'aller plus loin, remarquons que le polynôme $P_{k,i}$ fait maintenant intervenir les variables d'inclinaison $(q_{3,k}, q_{3,i}, p_{3,k}, p_{3,i})$, ce qui n'était pas le cas du système linéaire. En conséquence, le découplage entre les variables d'excentricités celles d'inclinaisons que nous avons constaté à l'ordre 1 ne vaut plus aux ordres supérieurs. Ceci rajoute bien sûr de la complexité au système dynamique.

L'étape suivante est d'introduire la solution à l'ordre 1 (4.90) dans ces équations, et en particulier dans les termes d'ordre 3. A ce niveau, pour alléger l'écriture, nous noterons $\psi_i = g_i t + \beta_i$ et $\eta_i = s_i t + \delta_i$. La solution de Laplace-Lagrange introduite dans les termes d'ordre 3 conduit à transformer le polynôme $P_{k,i}$ en polynôme trigonométrique d'ordre 3 de tous les $\cos \psi_j$ et $\sin \psi_j$. Une telle expression peut se linéariser en faisant apparaître les lignes trigonométriques de combinaisons linéaires de ces angles. Au bout du compte, le terme d'ordre 3 peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i \neq k} P_{k,i}(q_{2,k}, q_{2,i}, p_{2,k}, p_{2,i}, q_{3,k}, q_{3,i}, p_{3,k}, p_{3,i}) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n}} \xi_{k, i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n} \cos(i_1 \psi_1 + \dots + i_n \psi_n + j_1 \eta_1 + \dots + j_n \eta_n) \quad , \quad (\text{C.3})$$

où les (i_1, \dots, i_n) et (j_1, \dots, j_n) sont des entiers tels qu'on ait toujours pour des questions de degré

$$\sum_{m=1}^n |i_m| + |j_m| = 1 \quad \text{ou} \quad 3 \quad . \quad (\text{C.4})$$

On aura par exemple des combinaisons comme $\psi_1 + \eta_2 - \eta_4$ ou $2\psi_3 - \psi_2$. Allégeons encore la notation. Notons $I = (i_1, \dots, i_n)$, $J = (j_1, \dots, j_n)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, et

$$I\psi + J\eta = i_1\psi_1 + \dots + i_n\psi_n + j_1\eta_1 + \dots + j_n\eta_n \quad , \quad (\text{C.5})$$

de telle sorte que l'on peut écrire

$$\sum_{i \neq k} P_{k,i} (q_{2,k}, q_{2,i}, p_{2,k}, p_{2,i}, q_{3,k}, q_{3,i}, p_{3,k}, p_{3,i}) = \sum_{I,J} \xi_{k,I,J} \cos(I\psi + J\eta) \quad , \quad (\text{C.6})$$

les multi-indices I et J parcourant toutes les valeurs possibles vérifiant la condition (C.4). Pour des raisons de parité la somme ne comporte ici que des cosinus. Le même type de développement pour $dp_{2,k}/dt$ conduit à une somme ne comportant que des sinus. Nous remplaçons maintenant les termes non linéaires dans l'équation (C.2) par cette somme, c'est-à-dire

$$\frac{dq_{2,k}}{dt} = \sum_{i \neq k} \alpha_{k,i} p_{2,k} + \beta_{k,i} p_{2,i} + \sum_{I,J} \xi_{k,I,J} \cos(I\psi + J\eta) \quad , \quad (\text{C.7})$$

et des équations similaires pour toutes les autres variables. Le système différentiel linéaire est donc transformé en système différentiel linéaire forcé. Pour le résoudre, on va chercher la solution sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2,k} = -\sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i \cos \psi_i - \sum_{I,J} C_{k,I,J} \cos(I\psi + J\eta) \\ p_{2,k} = \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i \sin \psi_i + \sum_{I,J} C'_{k,I,J} \sin(I\psi + J\eta) \\ q_{3,k} = -\sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i \cos \eta_i - \sum_{I,J} D_{k,I,J} \cos(I\psi + J\eta) \\ p_{3,k} = \sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i \sin \eta_i + \sum_{I,J} D'_{k,I,J} \sin(I\psi + J\eta) \end{array} \right. . \quad (\text{C.8})$$

où les $C_{k,I,J}$, $C'_{k,I,J}$, $D_{k,I,J}$, $D'_{k,I,J}$ sont des amplitudes à déterminer, et où on pose

$$\frac{d\psi_i}{dt} = g_i + \delta g_i \quad \text{et} \quad \frac{d\eta_i}{dt} = s_i + \delta s_i \quad , \quad (\text{C.9})$$

les $(\delta g_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\delta s_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant des termes correctifs sur les fréquences fondamentales qu'il conviendra de déterminer également. Compte tenu de cette condition, la dérivation par rapport au temps de cette solution donne à l'ordre le plus bas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_{2,k}}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i (g_i + \delta g_i) \sin \psi_i + \sum_{I,J} C_{k,I,J} (I g + J s) \sin(I\psi + J\eta) \\ \frac{dp_{2,k}}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i (g_i + \delta g_i) \cos \psi_i + \sum_{I,J} C'_{k,I,J} (I g + J s) \cos(I\psi + J\eta) \\ \frac{dq_{3,k}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i (s_i + \delta s_i) \sin \eta_i + \sum_{I,J} D_{k,I,J} (I g + J s) \sin(I\psi + J\eta) \\ \frac{dp_{3,k}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i (s_i + \delta s_i) \cos \eta_i + \sum_{I,J} D'_{k,I,J} (I g + J s) \cos(I\psi + J\eta) \end{array} \right. , \quad (\text{C.10})$$

où nous noterons $Ig + Js = i_1g_1 + \dots + i_n g_n + j_1s_1 + \dots + i_n s_n$. Ensuite, on substitue ces expressions dans le membre de gauche de l'équation (C.7) et des équations similaires pour les autres variables, ainsi que les expressions non dérivées dans les membres de droite. On égalise alors les coefficients correspondants. Deux cas types se présentent alors :

TABLE C.1: Correction des valeurs des fréquences fondamentales du Système Solaire après introduction des termes d'ordre 3. A comparer aux valeurs de la table 4.1.

Indice j	Correction δg_j (" / an)	Nouvelle valeur $g_j + \delta_j$ (" / ans)	Correction δs_j (" / an)	Nouvelle valeur $s_j + \delta s_j$ (" / ans)
1	-0.258373	5.202996	-0.443985	-5.643943
2	-0.000721	7.345860	-0.220510	-6.792897
3	-0.130032	17.201263	-0.152704	-18.898909
4	-0.169168	17.835416	-0.231362	-17.867473
5	+0.018087	3.729488	0	0
6	0.322115	22.608667	-0.606907	-26.348083
7	+0.078361	2.780148	-0.083205	-2.987531
8	+0.009180	0.642296	-0.009136	-0.686656

1. L'argument de $I\psi + J\eta$ est égal à un des ψ_i ou des η_i , c'est à dire qu'on est dans la situation où l'argument de la condition (C.4) vaut 1. On retrouve là les arguments de la solution de Laplace-Lagrange, et l'identification des coefficients correspondants permet de trouver les termes correctifs $(\delta g_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\delta s_i)_{1 \leq i \leq n}$ des fréquences. Le résultat pour le Système Solaire est donné dans la table C.1 (Bretagnon 1974).
2. L'argument de $I\psi + J\eta$ est tel que la condition (C.4) vaut 3. L'identification des coefficients conduit alors à déterminer toutes les amplitudes $C_{k,I,J}$, $C'_{k,I,J}$, $D_{k,I,J}$ et $D'_{k,I,J}$. Compte tenu de toutes les combinaisons possibles, cela donne un grand nombre de termes additionnels. On trouvera des tables de valeurs pour le Système Solaire dans Bretagnon (1974).

On peut montrer que la prise en compte à l'ordre le plus bas de termes à courtes périodes (donc, non moyennés) revient à rajouter dans le système différentiel des termes de même nature que ceux rajoutés plus haut. On se retrouve donc dans ce cas avec des équations de même nature que l'équation (C.7), les coefficients $\xi_{k,I,J}$ prenant maintenant partiellement en compte des termes issus des courtes périodes. La méthode de résolution reste inchangée. Une difficulté potentielle peut toutefois apparaître. Toute l'analyse repose sur le fait que les termes d'ordre 3 sont petits devant ceux d'ordre 1, donc que les coefficients $\xi_{k,I,J}$ restent petits devant les termes principaux. Ce sera assurément le cas pour la partie d'ordre 3 provenant des termes d'ordre 4 de la perturbation moyennée. En revanche, les termes provenant de la partie à courte période font apparaître au dénominateur des termes de combinaison linéaire des moyens mouvements des planètes de la forme $\sum l_k n_k$ où les l_k sont des entiers. Si un de ces termes est trop proche de zéro, dans ce cas le(s) terme(s) $\xi_{k,I,J}$ où il apparaîtra ne seront pas petits et le traitement perturbatif sera inadapté. Cette situation correspondra précisément à une situation de résonance de moyen mouvement où la condition diophantienne n'est pas vérifiée. Ces situations nécessitent un traitement approprié.

Annexe D

Compléments mathématiques et formulaires

D.1 Systèmes de coordonnées dans l'espace

Les systèmes de coordonnées dans l'espace les plus utilisés sont les coordonnées *cartésiennes*, *cylindriques* et *sphériques*. Bien entendu, d'autres systèmes moins courants peuvent être introduits, tels les coordonnées sphéroïdales décrites au chapitre 2.

Coordonnées cartésiennes

On se donne maintenant un repère orthonormé *direct* fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M sera repéré par ses trois projections (x, y, z) sur les axes principaux (Fig. D.1a). Vectoriellement, nous écrirons

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad . \quad (\text{D.1})$$

L'élément de volume élémentaire vaut

$$d^3\vec{r} = dx dy dz \quad . \quad (\text{D.2})$$

Coordonnées cylindriques

Nous considérons la projection du point M sur le plan XOY , et la repérons par ses coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan. La position du point M est ensuite précisée par la donnée de son altitude ou cote z . Les coordonnées cylindriques sont donc (r, θ, z) (Fig. D.1b). Elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les formules suivantes (z reste inchangé) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad . \quad (\text{D.3})$$

On peut exprimer la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ dans le repère initial

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad ; \quad (\text{D.4})$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad ; \quad (\text{D.5})$$

$$\vec{e}_z = \vec{k} \quad (\text{D.6})$$

Le vecteur position s'exprime dans la base locale par

$$\vec{r} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad . \quad (\text{D.7})$$

L'élément de volume vaut

$$d^3\vec{r} = r dr d\theta dz \quad . \quad (\text{D.8})$$

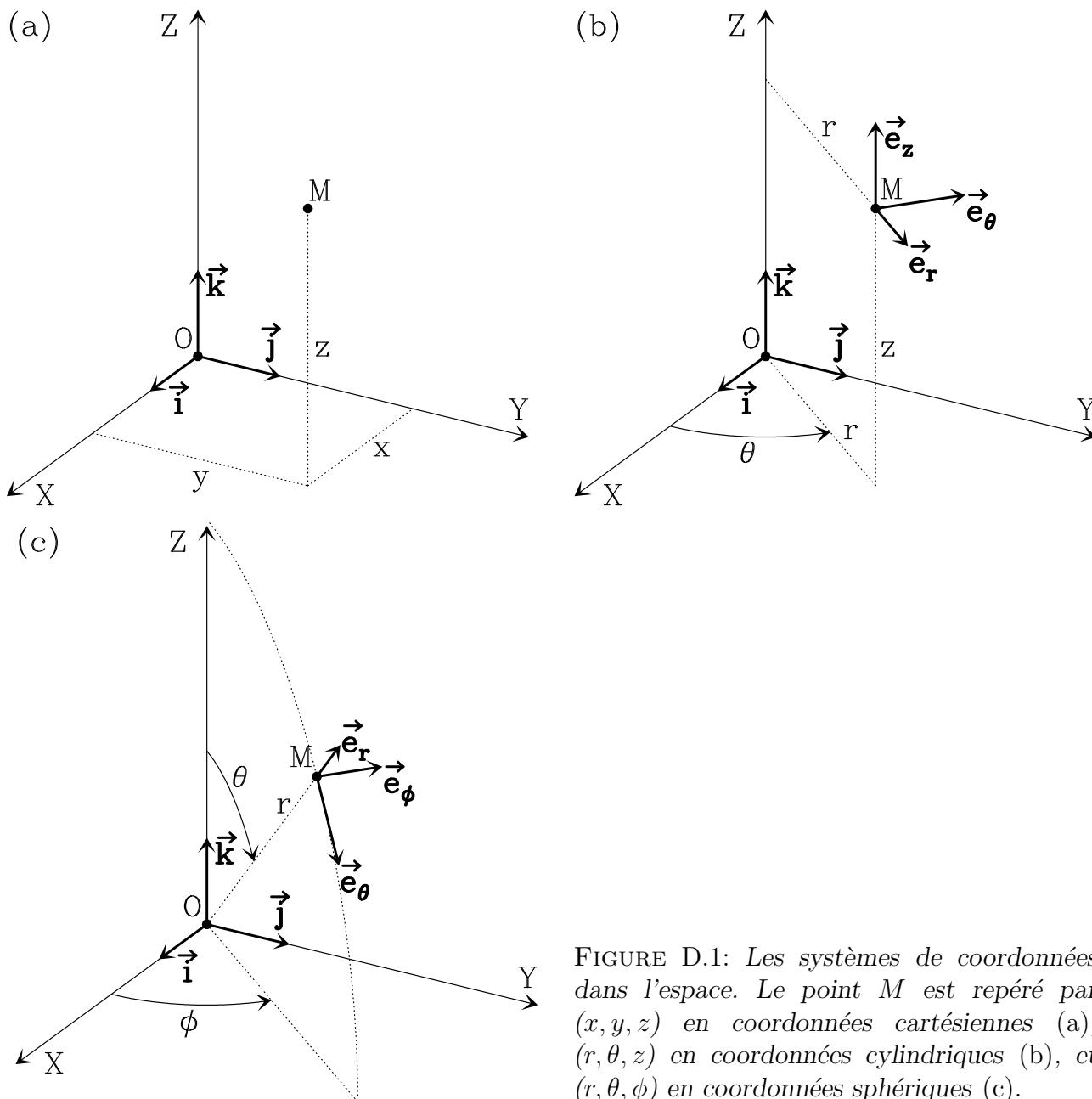


FIGURE D.1: Les systèmes de coordonnées dans l'espace. Le point M est repéré par (x, y, z) en coordonnées cartésiennes (a), (r, θ, z) en coordonnées cylindriques (b), et (r, θ, ϕ) en coordonnées sphériques (c).

Coordonnées sphériques

Le point M est maintenant repéré au moyen d'une distance r et de deux angles θ et ϕ . r est la distance au point O , θ est l'angle que fait \vec{OM} avec l'axe OZ , et ϕ a la même définition que le θ des coordonnées cylindriques, à savoir l'angle polaire de la projection de M sur le plan XOY . θ porte le nom de *colatitude* et ϕ est appelé *longitude* (Fig. D.1c). Le lien avec les coordonnées cartésiennes est

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

On définit également une base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ (voir Fig. D.1c) :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad ; \quad (\text{D.10})$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad ; \quad (\text{D.11})$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \quad . \quad (\text{D.12})$$

Dans cette base locale, on écrit simplement :

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad . \quad (\text{D.13})$$

L'élément de volume vaut

$$d^3\vec{r} = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad . \quad (\text{D.14})$$

D.2 Grandeurs cinématiques

Coordonnées cartésiennes

$$\text{vitesse : } \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \text{accélération : } \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad . \quad (\text{D.15})$$

Coordonnées cylindriques

$$\text{vitesse : } \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \text{accélération : } \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad . \quad (\text{D.16})$$

Coordonnées sphériques

$$\text{vitesse : } \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\phi = r\dot{\phi} \sin \theta \end{cases} \quad \text{accélération : } \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi = r\dot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad . \quad (\text{D.17})$$

D.3 Opérateurs différentiels

Coordonnées cartésiennes

$$\text{Gradient : } \begin{cases} (\vec{\nabla} A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} \\ (\vec{\nabla} A)_y = \frac{\partial A}{\partial y} \\ (\vec{\nabla} A)_z = \frac{\partial A}{\partial z} \end{cases} \quad \text{Rotationnel : } \begin{cases} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad . \quad (\text{D.18})$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{D.19})$$

Laplacien :

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (\text{D.20})$$

Coordonnées de $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$:

$$\begin{cases} [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_x = A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_y = A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_z = A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{cases} \quad (D.21)$$

Coordonnées cylindriques

$$\text{Gradient : } \begin{cases} (\vec{\nabla} A)_r = \frac{\partial A}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} A)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \\ (\vec{\nabla} A)_z = \frac{\partial A}{\partial z} \end{cases} \quad \text{Rotationnel : } \begin{cases} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (D.22)$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (D.23)$$

Laplacien :

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (D.24)$$

Coordonnées de $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$:

$$\begin{cases} [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_r = A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\theta B_\theta}{r} \\ [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_\theta = A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{A_\theta B_r}{r} \\ [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_z = A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{cases} \quad (D.25)$$

Coordonnées sphériques

$$\text{Gradient : } \begin{cases} (\vec{\nabla} A)_r = \frac{\partial A}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} A)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \\ (\vec{\nabla} A)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} \end{cases} \quad \text{Rotationnel : } \begin{cases} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (D.26)$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (D.27)$$

Laplacien :

$$\Delta A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} \quad (D.28)$$

Coordonnées de $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_r = A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi}{r} \\ [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_\theta = A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} + \frac{A_\theta B_r}{r} - \frac{A_\phi B_\phi}{r \tan \theta} \\ [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]_\phi = A_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\phi B_r}{r} + \frac{A_\phi B_\theta}{r \tan \theta} \end{array} \right. . \quad (\text{D.29})$$

Coordonnées quelconques

Un système de coordonnées est défini par un jeu de trois réels (q_1, q_2, q_3) utilisé pour repérer un point quelconque dans l'espace. Si P désigne le point courant, les vecteurs \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) de la base locale sont des vecteurs unitaires dans la direction de $\partial \vec{P} / \partial q_i$. Notez que dans le cas général, ces vecteurs n'ont aucun raison d'être perpendiculaires. Mais on préfère souvent les systèmes de coordonnées à base locale orthogonale. C'est bien entendu le cas des systèmes classiques présentés ci-dessus et des systèmes sphéroïdaux présentés dans le cours. On désigne par h_i la norme de $\partial \vec{P} / \partial q_i$, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i \quad . \quad (\text{D.30})$$

Les facteurs h_i 's sont appelés *facteurs d'échelle*. Si la base locale est orthogonale, l'élément métrique ds^2 s'écrit

$$ds^2 = d\vec{P} \cdot d\vec{P} = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \quad . \quad (\text{D.31})$$

Dans le cas contraire, l'expression est plus compliquée et fait intervenir des termes croisés h_{ij} . Nous nous restreindrons ici au cas orthogonal.

D'un point de vue pratique, si $f_x(q_i)$, $f_y(q_i)$ et $f_z(q_i)$ désignent l'expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées q_i 's, alors le vecteur de base \vec{e}_i est porté par le vecteur de composantes $(\partial f_x / \partial q_i, \partial f_y / \partial q_i, \partial f_z / \partial q_i)$. Ceci montre que les facteurs d'échelle se calculent pratiquement par

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial f_x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_z}{\partial q_i} \right)^2 \quad . \quad (\text{D.32})$$

Dans les exemples ci-dessus, les facteurs d'échelles valent bien sûr tous 1 dans le case des coordonnées cartésiennes. Pour les coordonnées cylindriques, on a $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$. En coordonnées sphériques, $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\phi = r \sin \theta$.

L'énergie cinétique pour une particule de masse négligeable s'écrit $T = (1/2)(ds^2/dt^2)$. Dans un potentiel U , le Lagrangien s'écrit $L = T - U$, et les moments conjugués des coordonnées s'écrivent

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = h_i^2 \dot{q}_i \quad . \quad (\text{D.33})$$

Ensuite, on peut exprimer les principaux opérateurs différentiels en fonction des seuls facteurs d'échelle. Il vient

$$\text{Gradient : } \vec{\nabla} A = \frac{1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial A}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial A}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (\text{D.34})$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{A_1}{h_1} \frac{\partial B}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{A_2}{h_2} \frac{\partial B}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{A_3}{h_3} \frac{\partial B}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (\text{D.35})$$

$$\text{Divergence : } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (\text{D.36})$$

$$\begin{aligned} \text{Rotationnel : } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right] \vec{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

$$\text{Laplacien : } \Delta A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial A}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial A}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial A}{\partial q_3} \right) \right] \quad (\text{D.38})$$

D.4 Equations de Boltzmann et de Jeans

Il est parfois utile d'exprimer l'équation de Boltzmann dans les divers systèmes de coordonnées. En principe, il suffit de reproduire la séquence d'opérations qui a conduit à l'équation (8.33). C'est assez compliqué. On peut en fait y parvenir plus vite en exploitant la forme lagrangienne (8.35) qui dit que Ψ est une constante du mouvement le long de la trajectoire des étoiles. Ceci est vrai dans n'importe quel système de coordonnées, cartésien ou non. On peut donc écrire l'équation (8.35) dans n'importe quel de ces systèmes. Par exemple, en coordonnées sphériques, l'équation de Boltzmann peut s'écrire

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \dot{\phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \dot{v}_r \frac{\partial \Psi}{\partial v_r} + \dot{v}_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial v_\theta} + \dot{v}_\phi \frac{\partial \Psi}{\partial v_\phi} = 0 \quad (\text{D.39})$$

La manœuvre ensuite consiste à relier $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ aux vitesses (v_r, v_θ, v_ϕ) , et $(\dot{v}_r, \dot{v}_\theta, \dot{v}_\phi)$ aux dérivées du potentiel U . Ceci se fait par l'intermédiaires des formules de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques (D.17). On part des formules de la vitesse donnant (v_r, v_θ, v_ϕ) . On dérive par rapport au temps pour obtenir $(\dot{v}_r, \dot{v}_\theta, \dot{v}_\phi)$. On utilise ensuite l'ensemble des formules (D.17) pour tirer $(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi})$ en fonction des coordonnées de la vitesse et de l'accélération, puis on remplace dans les expressions de $(\dot{v}_r, \dot{v}_\theta, \dot{v}_\phi)$; au passage on exprime que $\vec{a} = -\vec{\nabla}U$ avec les formules correspondantes du gradient. On tire

$$\dot{v}_r = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \quad ; \quad (\text{D.40})$$

$$\dot{v}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\phi^2}{r \tan \theta} \quad ; \quad (\text{D.41})$$

$$\dot{v}_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi}{r \tan \theta} \quad . \quad (\text{D.42})$$

Il n'y a plus ensuite qu'à reporter dans l'équation (D.39) pour obtenir le résultat final. On en tire par la suite les équations de Jeans. Ce procédé peut se copier dans n'importe quel système de coordonnées. Dans la suite, je liste dans chaque système de coordonnées l'équation de Boltzmann, la première équation de Jeans, et les trois composantes de la deuxième équation de Jeans

Coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_y \theta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial v_r} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial v_y} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial v_z} = 0 \quad (\text{D.43})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \langle v_x \rangle)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \langle v_y \rangle)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \langle v_z \rangle)}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.44})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_x \rangle \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial x} + \langle v_y \rangle \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial z} \right) = \\ -\rho \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \sigma_{xx}^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \sigma_{yx}^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \sigma_{zx}^2)}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_x \rangle \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial x} + \langle v_y \rangle \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial y} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial z} \right) = \\ -\rho \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \sigma_{xy}^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \sigma_{yy}^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \sigma_{zy}^2)}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

$$\rho \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_x \rangle \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial x} + \langle v_y \rangle \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial y} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial z} \right) = -\rho \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial(\rho \sigma_{xz}^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \sigma_{yz}^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \sigma_{zz}^2)}{\partial z} \quad (\text{D.47})$$

Coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(-\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{v_\theta^2}{r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial v_r} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial v_\theta} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial v_z} = 0 \quad (\text{D.48})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho \langle v_r \rangle)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \langle v_\theta \rangle)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \langle v_z \rangle)}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.49})$$

$$\rho \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial \theta} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial z} - \frac{\langle v_\theta \rangle^2}{r} \right) = -\rho \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho \sigma_{rr}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \sigma_{\theta r}^2)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho \sigma_{zr}^2)}{\partial z} + \frac{\rho \sigma_{\theta\theta}^2}{r} \quad (\text{D.50})$$

$$\rho \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial \theta} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial z} + \frac{\langle v_\theta \rangle \langle v_r \rangle}{r} \right) = -\frac{\rho \partial U}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho \sigma_{r\theta}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \sigma_{\theta\theta}^2)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho \sigma_{z\theta}^2)}{\partial z} - \frac{\rho \sigma_{\theta r}^2}{r} \quad (\text{D.51})$$

$$\rho \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial \theta} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial z} \right) = -\rho \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho \sigma_{rz}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \sigma_{\theta z}^2)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho \sigma_{zz}^2)}{\partial z} \quad (\text{D.52})$$

Coordonnées sphériques

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \left(-\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial v_r} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\phi^2}{r \tan \theta} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial v_\theta} + \left(-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi}{r \tan \theta} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial v_\phi} = 0 \quad (\text{D.53})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho \langle v_r \rangle)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sin \theta \langle v_\theta \rangle)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \langle v_\phi \rangle)}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{D.54})$$

$$\rho \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial \theta} + \frac{\langle v_\phi \rangle}{r \sin \theta} \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial \phi} - \frac{\langle v_\theta \rangle^2 + \langle v_\phi \rangle^2}{r} \right) = -\rho \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho \sigma_{rr}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sin \theta \sigma_{\theta r}^2)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sigma_{\phi r}^2)}{\partial \phi} + \frac{\rho(\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{\phi\phi}^2)}{r} \quad (\text{D.55})$$

$$\rho \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial \theta} + \frac{\langle v_\phi \rangle}{r \sin \theta} \frac{\partial \langle v_\theta \rangle}{\partial \phi} + \frac{\langle v_\theta \rangle \langle v_r \rangle}{r} - \frac{\langle v_\phi \rangle^2}{r \tan \theta} \right) = -\frac{\rho \partial U}{r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho \sigma_{r\theta}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sin \theta \sigma_{\theta\theta}^2)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sigma_{\phi\theta}^2)}{\partial \phi} - \frac{\rho \sigma_{\theta r}^2}{r} + \frac{\rho \sigma_{\phi\phi}^2}{r \tan \theta} \quad (\text{D.56})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \langle v_\phi \rangle}{\partial t} + \rho \left(\langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_\phi \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_\phi \rangle}{\partial \theta} + \frac{\langle v_\phi \rangle}{r \sin \theta} \frac{\partial \langle v_\phi \rangle}{\partial \phi} + \frac{\langle v_\phi \rangle \langle v_r \rangle}{r} + \frac{\langle v_\phi \rangle \langle v_\theta \rangle}{r \tan \theta} \right) = \\ - \frac{\rho}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho \sigma_{r\phi}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho \sin \theta \sigma_{\theta\phi}^2)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho \sigma_{\phi\phi}^2)}{\partial \phi} - \frac{\rho \sigma_{\phi r}^2}{r} - \frac{\rho \sigma_{\phi\theta}^2}{r \tan \theta} \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

D.5 Formules d'analyse vectorielle

Dans ce qui suit, on considère un volume fermé V de l'espace tridimensionnel, délimité par sa frontière (une surface) ∂V . Nous désignerons par \vec{dS} le vecteur élément de surface orienté (vers l'extérieur) en un point quelconque de ∂V . Soit $\vec{F}(\vec{r})$ un champ vectoriel, c'est-à-dire une fonction vectorielle définie en tout point de l'espace. La *formule d'Ostrogradski* dit alors que

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \iint_{\partial V} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{dS} \quad . \quad (\text{D.58})$$

Dit en français, « le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée est égal à l'intégrale en volume de sa divergence ».

Considérons maintenant une surface Σ dans l'espace, non fermée, délimitée par son bord (une courbe) $\partial\Sigma$, et soit de nouveau $\vec{F}(\vec{r})$ un champ vectoriel. La *formule de Stokes* s'écrit alors

$$\iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r})) \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \, dl \quad , \quad (\text{D.59})$$

où dl est un élément d'abscisse curviligne le long de $\partial\Sigma$. En clair, « la circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe fermée est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface sous-tendue par la courbe ».

D.6 L'équation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel intervient dans l'obtention de la formule d'inversion d'Eddington dans les systèmes à symétrie sphérique. Plus généralement, on la retrouve dans tous les problèmes d'inversion de profils intégrés de brillance dans des disques afin de remonter aux distributions initiales. On parle alors de techniques de *déprojection*.

De manière générale, partant d'une relation

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} \, dt \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad , \quad (\text{D.60})$$

le problème posé est d'inverser la relation, c'est-à-dire d'exprimer $g(t)$ à partir de $f(x)$. Dans les problèmes de déprojection classique, l'application est faite avec $\alpha = 1/2$; c'est aussi le cas au chapitre 2 avec l'inversion d'Eddington. Je présente néanmoins ici le cas général.

Pour procéder à l'inversion, on introduit un réel $\psi \in]0, 1[$, et on divise la relation (D.60) par $(\psi - x)^{1-\alpha}$.

$$\frac{f(x)}{(\psi - x)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha (\psi - x)^{1-\alpha}} \, dt \quad , \quad (\text{D.61})$$

puis on intègre sur x entre 0 et ψ :

$$\begin{aligned} \int_0^\psi \frac{f(x)}{(\psi - x)^{1-\alpha}} \, dx &= \int_0^\psi \left[\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha (\psi - x)^{1-\alpha}} \, dt \right] \, dx \\ &= \int_0^\psi g(t) \left[\int_t^\psi \frac{dx}{(x-t)^\alpha (\psi - x)^{1-\alpha}} \right] \, dt \quad , \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

la dernière formule étant obtenue en inversant l'ordre d'intégration entre t et x . Dans l'intégrale entre crochets, on pose ensuite $u = (\psi - x)/(\psi - t)$, et il vient

$$\int_t^\psi \frac{dx}{(x-t)^\alpha(\psi-x)^{1-\alpha}} = \int_0^1 \frac{du}{u^{1-\alpha}(1-u)^\alpha} \quad . \quad (\text{D.63})$$

Ce résultat s'exprime au moyen de la fonction **Beta**, elle-même reliée à la fonction **Gamma** :

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad . \quad (\text{D.64})$$

Ici on a d'après l'équation précédente

$$\int_t^\psi \frac{dx}{(x-t)^\alpha(\psi-x)^{1-\alpha}} = B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad , \quad (\text{D.65})$$

La dernière identité étant connue sous le nom de *formule de réflexion* de la fonction Γ . Au bout du compte donc, on peut simplifier l'expression (D.62) :

$$\int_0^\psi \frac{f(x)}{(\psi-x)^{1-\alpha}} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \int_0^\psi g(t) dt \quad . \quad (\text{D.66})$$

On dérive ensuite l'expression par rapport à ψ , en on applique en $\psi = t$. On en tire l'expression cherchée de $g(t)$:

$$g(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right) \quad . \quad (\text{D.67})$$

Il est d'usage de transformer le deuxième membre. Dans l'intégrale, on pose $u = t - x$, puis on dérive par rapport à t :

$$g(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{f(t-u)}{u^{1-\alpha}} du \right) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(t-u)}{u^{1-\alpha}} du \right) \quad . \quad (\text{D.68})$$

On repasse ensuite à $x = t - u$ pour obtenir l'expression finale :

$$g(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right) \quad . \quad (\text{D.69})$$

La formule d'Eddington (8.65) est une application de ce résultat avec $\alpha = 1/2$ et où le rôle de f est tenu par $d\rho/d\Phi$.

D.7 La fonction d'erreur

On définit la fonction d'erreur erf par

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad . \quad (\text{D.70})$$

On a bien évidemment $\operatorname{erf} 0 = 0$ et $\operatorname{erf} (+\infty) = 1$, grâce à la relation usuelle

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad . \quad (\text{D.71})$$

On a aussi $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x$. Dans le cours, on utilise la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2}}{t^2 + \beta^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\pi\beta}{2} e^{\beta^2} (1 - \operatorname{erf} \beta) \quad . \quad (\text{D.72})$$

D.8 Les fonctions de Bessel

Je me bornerai ici à citer quelques propriétés et relations de base. Pour ν réel, les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce $J_\nu(x)$ et $Y_\nu(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad . \quad (\text{D.73})$$

Les fonctions de Bessel modifiées $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ sont quant à elles solutions de

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad . \quad (\text{D.74})$$

On a les relations suivantes entre solutions :

$$I_\nu(x) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ix) \quad ; \quad (\text{D.75})$$

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad ; \quad (\text{D.76})$$

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{D.77})$$

En termes de séries, on a

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad . \quad (\text{D.78})$$

On a les formules de récurrence :

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad \text{et} \quad Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) \quad ; \quad (\text{D.79})$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) \quad \text{et} \quad e^{i(\nu-1)\pi} K_{\nu-1}(x) + e^{i(\nu+1)\pi} K_{\nu+1}(x) = e^{i\nu\pi} \frac{2\nu}{x} K_\nu(x) \quad (\text{D.80})$$

Si $\nu \equiv n$ est un entier, on a alors les relations suivantes

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad ; \quad Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad ; \quad (\text{D.81})$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \quad ; \quad (\text{D.82})$$

$$I_{-n}(x) = I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad ; \quad (\text{D.83})$$

$$e^{x \cos \theta} = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x) \cos(n\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(x) \cos(n\theta) \quad ; \quad (\text{D.84})$$

$$e^{ix \cos \theta} = J_0(x) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} i^n J_n(x) \cos(n\theta) \quad (\text{D.85})$$

On trouvera plein d'autres relations dans Abramowitz & Stegun (1972).

Annexe E

Intégrales premières dans un potentiel de Stäckel

Les coordonnées sphéroïdales et les potentiels de Stäckel ont été introduits en (9.4.2) et (9.4.3). Nous détaillons ici le procédé de construction des intégrales premières dans ces potentiels. Commençons par le cas axisymétrique, c'est-à-dire le coordonnées correspondant à la définition (9.54) avec des potentiels de la forme (9.57). Ils est alors facile de calculer les facteurs d'échelle dans ce système de coordonnées (λ, θ, ν) . Il vient

$$h_\lambda^2 = \frac{\lambda - \nu}{4(\lambda - c^2)(\lambda - a^2)} \quad , \quad h_\theta^2 = \frac{(\lambda - a^2)(a^2 - \nu)}{a^2 - c^2} \quad , \quad h_\nu^2 = \frac{\nu - \lambda}{4(\nu - c^2)(\nu - a^2)} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Un mouvement décrit dans ce système de coordonnées dans un potentiel conservatif quelconque $V(\lambda, \theta, \nu)$ sera régi par le Hamiltonien

$$H = E = \frac{p_\lambda^2}{2h_\lambda^2} + \frac{p_\theta^2}{2h_\theta^2} + \frac{p_\nu^2}{2h_\nu^2} + V(\lambda, \theta, \nu) \quad . \quad (\text{E.2})$$

Pour appliquer la méthode de Hamilton-Jacobi, nous allons chercher une transformation canonique $(q_i, p_i) \rightarrow (q'_i, p'_i)$ telle que des intégrales premières apparaissent naturellement dans le mouvement exprimé dans les nouvelles coordonnées. Ceci se fait via l'introduction d'une fonction génératrice $S(q_i, p'_i)$ vérifiant $p_i = \partial S / \partial q_i$ et $q'_i = \partial S / \partial p'_i$. On va aussi s'arranger pour que la transformation soit conservative de manière à ce que le Hamiltonien soit inchangé, donc toujours égal à l'énergie E . On va aussi s'arranger pour que les nouveaux moments p'_i correspondent aux intégrales premières recherchées. Si on introduit dans l'expression du Hamiltonien ces définitions, ainsi que la définition (9.57) d'un potentiel de Stäckel, il vient après multiplication par $\lambda - \nu$

$$2 \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 (\lambda - c^2)(\lambda - a^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \frac{(a^2 - c^2)(\lambda - \nu)}{(\lambda - a^2)(\nu - a^2)} - 2 \left(\frac{\partial S}{\partial \nu} \right)^2 (\nu - c^2)(\nu - a^2) + (\nu - c^2)\mathcal{F}(\nu) - (\lambda - c^2)\mathcal{F}(\lambda) - E(\lambda - \nu) = 0 \quad . \quad (\text{E.3})$$

Ceci constitue l'équation de Hamilton-Jacobi dont la fonction génératrice S est la solution. On cherche maintenant une fonction séparable sous la forme

$$S = S_\lambda(\lambda) + S_\nu(\nu) \quad (\text{E.4})$$

et qui ne dépende pas de θ (on garde θ et donc L_z). L'équation s'écrit alors sous la forme

$$2 \left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \right)^2 (\lambda - c^2)(\lambda - a^2) - (\lambda - c^2)\mathcal{F}(\lambda) - \lambda E = 2 \left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \nu} \right)^2 (\nu - c^2)(\nu - a^2) - (\nu - c^2)\mathcal{F}(\nu) - \nu E \quad . \quad (\text{E.5})$$

Chacun des deux membres de cette équation ne dépend que soit de λ soit de ν . Si on veut que les deux soient égaux à chaque instant, ceci montre qu'ils doivent être tous deux égaux à une constante que nous nommerons K . Nous aurons donc bien trois intégrales premières E , L_z et K . On peut alors exprimer les moments conjugués (à l'aide de $p_i = \partial S / \partial q_i$) en fonction des intégrales premières. Il vient

$$p_\lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{K + (\lambda - c^2)\mathcal{F}(\lambda) + \lambda E}{(\lambda - c^2)(\lambda - a^2)} \quad ; \quad (\text{E.6})$$

$$p_\nu^2 = \frac{1}{2} \frac{K + (\nu - c^2)\mathcal{F}(\nu) + \nu E}{(\nu - c^2)(\nu - a^2)} \quad , \quad (\text{E.7})$$

ce qui constitue les équations du mouvement. On peut alors prouver en calculant les composantes du moment cinétique que l'intégrale

$$I_3 = -c^2 E - K \quad (\text{E.8})$$

correspond bien à l'intégrale (9.60) du cours, et que les équation du mouvement ci-dessus se transforment bien en celles du cours si on remplace K par I_3 .

Dans le cas non-axisymétrique, la démarche est exactement la même en un peu plus compliqué. On commence par calculer les facteurs d'échelle du jeu de coordonnées (λ, μ, ν) . On trouve

$$h_\lambda^2 = \frac{(\lambda - \nu)(\lambda - \mu)}{4(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)} \quad , \quad h_\mu^2 = \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)}{4(\mu - a^2)(\mu - b^2)(\mu - c^2)} \quad , \quad h_\nu^2 = \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{4(\nu - a^2)(\nu - b^2)(\nu - c^2)} \quad . \quad (\text{E.9})$$

On en déduit l'équation de Poisson par calcul du Laplacien et les moments conjugués p_λ , p_μ , p_ν .

Annexe F

Constantes physiques et astrophysiques

π	= 3.14159265358979	
h	= $6.626075540 \times 10^{-34}$ J s	Constante de Planck
G	= $6.6725985 \times 10^{-11}$ m ³ s ⁻² kg ⁻¹	Constante de la gravitation
c	= 299792.458 km s ⁻¹	Vitesse de la lumière
k	= $1.38065812 \times 10^{-23}$ J K ⁻¹	Constante de Boltzmann
u.m.a	= $1.660540210 \times 10^{-27}$ kg	Unité de masse atomique
$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$	= 5.6705119×10^{-8} W m ⁻² K ⁻⁴	Constante de Stefan-Boltzmann
m_p	= $1.672623110 \times 10^{-27}$ kg	Masse du proton
m_n	= $1.674928610 \times 10^{-27}$ kg	Masse du neutron
m_e	= $9.109389754 \times 10^{-31}$ kg	Masse de l'électron
e	= $1.6021773349 \times 10^{-19}$ C	Charge élémentaire
ϵ_0	= $8.854187817 \times 10^{-12}$ C ² kg ⁻¹ m ⁻³ s	Permittivité du vide
AU	= $1.4959787061 \times 10^{11}$ m	Unité astronomique
ly	= 9.460530×10^{15} m	Année lumière
pc	= 3.085678×10^{16} m = 206264.806 UA	Parsec
M_\odot	= 1.9891×10^{30} kg	Masse du Soleil
R_\odot	= 695980 km	Rayon du Soleil
L_\odot	= 3.8268×10^{26} W	Luminosité du Soleil
$T_{\text{eff},\odot}$	= 5790 K	Température effective du Soleil
M_\oplus	= 5.9742×10^{24} kg	Masse de la Terre
R_\oplus	= 6378.140 km	Rayon équatorial Terrestre
année	= $3.15569259747 \times 10^7$ s = 365.24219 jours	Année tropique Terrestre
jour	= 86400 s	Jour

Bibliographie

Ouvrages généraux (vulgarisation ou non)

- *Le grand atlas de l'astronomie*, Encyclopediæ Universalis
- *Astrophysics (2 volumes)*, R.L., Bowers, T. Deeming, Jones and Barlett Publishers (1984)
- *Galactic Dynamics*, J. Binney, S. Tremaine, Princeton series in Astrophysics (La Bible dans ce domaine. . .)
- *Handbook of mathematical functions*, M. Abramowitz, I. Stegun, Dover Publications, New York (1972)
- *Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste*, D. Benest & C. Froeschlé, eds., Ed. Frontières, Gif-sur-Yvette, France
- *Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System dynamics*, A. Morbidelli, Advances in Astronomy and Astrophysics, Taylor & Francis, London (2002)

Quelques articles spécialisés (liste non exhaustive !)

- K. Batygin & M.E. Brown, 2016, *Astrophys. J.* **151**, 22
- G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.M. Strelcyn, 1980, *Meccanica* March, 21
- H. Beust, X. Bonfils, X. Delfosse, S. Udry, 2008, *Astron. Astrophys.* **479**, 277
- P. Bretagnon, 1974, *Astron. Astrophys.* **30**, 141
- O. Bienaymé, 1999, *Astron. Astrophys.* **341**, 86
- P. Cincotta, C.M. Giordano, 2001, Preprint obs. La Plata, Argentina
- P. Cincotta, C. Simó, 2000, *Astron. Astrophys. Suppl.* **147**, 205
- M.J. Duncan, H.F. Levison, S.M. Budd, 1995, *Astron. J* **110**, 3073
- A.S. Eddington, 1916, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **76**, 572
- E.B. Ford, B. Kozinsky, F.A. Rasio F.A., 2000, *Astrophys. J.* **535**, 385
- K.C. Freeman, 1970, *Astrophys. J* **160**, 811
- J. Heidmann, N. Heidmann, G. de Vaucouleurs, 1972, *Mem. R. Astron. Soc.* **75**, 85
- J. Henrard, 1970, *Celest. Mech.* **1**, 437
- P. Hut, 1981, *Astron. Astrophys.* **99**, 126
- J.H. Jeans, 1915, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **76**, 70
- I.R. King, 1966, *Astron. J* **71**, 64
- Y. Kozai, 1962, *Astron. J.* **67**, 591
- Y. Krymolowski Y., T. Mazeh, 1999, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **304**, 720
- J. Laskar, 1993, *Nature* **361**, 608
- J. Laskar, P. Robutel, 1993, *Nature* **361**, 608
- J. Laskar, 1994, *Astron. Astrophys.* **99**, 126
- J. Laskar, 1999, in *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, C. Simó (Ed.), Kluwer, Dordrecht, 134

- H.F. Levison, M.J. Duncan, 1994, *Icarus*, **287**, L9
- D. Lynden-Bell, 1967, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **136**, 101
- M. Mayor, X. Bonfils, T. Forveille, et al., 2009, *Astron. Astrophys.* **507**, 487
- M. Moons, A. Morbidelli, 1995, *Icarus* **114**, 33
- A. Morbidelli, M. Moons, 1992, *Icarus* **102**, 316
- M. Moons, A. Morbidelli, F. Migliorini, 1998, *Icarus* **135**, 458
- W.W. Morgan, 1958, *Publ. Astron. Soc. Pacific* **70**, 415
- N. Murray & M. Holman, 1999, *Science* **283**, 1877
- H. di Nella, W.J. Couch, G. Paturel, Q.A. Parker, 1996, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283**, 367
- P. Robutel, J. Laskar, 2001, *Icarus* **152**, 4
- P. Schechter, 1976, *Astrophys. J.* **203**, 297
- F.H. Shu, 1970, *Astron. J.* **160**, 99
- V. Szebehely & G.E. Giacaglia, 1964, *Astron. J.* **69**, 230
- A. Toomre, 1964, *Astrophys. J.* **139**, 1217
- A. Toomre, 1969, *Astrophys. J.* **158**, 899
- A. Toomre, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **15**, 437 (1977) (Structure spirale des galaxies)
- A. Toomre, In : The structure and evolution of normal galaxies Proceedings of the Advanced Study Institute, Cambridge, England, August 3-15, 1980. Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1981, p. 111-136.
- S. Van den Bergh, « Stellar populations in galaxies », *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **13**, 217 (1975)
- M. Yoshikawa M., 1989, *Astron. Astrophys.* **213**, 436
- R.E. Zeebe, 2017, arXiv :1709.04845
- T. de Zeeuw, 1985, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **216**, 273