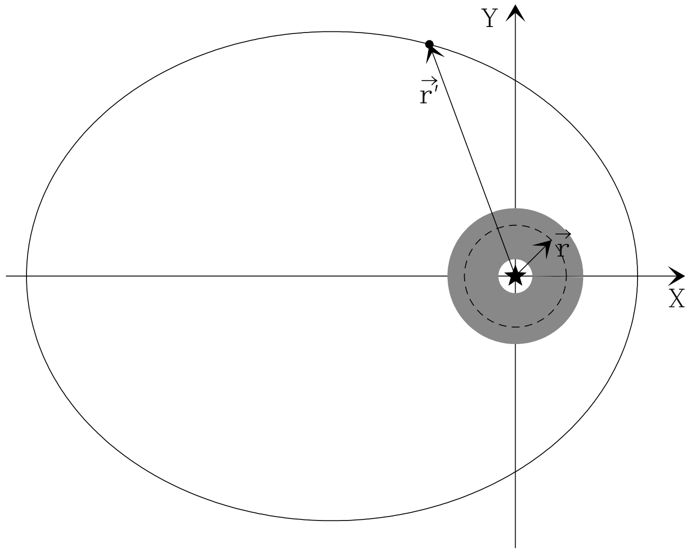
Master 2 Astrophysique
Gravitation, Galaxies

H. Beust

1er février 2017

I Disque perturbé par une planète externe

On considère un disque circumstellaire plan en orbite autour d'une étoile de masse M. On suppose en outre qu'à l'extérieur de ce disque, une planète de masse $m' \ll M$ est en orbite autour de l'étoile dans le même plan que le disque. L'orbite de cette planète sera caractérisée par un demi-grand axe a', une excentricité e', et une longitude du périastre ϖ' par rapport à une direction fixe dans le plan du disque. De manière générale, toutes les quantités primées se rapporteront à la planète. Je précise ici que nous considérons un problème plan (toutes les orbites sont dans le même plan), et que donc il est inutile de considérer d'autres éléments d'orbite comme les inclinaisons et les longitudes de nœuds.



1) Nous supposerons que l'orbite de la planète est fixe dans le temps, et ne subit aucune perturbation. A quelle(s) condition(s) cette approximation peut-elle être considérée comme valable ?

2) Dans ces conditions, nous considérerons dorénavant pour simplifier les calculs que la longitude du périastre de la planète vaut $\varpi' = 0$, ce qui est la situation représentée ci-dessus. Pourquoi cette supposition ne restreint-elle en rien la généralité de notre étude ?

Nous prenons maintenant une particule du disque, en orbite autour de l'étoile sur une orbite de demi-grand axe a, excentricité e et longitude du périastre ϖ. Le but de l'exercice est d'étudier l'effet des perturbations de la planète sur l'orbite de la particule.

On désigne par $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ les vecteurs positions instantanés de la particule et de la planète, et par r et r' les normes correspondantes. Le Hamiltonien qui régit le mouvement de la particule s'écrit alors

$$H = -\frac{GM}{2a} - Gm'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r'^3}\right) \qquad , \tag{1}$$

le terme $|\vec{r}-\vec{r'}|$ désignant ici la norme de la différence entre les deux vecteurs, et donc la distance instantanée entre la particule et la planète.

3) Dans cette expression, que représentent le premier et le deuxième terme ? Lequel est le plus important ? Dans la parenthèse du deuxième terme, que représentent chacun des deux termes ? Quelle est l'origine du deuxième ?

4) Pourquoi peut-on supposer (ce que nous ferons désormais) $r \ll r'$? Tenant compte de cela, et en désignant par β l'angle entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r'}$, montrer que le Hamiltonien se développe comme suit :

$$H = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm'}{r'}\left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos\beta)\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right) \qquad , \tag{2}$$

où P_n désigne le n-ième polynôme de Legendre. A ce titre je rappelle que le produit scalaire des deux vecteurs vérifie $\vec{r}\cdot\vec{r'} = rr'\cos\beta$, et qu'on a le développement classique, valable pour $x < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos\beta + x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\beta)x^n \qquad . \tag{3}$$

Je rappelle aussi que les deux premiers polynômes de Legendre sont $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$. La suite de l'étude consiste à tronquer le développement en série à un certain ordre et à moyenner les termes restants indépendamment sur les deux orbites.

5) Pour quelles raisons peut-on être à peu près certain que ces opérations sont ici justifiées ? Dans quelle situation ne pourrait-on pas moyenner indépendamment ?

6) Dans le cadre du processus de moyennisation, le demi-grand axe a de la particule devient une constante du mouvement (on parle d'invariant séculaire). Quelle base théorique permet d'affirmer ceci sans le moindre calcul ?

Pour les besoins de notre étude, nous allons limiter le développement à $n = 3$. Dans ces conditions, les calculs de moyennisation conduisent au résultat suivant :

$$\overline{H} = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm'}{a} + U_2 + U_3 \tag{4}$$

avec

$$U_2 = -\frac{Gm'}{8}\frac{a^2}{a'^3}\frac{3e^2+2}{(1-e'^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad U_3 = \frac{15Gm'}{64}\frac{a^3}{a'^4}\frac{e\,e'(3e^2+4)\cos\varpi}{(1-e'^2)^{5/2}} \qquad . \tag{5}$$

Pour la suite de notre étude, nous allons utiliser les éléments canoniquement conjugués de Poincaré introduits dans le cours. Je rappelle que ceux-ci peuvent s'écrire

$$\left(\begin{array}{c} q_1 = \lambda \longleftrightarrow p_1 = \sqrt{GMa} \\ q_2 = -(GMa)^{1/4}\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\,\sin\varpi \longleftrightarrow p_2 = (GMa)^{1/4}\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\,\cos\varpi \\ q_3 = -(GMa)^{1/4}\sqrt{2\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}\,\sin\Omega \longleftrightarrow p_3 = (GMa)^{1/4}\sqrt{2\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}\,\cos\Omega \end{array}\right) \quad , \tag{6}$$

où λ, i et Ω représentent respectivement la longitude moyenne, l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant.

7) Expliquer pourquoi dans le cadre de notre étude tel que nous l'avons défini dans les questions précédentes, nous allons pouvoir laisser tomber les couples de variables conjuguées (q_1, p_1) et (q_3, p_3) pour ne garder que (q_2, p_2), ce qui revient à considérer que la Hamiltonien $\overline{H}$ est à un degré de liberté.

Dorénavant, pour alléger l'écriture nous appellerons (q_2, p_2) tout simplement (q, p). Nous allons en outre supposer désormais que l'excentricité e de la particule est une quantité petite $\ll 1$.

8) En effectuant un développement limité au premier ordre, montrer que cette approximation permet de donner une expression simplifiée des variables conjuguées (q, p). Donner cette expression que nous adopterons désormais. Introduire alors le moyen mouvement n, relié au demi-grand axe et à la masse de l'étoile par la troisième loi de Képler et donner l'expression de q et de p en fonction de a, n, e et ϖ (c'est plus simple).

9) Utiliser ensuite ce résultat pour donner les expressions de U_2 et U_3 en fonction de p et q au lieu de e et ϖ. Là aussi, on utilisera la troisième loi de Képler pour simplifier le résultat. Simplifier les expressions obtenues en ne retenant que les termes d'ordre au plus 2 en p et q et en éliminant les termes d'ordre supérieur. Qu'est-ce qui nous permet cette approximation ? On montrera en définitive qu'on arrive au résultat suivant :

$$U_2 = -\frac{1}{8}\,n\,\frac{a^3}{a'^3}\frac{m'}{M}\frac{2na^2+3p^2+3q^2}{(1-e'^2)^{3/2}} \qquad\qquad U_3 = \frac{15}{16}\,n^{3/2}\,\frac{a^5}{a'^4}\frac{m'}{M}\frac{p\,e'}{(1-e'^2)^{5/2}} \quad . \tag{7}$$

10) Ecrire les équations canoniques pour en déduire les dérivées temporelles $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$.

11) Pour simplifier l'étude, nous introduirons deux nouvelles variables $k = e\cos\varpi$ et $h = e\sin\varpi$. Montrer que ces variables sont très simplement reliées aux éléments q et p, et en déduire les dérivées temporelles $\mathrm{d}k/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$. On montrera que ces expressions se mettent sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -Ah \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = Ak - B \qquad , \tag{8}$$

où A et B sont des coefficients constants et positifs dont on donnera l'expression en fonction de a, a', m', M, n et e'.

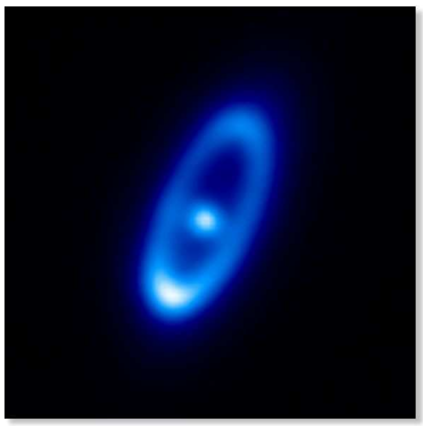
12) On introduit maintenant la variable complexe $\zeta = k + ih = e\ \exp(i\varpi)$. Montrer que ζ obéit à une équation différentielle très simple fonction de A et B. Résoudre cette équation pour trouver $\zeta(t)$. On dira qu'à $t = 0$ on a $\zeta(0) = \zeta_0$. Il pourra être utile de considérer $\zeta - B/A$ comme fonction auxiliaire.

13) Montrer que l'évolution temporelle de ζ, et donc celle de k, h, e et ϖ est périodique. Donner l'expression de la période du mouvement en fonction de A puis en fonction des constantes du problème. Montrer que cette période est grande devant la période orbitale de la particule. Est-ce normal ? Faites l'application numérique en prenant $M = 1\,M_\odot$, $m = 1\,M_{\mathrm{Jupiter}} = 1/1047.355\,M_\odot$, $a' = 300\,\mathrm{UA}$, $e' = 0.5$, $a = 70\,\mathrm{AU}$.

14) Montrer que dans le plan complexe, la trajectoire de $\zeta(t)$ est un cercle dont on donnera le rayon et la position du centre en fonction de A, B et ζ_0. Faire un schéma. En déduire que l'excentricité e de la particule évolue de manière périodique entre un mininum et un maximum et que le maximum est nécessairement atteint lorsque $\varpi = 0$.

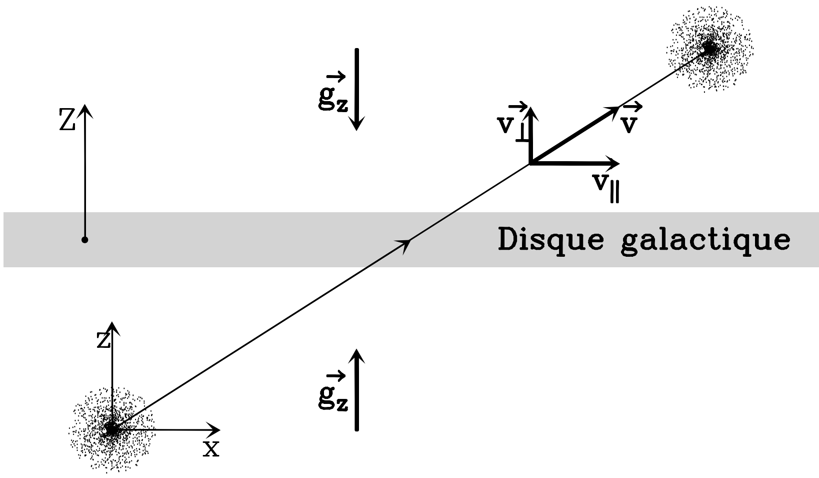
15) On suppose maintenant qu'à $t = 0$, l'excentricité est nulle. Donner alors dans ce cas la solution du mouvement en $\zeta(t)$, puis en $(k(t), h(t))$, et enfin l'expression de l'excentricité maximale $e_{\max}$ en fonction des constantes du problème (il ne doit rester que e' et a/a'). En déduire que l'hypothèse faite juste avant la question (9) est justifiée a posteriori.

L'image ci-contre représente un disque imagé autour de l'étoile au centre. Une planète (non visible ici) est présente à l'extérieur du disque. Le disque est constitué de particules qui diffusent la lumière de l'étoile. La dynamique des particules s'inscrit dans le cadre du modèle décrit dans les questions précédentes en suivant un cycle d'évolution de l'excentricité couplé à celui de ϖ.



16) Le disque a un aspect clairement dissymétrique par rapport à l'étoile et le côté du péricentre est clairement plus lumineux. Ce phénomène appelé *pericenter glow* (Wyatt 1999) a été identifié dans plusieurs disques de ce type. Comment peut-on expliquer ce phénomène dans le cadre du modèle que nous avons décrit ?

II Traversée du disque galactique par un amas globulaire



Un amas globulaire est un système stellaire de 10^4 à 10^6 étoiles, de symétrie sphérique autour de son centre. Les amas globulaires font partie du halo de la Galaxie et sont situés de part et d'autre du disque galactique. Chacun d'entre eux décrit une orbite autour du centre de la Galaxie, et à cause de ce mouvement les amas traversent régulièrement le disque galactique. Cette traversée engendre une perturbation des étoiles de l'amas appelée *choc par le disque*. C'est la description de ce phénomène qui fait l'objet de ce problème et qui est représenté sur le schéma.

Nous considérerons donc un amas globulaire dont le centre est supposé se déplacer en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}$ (approximation largement valide compte tenu de la durée de la traversée). On décompose cette vitesse en une composante $\vec{V}_\parallel$ parallèle au disque et une composante $\vec{V}_\perp$ perpendiculaire au disque.

Nous décrirons l'amas globulaire au moyen du *modèle de Plummer* (voir polycopié page 34), caractérisé par un potentiel $U(r)$ et une densité $\rho(r)$ vérifiant

$$U(r) = \frac{U_0}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{3b^2}}} \quad \text{et} \quad \rho(r) = \frac{M}{4\pi b^3\sqrt{3}\left(1+\dfrac{r^2}{3b^2}\right)^{5/2}} \quad , \quad \text{avec} \quad M = -\frac{bU_0\sqrt{3}}{G} \quad . \tag{9}$$

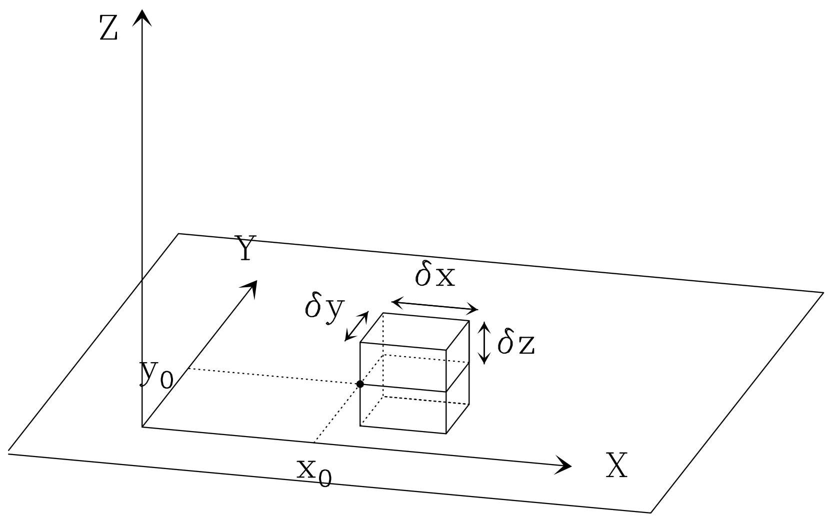
1) A partir de l'expression du potentiel $U(r)$, calculer la vitesse circulaire $v_c(r)$ d'une étoile en mouvement sur orbite circulaire de rayon r dans l'amas. En déduire l'expression de la période orbitale $T(r)$ correspondante.

2) Faire l'application numérique en prenant comme valeurs standard $M = 6\times10^5\, M_\odot$ et $b = 1.5\,\mathrm{pc}$. Calculer $T(r)$ (en années...) pour $r = b$, $r = 25\,\mathrm{pc}$ et $r = 50\,\mathrm{pc}$ (rayon de marée de l'amas).

Le disque galactique possède une épaisseur de l'ordre de 300 pc. L'étude du phénomène de choc par le disque se fait traditionnellement au moyen de l'approximation dite *impulsionnelle* qui consiste à dire que la position des étoiles à l'intérieur de l'amas n'a pas le temps de changer significativement pendant le temps de la traversée du disque. Cela revient à dire que le temps de traversée est petit devant la période orbitale des étoiles autour du centre de l'amas.

3) Calculer le temps de traversée du disque galactique (épaisseur 300 pc) en prenant $V_\perp = 170\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ qui est une valeur typique. Comparer ensuite aux valeurs des périodes orbitales à différents rayons calculées à la question précédente et conclure sur la validité de l'approximation. Est-elle justifiée jusqu'au centre de l'amas ? Pourquoi n'est-ce pas gênant ?

En dépit de son épaisseur non négligeable, nous modéliserons par la suite le champ gravitationnel du disque galactique comme celui d'un disque infiniment mince et homogène.



On suppose donc une surface plane infinie, de densité de surface uniforme σ. L'espace est rapporté à un repère cartésien $OXYZ$. La surface massive est supposée coïncider avec le plan XOY. On cherche à calculer le champ gravitationnel $\vec{g}(X, Y, Z)$ en tout point de coordonnées (X, Y, Z) de l'espace.

4) Compte tenu des symétries du problème, le champ dépend-il de X et Y ? Dans quelle direction est-il dirigé ?

5) On considère un élément de volume parallélépipédique situé de part et d'autre de la surface, de dimensions $(2\delta z) \times \delta x \times \delta y$, ou encore délimité par les conditions $-\delta z \leq Z \leq \delta z$, $x_0 \leq X \leq x_0 + \delta x$ et $y_0 \leq Y \leq y_0 + \delta x$ (voir figure). En appliquant à ce volume le théorème de Gauss (rappelé dans l'annexe A.2 du cours), et en utilisant les symétries du problème, donner l'expression de $g(Z)$ en tout point de l'espace. On prendra soin de distinguer les cas $Z > 0$ et $Z < 0$.

Revenons maintenant à la traversée du disque par l'amas. Pour repérer les étoiles dans l'amas, nous prendrons comme indiqué sur la figure de la page 4 un repère cartésien (Ox, Oy, Oz) centré sur le centre O de l'amas et tel que l'axe Oz soit perpendiculaire au disque galactique. La hauteur de O par rapport au plan galactique sera notée quant à elle Z.

On considère une étoile repérée dans l'amas au moyen de ses coordonnées $\vec{r}(x, y, z)$. A chaque instant, elle subit une accélération supplémentaire $\vec{g}$ due au champ gravitationnel du disque. Sur l'ensemble de la traversée, cette accélération occasionne un changement de vitesse

$$\vec{\delta v}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{g}(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}t \quad . \tag{10}$$

Notez que pour l'instant on ne fait aucune hypothèse sur la forme de $\vec{g}$. Nous introduirons sa dépendance en Z plus loin. Le centre de masse de l'amas subira quant à lui le changement de vitesse

$$\vec{\delta v}_{\mathrm{cdm}} = \frac{1}{M} \iiint_{\mathrm{amas}} \rho(\vec{r'})\,\vec{\delta v}(\vec{r'})\,\mathrm{d}^3\vec{r'} \quad . \tag{11}$$

Ce qui nous intéresse, c'est le changement de vitesse $\vec{\delta v}(\vec{r}) = \vec{\delta v}_0(\vec{r}) - \vec{\delta v}_{\mathrm{cdm}}$ de l'étoile *par rapport au centre de l'amas* qui s'écrit nécessairement

$$\vec{\delta v}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\vec{g}(\vec{r}, t) - \frac{1}{M} \iiint_{\mathrm{amas}} \rho(\vec{r'})\vec{g}(\vec{r'}, t)\,\mathrm{d}^3\vec{r'}\right] \mathrm{d}t \quad . \tag{12}$$

L'amas est de petite taille par rapport au disque galactique. Nous allons faire un développement limité au premier ordre de $\vec{g}$ dans l'intégrale :

$$\vec{g}(\vec{r}, t) \simeq \vec{g}(O) + \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial z}\right)_O z \quad , \tag{13}$$

les quantités indicées "O" étant entendues prises au centre O de l'amas.

6) Compte tenu des résultats concernant les symétries du champ $\vec{g}$ quelle est la direction de $\vec{\delta v}(\vec{r})$? Pourquoi seule la coordonnée z apparaît-elle dans le développement limité ?

7) En injectant (deux fois de suite) le développement limité dans l'intégrale, montrer que l'expression de $\vec{\delta v}(\vec{r})$ peut se réduire à

$$\vec{\delta v}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial z}\right)_O z \, \mathrm{d}t \quad . \tag{14}$$

N.B. : On utilisera le fait que $\int_{\text{amas}} \rho(\vec{r'}) z \, \mathrm{d}^3\vec{r'} = 0$ *qui résulte de la définition du barycentre.*

8) L'axe Oz étant vertical, la dérivée partielle $(\partial \vec{g}/\partial z)_O$ se confond avec $\mathrm{d}\vec{g}/\mathrm{d}Z$, où Z est la hauteur de O par rapport au plan galactique. Dans l'intégrale précédente, effectuer le changement de variable $t \to Z$, et montrer (on utilisera les propriétés de symétrie du champ) que lors d'une traversée qui va de $-Z_{\max}$ à $+Z_{\max}$, le changement de vitesse se calcule et s'écrit

$$\vec{\delta v}(\vec{r}) = \frac{2z}{V_\perp} \, \vec{g}(Z_{\max}) \quad . \tag{15}$$

9) Injecter l'expression de $\vec{g}(Z)$ calculée précédemment pour donner l'expression finale de $\vec{\delta v}(\vec{r})$. Si nous avions injecté cette expression de $\vec{g}$ au niveau de l'équation (14), qu'aurions-nous trouvé pour $\vec{\delta v}(\vec{r})$? Pourquoi cette opération donne-t-elle de prime abord un résultat faux ? Où serait l'erreur ?

L'orbite de l'étoile considérée est supposée circulaire. On la suppose inclinée d'un angle i par rapport au plan XOY. Sa vitesse avant perturbation est $\vec{v}_{\mathrm{c}}(\vec{r})$. Quitte à choisir convenablement les axes Ox et Oy on peut montrer que les composantes de $\vec{v}_{\mathrm{c}}(\vec{r})$ dans le repère (Ox, Oy, Oz) sont $(-v_{\mathrm{c}}(r) \sin\lambda, v_{\mathrm{c}}(r) \cos\lambda \cos i, v_{\mathrm{c}}(r) \cos\lambda \sin i)$, où λ est un angle traduisant la position de l'étoile sur son orbite au moment de la traversée.

10) La vitesse après la traversée vaut $\vec{v'}(\vec{r}) = \vec{v}_{\mathrm{c}}(\vec{r}) + \vec{\delta v}(\vec{r})$. Montrer alors le résultat suivant :

$$v'(\vec{r})^2 = v_{\mathrm{c}}(r)^2 + 2v_{\mathrm{c}}(r) \cos\lambda \sin i \, \delta v(\vec{r}) + \delta v(\vec{r})^2 \tag{16}$$

11) L'amas va traverser de nombreuses fois le plan galactique. A chaque fois la position de l'étoile sur son orbite (l'angle λ) sera différente, de telle sorte que sur un grand nombre n de passages, l'angle λ peut être considéré comme aléatoire. En déduire une expression simplifiée de $v'(\vec{r})^2$ au bout de n passages (On prendra pour z^2 une moyenne $\overline{z}^2$) .

12) En déduire l'expression de l'énergie mécanique (cinétique+potentielle) $E'(r)$ de cette étoile par rapport à l'amas au bout de n passages, si sa masse est m. On utilisera le modèle de Plummer et on remplacera U_0 par sa valeur en fonction de M.

13) A quelle condition sur $E'(r)$ l'étoile ne sera-t-elle plus liée gravitationnellement à l'amas ? Que se passe-t-il alors ? Donner en fonction de r le nombre n_{a} de passages au bout duquel cela arrive.

14) Faire l'application numérique avec les valeurs données plus haut et $r = 50\,\mathrm{pc}$, $r = 10\,\mathrm{pc}$ et $r = b$. On prendra $\overline{z}^2 = r^2/3$ (distribution sphérique). On prendra également $\sigma = 250\, M_\odot\,\mathrm{pc}^{-2}$ qui est la valeur standard à mi-distance entre le centre galactique et le Soleil. C'est typiquement à cette distance que la plupart des amas globulaires traversent le disque.

La période orbitale d'un amas globulaire autour de la galaxie est de 10^8 ans. Sachant qu'il y a deux traversées du disque par période orbitale, donner le temps t_{a} au bout duquel les n_{a} passages sont faits. Faire l'application numérique dans les trois cas, et comparer à l'âge de l'Univers (1.3×10^{10} ans). Conclure.