

# Master 2 Astrophysique

## Gravitation, Galaxies – Corrigé

H. Beust

1<sup>er</sup> février 2017

### I Disque perturbé par une planète externe

- 1) Les perturbations que pourrait subir l'orbite de la planète peuvent provenir soit du disque lui-même, soit des étoiles de passage. Nous supposons donc que la masse du disque reste petite devant celle de la planète et que sur le temps de notre étude, aucune étoile ne s'approche suffisamment près du système que nous considérerons isolé.
- 2) Dans le plan de notre étude, les directions  $OX$  et  $OY$  du repère choisi sont complètement arbitraires. Dans la mesure où l'orbite de la planète est fixe, rien n'interdit de fixer la direction  $OX$  dans la direction du périastre de la planète, ce qui revient à fixer  $\varpi' = 0$ . Si nous gardions un  $\varpi' \neq 0$ , tous les calculs qui vont suivre se feraient en fonction de  $\varpi - \varpi'$  au lieu de  $\varpi$ . Cela alourdirait l'écriture pour rien.
- 3) Le premier terme est bien évidemment le Hamiltonien Képlérien qui décrit l'orbite de la particule autour de l'étoile. Le deuxième représente la perturbation due à la planète. Elle se décompose en un terme direct (le premier) qui représente l'énergie potentielle directe de l'interaction gravitationnelle entre la planète et la particule, et un terme indirect (le deuxième) lié aux forces d'inertie. En effet, dû à la présence de la planète, le référentiel lié à l'étoile n'est pas inertiel (l'étoile a un mouvement). Il en résulte des forces d'inertie dont la traduction dans le Hamiltonien est donnée par le terme indirect.
- 4)  $r \ll r'$  signifie que la planète est en orbite à grande distance à l'extérieur du disque, ce qui correspond bien au cadre de notre étude. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \beta + r'^2}} = \frac{1}{r' \sqrt{1 - 2\frac{r}{r'} \cos \beta + \frac{r^2}{r'^2}}} \\ &= \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos \beta) \left(\frac{r}{r'}\right)^n = \frac{1}{r'} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(\cos \beta) \left(\frac{r}{r'}\right)^n\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Ensuite, on écrit pour le terme indirect

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} = \frac{r \cos \beta}{r'^2} \quad , \quad (2)$$

et on remarque que ce terme va exactement compenser le terme  $n = 1$  dans le développement en polynômes de Legendre. La somme va donc commencer à  $n = 2$ . Au bout du compte, l'ensemble se réarrange sous la forme

$$H = -\frac{GM}{2a} - \frac{Gm'}{r'} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos \beta) \left(\frac{r}{r'}\right)^n\right) \quad . \quad (3)$$

- 5) La condition  $r' \ll r$  garantit que le développement en série va converger rapidement et autorise la troncature. Ensuite, le fait de pouvoir moyenner indépendamment sur les deux orbites est licite pourvu qu'elles ne soient pas dans une résonance de moyen mouvement. Compte tenu de  $r' \ll r$ , les périodes orbitales des deux orbites sont aussi très différentes, et il est donc très peu probable que la particule se trouve calée dans une forte résonance de moyen mouvement avec la planète.
- 6) En éléments de Delaunay, l'anomalie moyenne (qui représente la position de la particule sur son orbite), est canoniquement conjuguée à la quantité  $L = \sqrt{GMa}$ . Moyenner revient à éliminer l'anomalie moyenne. Le Hamiltonien moyenné ne dépend donc pas de l'anomalie moyenne. Par voie de conséquence, le moment conjugué  $L$  est une constante du mouvement, ce qui revient à dire que le demi-grand axe  $a$  est constant.
- 7) Le Hamiltonien moyenné ne dépend pas de  $q_1 = \lambda$ , et donc  $p_1 = L$  est une constante qui peut être considéré comme un paramètre. Quant  $q_3$  et  $p_3$ , ils sont identiquement nuls à chaque instant du fait que nous considérons un problème plan ( $i = 0$ ). On peut donc les oublier. Seuls  $(q_2, p_2)$  vont varier.
- 8) En développant au premier ordre, on a

$$\sqrt{1 - e^2} \simeq 1 - \frac{e^2}{2} \implies \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e^2})} \simeq e \quad (4)$$

On en déduit l'approximation

$$q \simeq -(GMa)^{1/4} e \sin \varpi \quad \text{et} \quad p \simeq (GMa)^{1/4} e \cos \varpi \quad . \quad (5)$$

Ensuite la troisième loi de Képler s'écrit  $n^2 a^3 = GM$ . En remplaçant dans les expressions précédentes, il vient

$$q \simeq -a\sqrt{n} e \sin \varpi \quad \text{et} \quad p \simeq a\sqrt{n} e \cos \varpi \quad . \quad (6)$$

- 9) On inverse alors la relation pour exprimer  $e$  et  $\varpi$  en fonction de  $q$  et  $p$ . Il n'y a qu'à ensuite remplacer dans les expressions de  $U_2$  et  $U_3$ . Il vient

$$U_2 = -\frac{GMm'}{8M} \frac{a^2}{a'^3} \frac{3e^2 + 2}{(1 - e'^2)^{3/2}} = -\frac{n^2 a^5 m'}{8M a'^3} \frac{3(p^2 + q^2)/(na^2) + 2}{(1 - e'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{8} n \frac{a^3}{a'^3} \frac{m'}{M} \frac{2na^2 + 3p^2 + 3q^2}{(1 - e'^2)^{3/2}} \quad (7)$$

$$U_3 = \frac{15GMm'}{64M} \frac{a^3}{a'^4} \frac{e e' (3e^2 + 4) \cos \varpi}{(1 - e'^2)^{5/2}} = \frac{45}{64} \frac{pm'}{M} \frac{((4/3)a^2 n + p^2 + q^2) \sqrt{n} a^3 e'}{M(1 - e'^2)^{5/2} a'^4} \quad (8)$$

Ensuite, on remarque que les termes d'ordre 3 en  $p$  et  $q$  peuvent être négligés devant le terme d'ordre 1. En effet, si  $e$  est petit, il en va tout autant de  $q$  et  $p$ . L'expression se simplifie alors. Il reste

$$U_3 = \frac{15}{16} n^{3/2} \frac{a^5}{a'^4} \frac{m'}{M} \frac{p e'}{(1 - e'^2)^{5/2}} \quad . \quad (9)$$

- 10) Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial U_2}{\partial p} + \frac{\partial U_3}{\partial p} = -\frac{3m'}{4M} \frac{a^3}{a'^3} \frac{np}{(1 - e'^2)^{3/2}} + \frac{15m'}{16M} \frac{a^5}{a'^4} \frac{n^{3/2} e'}{(1 - e'^2)^{5/2}} \quad (10)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U_2}{\partial q} - \frac{\partial U_3}{\partial q} = \frac{3m'}{4M} \frac{a^3}{a'^3} \frac{nq}{(1 - e'^2)^{3/2}} \quad . \quad (11)$$

- 11) Compte tenu des expressions adoptées pour  $q$  et  $p$ , on clairement  $p = a\sqrt{n}k$  et  $q = -a\sqrt{n}h$ . On en déduit immédiatement

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{a\sqrt{n}} \frac{dp}{dt} = \frac{3m' a^2}{4M a^3} \frac{q\sqrt{n}}{(1-e'^2)^{3/2}} = -\frac{3m' a^3}{4M a^3} \frac{nh}{(1-e'^2)^{3/2}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{1}{a\sqrt{n}} \frac{dq}{dt} = \frac{3m' a^2}{4M a^3} \frac{p\sqrt{n}}{(1-e'^2)^{3/2}} - \frac{15m' a^4}{16M a^4} \frac{ne'}{(1-e'^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3m' a^3}{4M a^3} \frac{nk}{(1-e'^2)^{3/2}} - \frac{15m' a^4}{16M a^4} \frac{ne'}{(1-e'^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (13)$$

C'est-à-dire la forme annoncée moyennant

$$A = \frac{3m' a^3}{4M a^3} \frac{n}{(1-e'^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad B = \frac{15m' a^4}{16M a^4} \frac{ne'}{(1-e'^2)^{5/2}} \quad (14)$$

- 12) On écrit tout simplement

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dk}{dt} + i \frac{dh}{dt} = -Ah + ikA - iB = iA(k + ih) - iB = iA\zeta - iB = iA \left( \zeta - \frac{B}{A} \right) \quad (15)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre à coefficients constants, qui se résout très simplement. Si on pose  $\xi = \zeta - B/A$  on est ramené à une équation sans second membre dont la solution est une exponentielle simple. On peut aussi dire que la solution générale est la somme de l'équation sans second membre (donc l'exponentielle), à laquelle on ajoute la solution particulière constante  $B/A$ . Au bout du compte, on trouve la solution suivante

$$\zeta(t) = \frac{B}{A} + \left( \zeta_0 - \frac{B}{A} \right) e^{iAt} \quad (16)$$

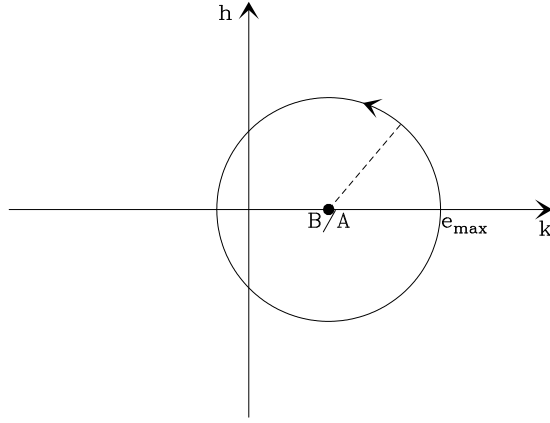
- 13) Clairement, avec l'exponentielle complexe, l'expression de  $\zeta(t)$  est périodique, de période  $T = 2\pi/A$ . Il en sera de même pour  $k$ ,  $h$ ,  $e$  et  $\varpi$  qui sont respectivement les partie réelle, partie imaginaire, module et argument de  $\zeta$ . On a

$$T = \frac{2\pi}{A} = \frac{4M a^3}{3m' a^3} \frac{2\pi(1-e'^2)^{3/2}}{n} = \frac{4M a^3}{3m' a^3} (1-e'^2)^{3/2} P \quad (17)$$

si  $P = 2\pi/n$  représente la période orbitale de la particule autour de l'étoile. Compte tenu de  $M \gg m'$  et  $a' \gg a$ , on a clairement  $T \gg P$ . C'est parfaitement normal compte tenu du fait que l'évolution de l'orbite doit intervenir sur un temps beaucoup plus long que le temps de la période orbitale (c'est une perturbation). Pour l'application numérique, on peut commencer par calculer  $T/P$  ce qui ne nécessite aucun conversion d'unité. On trouve  $T/P = 3887.3$ , ce qui confirme bien l'affirmation du dessus. Ensuite, pour calculer  $P$  on utilise la troisième loi de Képler. Il vient  $P = 585.7$  ans puis  $T = 2.277$  millions d'années. Au passage pour calculer  $P$  il est inutile de faire des conversions d'unités compliqués. Avec  $M = 1 M_\odot$ ,  $P$  en années se calcule comme  $a^{3/2}$  si  $a$  est en AUs. Réfléchissez-y, vous verrez que c'est évident.

- 14) Dans le plan complexe,  $\xi = \zeta - B/A$  est clairement de module constant  $|\xi_0|$  et d'argument  $\arg(\xi_0) + At$  augmentant linéairement avec le temps.  $\xi$  décrit à vitesse constante un cercle centré sur l'origine de rayon  $|\xi_0|$ . La trajectoire de  $\zeta$  sera donc elle aussi un cercle de même rayon mais décalé, centré sur  $B/A$ . Comme  $k$  et  $h$  ne sont que les parties réelle et imaginaire de  $\zeta$ , le mouvement dans le plan  $(k, h)$  sera identique. Le rayon du cercle s'écrit

$$R = \left| \zeta_0 - \frac{B}{A} \right| = \sqrt{\left( k_0 - \frac{B}{A} \right)^2 + h_0^2} \quad (18)$$



L'excentricité  $e$  est le module de  $\zeta$ . Comme le cercle n'est pas centré sur l'origine, elle va subir une évolution périodique entre un maximum et un minimum. Le centre du cercle est situé sur l'axe réel, décalé vers les  $k > 0$ . De manière évidente, l'excentricité maximale sera atteinte là où le cercle coupe l'axe réel à droite, donc pour  $\varpi = 0$ .

15) Si à  $t = 0$ , on a  $e = 0$ , alors  $\zeta_0 = 0$ . La solution devient donc

$$\zeta(t) = \frac{B}{A} (1 - e^{iAt}) \quad \Longrightarrow \quad k(t) = \frac{B}{A} (1 - \cos(At)) \quad \text{et} \quad h(t) = -\frac{B}{A} \sin(At) \quad (19)$$

en prenant juste les parties réelles et imaginaires. L'excentricité maximale est atteinte lorsque  $h(t) = 0$  avec  $\sin(At) = 0$  et  $\cos(At) = -1$  (donc au bout d'une demi-période). On trouve

$$e_{\max} = \frac{2B}{A} = \frac{5a}{2a'} \frac{e'}{1 - e'^2} \quad (20)$$

si on remplace  $A$  et  $B$  par leurs expressions. Comme on a  $a \ll a'$ , on a  $e \ll 1$  ce qui justifie a posteriori l'approximation. Au passage on pouvait remarquer qu'on pouvait transformer les expressions de  $k(t)$  et  $h(t)$  et en tirer  $e(t)$  (et  $\varpi(t)$  aussi)

$$k(t) = \frac{2B}{A} \sin^2\left(\frac{At}{2}\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{2B}{A} \sin\left(\frac{At}{2}\right) \cos\left(\frac{At}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad e(t) = \frac{2B}{A} \left| \sin\left(\frac{At}{2}\right) \right|. \quad (21)$$

On voit donc bien que l'excentricité maximale est obtenue au bout de  $t = \pi/A$  (donc une demi-période) et vaut bien  $2B/A$ .

16) Le disque représenté sur la figure est elliptique, mais cela peut provenir d'un effet de projection d'un disque en réalité circulaire. Par contre le fait que l'étoile soit décalée par rapport au centre ne résulte pas d'un effet de projection. Le disque est donc bien elliptique et le péricentre se situe en bas à gauche du côté le plus lumineux. Toutes les particules du disque vont suivre une évolution correspondante à celle décrite dans les questions précédentes, chacune d'entre elles à sa propre période de précession (qui dépend de son demi-grand axe). A un instant donné donc, nous aurons dans le disque toute une foule de particules à des phases très diverses de leur évolution sur les cercles en  $(k, h)$ . Celles qui auront les plus grandes excentricités seront naturellement celles qui seront à  $\varpi \simeq 0$ . Comme leurs orbites sont alignées, elles généreront une image elliptique avec un péricentre dans la direction du périastre de la planète perturbatrice. Ensuite, si on se souvient que les particules du disque ne font que diffuser la lumière de l'étoile, de manière évidente celles qui sont les plus proches en diffuseront plus (question de flux incident) et apparaîtront plus lumineuses. C'est ce qui explique la surbrillance du péricentre.

## II Traversée du disque galactique par un amas globulaire

- 1) La vitesse circulaire  $v_c(r)$  vérifie

$$v_c(r)^2 = r \frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad . \quad (22)$$

Tous calculs faits, en remplaçant  $U_0$  par son expression en fonction de  $M$ , on trouve

$$v_c(r)^2 = \frac{Mr^2G}{3\sqrt{3}b^3 \left(1 + \frac{r^2}{3b^2}\right)^{3/2}} = \frac{MGr^2}{(3b^2 + r^2)^{3/2}} \quad \implies \quad v_c(r) = \frac{r\sqrt{GM}}{(r^2 + 3b^2)^{3/4}} \quad . \quad (23)$$

La période orbitale sur une orbite circulaire vaut de manière évidente  $T(r) = 2\pi r/v_c(r)$ , soit

$$T(r) = \frac{2\pi (r^2 + 3b^2)^{3/4}}{\sqrt{GM}} \quad . \quad (24)$$

- 2) Numériquement avec les valeurs fournies, on trouve  $T = 6.28 \times 10^5$  ans pour  $r = b$ ,  $T = 1.52 \times 10^7$  ans pour  $r = 25$  pc et  $T = 4.28 \times 10^7$  ans pour  $r = 50$  pc.
- 3) Si  $H$  est l'épaisseur du disque, le temps de traversée vaudra évidemment  $H/V_\perp$  ( $V_\parallel$  n'a aucun rôle). Numériquement, on trouve  $1.725 \times 10^6$  ans. On voit donc en comparant avec les résultats de la question précédente qu'il n'y a guère que dans les parties internes de l'amas  $r \simeq b$  que le temps de traversée est comparable à  $T(r)$ . Partout ailleurs  $T(r)$  est nettement plus grand ce qui valide l'approximation. Le fait que l'approximation soit médiocre dans les parties internes de l'amas ne doit pas être gênant, car a priori (ce que nous allons confirmer) seules les étoiles situées à la périphérie de l'amas seront potentiellement affectées par la traversée. Les autres sont trop liées à l'amas pour être perturbées significativement.
- 4) Le disque est infini et uniforme. Tous ses points sont donc équivalents. Nécessairement, par symétrie le champ gravitationnel  $\vec{g}$  est vertical en tout point de l'espace, dirigé vers le bas pour  $Z > 0$ , vers le haut pour  $Z < 0$  et en dépend ni de  $X$  ni de  $Y$ .
- 5) Le théorème de Gauss dit que le flux du champ gravitationnel à travers le parallélépipède est égale à  $-4\pi G$  fois la masse à l'intérieur. La masse à l'intérieur vaut  $\delta x \delta y \sigma$  (le volume coupe le plan). Le flux à travers les parois est nul, car le champ est en tout point vertical. Le flux à travers la surface en  $+\delta z$  est  $\delta x \delta y g(+\delta z)$ , celui à travers la surface en  $-\delta z$  vaut  $-\delta x \delta y g(-\delta z)$  (le vecteur surface est vers le bas). On a donc

$$\delta x \delta y g(\delta z) - \delta x \delta y g(-\delta z) = -4\pi G \delta x \delta y \sigma \quad . \quad (25)$$

On a de manière évidente par symétrie  $g(-\delta z) = -g(+\delta z)$ , ce qui conduit au résultat

$$g(Z) = g(+\delta z) = -2\pi G \sigma (\text{pour } Z > 0). \quad (26)$$

En  $-Z$  on a  $g(-Z) = 2\pi G \sigma$ . Notons que le champ est *uniforme* dans chaque demi-espace de part et d'autre du plan infini.

- 6) On a vu qu'en tout point de l'espace, le champ  $\vec{g}$  est vertical, parallèle à l'axe  $Oz$ . Compte tenu son l'expression, le changement de vitesse  $\delta \vec{v}(\vec{r})$  est nécessairement également vertical. Dans le cas général, un développement au premier ordre devrait s'écrire

$$\vec{g}(\vec{r}, t) \simeq \vec{g}(O) + \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial x}\right)_O x + \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial y}\right)_O y + \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial z}\right)_O z \quad . \quad (27)$$

Mais comme le champ  $\vec{g}$  ne dépend que de  $z$ , seule la dérivée partielle par rapport à  $z$  subsiste.

7) On injecte le développement limité d'abord dans l'intégrale sur l'amas :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \iiint_{\text{amas}} \rho(\vec{r}') \vec{g}(\vec{r}', t) d^3 r' &= \frac{1}{M} \iiint_{\text{amas}} \rho(\vec{r}') \left[ \vec{g}(O) + \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} \right)_O z \right] d^3 r' \\
&= \frac{\vec{g}(O)}{M} \underbrace{\iiint_{\text{amas}} \rho(\vec{r}') d^3 r'}_{=M} + \frac{1}{M} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} \right)_O \underbrace{\iiint_{\text{amas}} \rho(\vec{r}') z d^3 r'}_{=0} \\
&= \vec{g}(O) \quad .
\end{aligned} \tag{28}$$

On injecte ce résultat dans l'expression de  $\vec{\delta v}(\vec{r})$ , en remplaçant  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  par son développement limité :

$$\vec{\delta v}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \vec{g}(O) + \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} \right)_O z \right] - \vec{g}(O) \right\} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} \right)_O z dt \quad , \tag{29}$$

c'est à dire le résultat annoncé.

8) Le changement de variable s'écrit  $Z = V_{\perp}(t - t_0)$ , soit  $dZ = V_{\perp} dt$ . On écrit donc

$$\vec{\delta v}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{d\vec{g}}{dZ} dt = \frac{z}{V_{\perp}} \int_{-Z_{\max}}^{+Z_{\max}} \frac{d\vec{g}}{dZ} dZ = \frac{z}{V_{\perp}} [\vec{g}(+Z_{\max}) - \vec{g}(-Z_{\max})] \quad . \tag{30}$$

Compte tenu de la symétrie du champ par rapport au plan  $\vec{g}(-Z_{\max}) = -\vec{g}(+Z_{\max})$ , on en déduit le résultat annoncé.

9) Nous avons trouvé  $g(Z) = -2\pi G\sigma$  pour  $Z > 0$ . Nous en tirons

$$\delta v(\vec{r}) = -\frac{4\pi G\sigma z}{V_{\perp}} \quad , \tag{31}$$

$\vec{\delta v}(\vec{r})$  étant bien entendu vertical. Nous avons vu que le champ  $\vec{g}$  est uniforme de part et d'autre du disque. Par conséquent  $\partial \vec{g} / \partial z = 0$ , et en injectant dans l'intégrale, on obtient 0. Ceci est faux, car le chemin qui va de  $-Z$  à  $+Z$  traverse le plan. Or au niveau du plan  $Z = 0$  le champ  $\vec{g}$  subit une variation (une discontinuité même) brutale, les champs pour  $Z < 0$  et  $Z > 0$  étant opposés. Par conséquent  $\partial \vec{g} / \partial z = 0$  ne peut pas être assimilé à 0 partout. C'est plutôt une masse de Dirac en  $Z = 0$ . Pour cette raison, il valait mieux changer de variable dans l'intégrale pour contourner la difficulté.

10)  $\vec{\delta v}(\vec{r})$  est vertical, donc les composantes de  $\vec{v}'(\vec{r})$  sont  $(-v_c(r) \sin \lambda, v_c(r) \cos \lambda \cos i, v_c(r) \cos \lambda \sin i + \delta v(\vec{r}))$ . Il n'y a ensuite qu'à calculer le produit scalaire pour déduire le résultat annoncé.

11) La période orbitale de l'amas autour du centre galactique et la période orbitale de l'étoile dans l'amas ne sont a priori pas corrélées, donc à chaque passage  $\lambda$  est aléatoire. Donc en moyenne  $\cos \lambda = 0$ , et le terme central dans  $v'(\vec{r})^2$  disparaît. Au bout de  $n$  passages successifs, nous aurons grossièrement

$$v'(r)^2 = v_c(r)^2 + n \overline{\delta v(\vec{r})^2} \quad , \tag{32}$$

où  $\overline{\delta v(\vec{r})^2}$  sera une moyenne de  $\delta v(\vec{r})^2$ . Compte tenu de l'expression de  $\delta v(\vec{r})$  trouvée plus haut, on en tire

$$v'(r)^2 \simeq v_c(r)^2 + \frac{16n\pi^2 G^2 \sigma^2 \bar{z}^2}{V_{\perp}^2} \quad . \tag{33}$$

Cette expression est une approximation car on a implicitement supposé que  $V_{\perp}$  était la même à chaque passage ce qui n'est pas évident. En fait, on prendra une moyenne pour  $V_{\perp}$ .

12) L'énergie mécanique s'écrit

$$E'(r) = \frac{1}{2}mv'(r)^2 + mU(r) = \frac{1}{2}mv_c(r)^2 + mU(r) + \frac{8mn\pi^2G^2\sigma^2\bar{z}^2}{V_{\perp}^2} . \quad (34)$$

$v_c(r)^2$  a déjà été calculé au I. On y rajoute  $U(r)$  en remplaçant  $U_0$  par son expression en  $M$ . En combinant les deux, on tire

$$E'(r) = -\frac{mMG(r^2 + 6b^2)}{2(r^2 + 3b^2)^{3/2}} + \frac{8mn\pi^2G^2\sigma^2\bar{z}^2}{V_{\perp}^2} . \quad (35)$$

Le premier terme n'est autre que l'énergie mécanique de l'étoile sur son orbite avant perturbation.

13) L'étoile ne sera plus liée à l'amas lorsqu'on aura  $E'(r) > 0$ , ce qui finira par arriver,  $E'(r)$  étant une fonction affine croissante de  $n$ . A ce moment, l'étoile sera arrachée à l'amas. Cet événement arrive au bout d'un nombre de passages  $n_a$  valant

$$n_a = \frac{M(r^2 + 6b^2)V_{\perp}^2}{16\pi^2G\sigma^2\bar{z}^2(r^2 + 3b^2)^{3/2}} \quad (36)$$

14) Avec les valeurs données, l'application numérique donne  $n_a = 311000$  pour  $r = b$ ,  $n_a = 1261$  pour  $r = 10$  pc, et  $n_a = 9.8 \simeq 10$  pour  $r = 50$  pc. On voit que les étoiles situées à la périphérie de l'amas sont les plus susceptibles d'être arrachées à l'amas.

On peut préciser cela en termes de temps. Si la période orbitale de l'amas est  $T_0$  et s'il y a deux traversées par période, le temps correspondant aux  $n_a$  passages sera  $t_a = n_a T_0 / 2$ . Cela donne  $1.56 \times 10^{14}$  ans pour  $r = b$  (!),  $6.18 \times 10^{10}$  ans pour  $r = 10$  pc et  $4.81 \times 10^9$  ans pour  $r = 50$  pc. On voit que les étoiles situées à  $r = 50$  pc ont eu tout le temps d'être arrachées depuis que la Galaxie existe. C'est ce qui justifie l'appellation de rayon de marée. Dans la pratique la situation est un peu moins critique car les orbites des étoiles ne sont pas circulaires. Les étoiles qui sont à la périphérie de l'amas ne le sont pas depuis le départ. Donc les passages ne se font pas toujours à 50 pc, mais parfois en-dessous, ce qui adoucit le processus de troncation de l'amas.