Master 2 Astrophysique
Gravitation, Galaxies

H. Beust

7 février 2018

I La pression de radiation

On considère une particule de poussière de masse m très petite en orbite autour d'une étoile de masse M. On suppose que la particule ne subit d'influence gravitationnelle que de la part de l'étoile (pas de perturbations planétaires). Par contre, dans un environnement de ce type, les grains de poussière subissent de la part de l'étoile, en plus de sa force gravitationnelle $\vec{F}_{\mathrm{grav}}$, une force supplémentaire appelée *pression de radiation* liée à l'impact du rayonnement stellaire sur le grain de poussière, et que nous noterons $\vec{F}_{\mathrm{rad}}$. En première approximation, cette force est radiale, pointe dans la direction opposée par rapport à $\vec{F}_{\mathrm{grav}}$, et est proportionnelle au flux reçu de la part de l'étoile à la distance r considérée, c'est-à-dire en définitive, proportionnelle à $1/r^2$.

1) Montrez dans ces conditions que pour un grain donné, le rapport $|F_{\mathrm{rad}}|/|F_{\mathrm{grav}}|$ est une constante indépendante de la distance r à l'étoile, que nous noterons β. Plus précisément nous aurons $\vec{F}_{\mathrm{rad}} = -\beta\vec{F}_{\mathrm{grav}}$.

2) Qu'attendez vous qu'il arrive au grain de poussière si $\beta > 1$? Par la suite, nous supposerons que $0 \leq \beta < 1$.

3) Ecrivez l'équation du mouvement du grain de poussière autour de l'étoile avec $\vec{F}_{\mathrm{grav}}$ et $\vec{F}_{\mathrm{rad}}$, et montrez qu'elle peut s'écrire

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM(1-\beta)}{r^3}\,\vec{r} \qquad .$$

4) Montrez alors que le mouvement de la particule sera équivalent à celui d'une particule ne subissant pas de pression de radiation, mais en orbite autour d'une étoile fictive de masse $M' < M$. En définitive, quel type de mouvement suivra la particule ?

L'analyse de la diffusion des photons par des particules solides (théorie de Mie) conduit à donner pour le coefficient β la formule approchée

$$\beta = \frac{3LQ}{16\pi GMc\rho s} \qquad ,$$

où L est la luminosité de l'étoile, Q le coefficient d'efficacité de diffusion, M la masse de l'étoile, c la vitesse de la lumière, ρ la masse volumique du grain et s son rayon. Nous prendrons $L = 3.83\times10^{26}\,\mathrm{W}$ (Luminosité du Soleil), $M = 2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$ (masse du Soleil), $G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{SI}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $c = 3\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, et $Q = 1$ pour simplifier.

5) Dans ces conditions, calculer la valeur du coefficient β pour un rocher de 1 m de rayon et pour une poussière de $1\,\mu\mathrm{m}$ ($=10^{-6}$ m) de rayon. Pour quels types de particules la pression de radiation est-elle importante ?

On considère un planétésimal de taille kilométrique, en orbite autour d'une étoile de masse M dans un système jeune, sur une orbite de demi-grand axe a et d'excentricité e. A un moment donné sur son orbite, ce planétésimal émet une particule de poussière. A ce moment, le planétésimal est à distance r de l'étoile avec une vitesse v. On considèrera que la particule de poussière apparaît à la même position par rapport à l'étoile que le planétésimal, et avec la même vitesse. Elle est soumise à une pression de radiation avec un coefficient β.

6) Pourquoi peut-on affirmer que le grain de poussière ne suivra *pas* la même orbite que le planétésimal qui l'a émis ?

7) On considère l'énergie spécifique (=divisée par sa masse) $h = (1/2)v^2 - GM/r$ du planétésimal sur son orbite, et celle h' du grain de poussière sur son orbite à lui. Montrer qu'on a la relation

$$h' = h + \frac{GM\beta}{r} \qquad .$$

8) A quelle condition sur son énergie un corps en orbite képlérienne autour d'une étoile reste-t-il lié à l'étoile en suivant une orbite elliptique ? Montrer dans ces conditions que le grain de poussière reste lié à l'étoile uniquement si β reste inférieur à une limite β_{lim} fonction de r et a que l'on précisera. On aura besoin pour cela de l'expression de h en fonction des éléments orbitaux. Que se passe-t-il si β est supérieur ?

9) Calculer cette limite dans le cas où l'orbite du planétésimal est circulaire. Pourquoi n'a-t-on pas $\beta_{\mathrm{lim}} = 1$?

10) Quand l'orbite du planétésimal est elliptique, on considère les deux cas où la particule de poussière est émise au périastre et à l'apoastre de l'orbite du planétésimal. Comparer β_{lim} dans ces deux cas extrêmes. A quel endroit de l'orbite la particule de poussière est-elle le plus facilement éjectée du système ?

II Dispersion de vitesses dans le voisinage Solaire

On considère une étoile en orbite autour du centre de notre galaxie dans le voisinage solaire. On appelle r_0 la distance Soleil–centre et ω_0 la fréquence circulaire à la distance r_0. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour du centre galactique, le mouvement de l'étoile dans le voisinage solaire sera de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r &=& r_0 + \xi \\ \theta &=& \omega_0\, t + \dfrac{\eta}{r_0} \\ z &=& z \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $\xi \ll r_0$, $\eta \ll r_0$ et $z \ll r_0$.

1) Dans ces conditions, compte tenu de ce que nous avons vu dans le cours, quelle est la solution générale du mouvement de l'étoile en $(\xi(t), \eta(t), z(t))$. Comment s'appellent les fréquences associées ?

2) Calculer les vitesses associées $(\dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t), \dot{z}(t))$.

3) L'étoile est observée à l'instant t_{obs} dans le voisinage solaire immédiat à la même distance au centre r_0 que lui. Que vaut alors à cet instant la coordonnée $\xi(t_{\mathrm{obs}})$?

4) La solution fait apparaître des constantes d'intégration appelées (a, c, z_0, t_0, t_1) dans le cours. Dans le cours, il a aussi été dit qu'on peut toujours moyennant un changement de rayon de référence se ramener à $a = 0$. Pourquoi ne pouvons nous pas le faire ici ?

5) Compte tenu de la condition sur $\xi(t_{\mathrm{obs})}$ exprimée à la question 3, en déduire la valeur de la constante a en fonction de t_{obs}. Remplacer alors dans l'expression de la vitesse $\dot{\eta}(t_{\mathrm{obs}})$, et donner les expressions des dispersions de vitesses $\dot{\xi}^2(t_{\mathrm{obs}})$ et $\dot{\eta}^2(t_{\mathrm{obs}})$.

6) Un nombre important d'étoiles sont observées au même instant $t_{\rm obs}$ dans le voisinage solaire, et on mesure leurs vitesses. Chacune d'entre elles a des constantes d'integration différentes des autres. En particulier, les phases t_0 sont distribuées au hasard (on ne considérera pas les variations de c). Déduire de la question précédente les dispersions moyennes $\left\langle \dot\xi^2 \right\rangle$ et $\langle \dot\eta^2 \rangle$.
Rappel : La moyenne d'un cosinus carré sur sa période est égale à 1/2, et c'est la même chose pour un sinus carré.

7) Montrer alors que le rapport des deux vaut (avec les notations habituelles du cours)

$$\frac{\langle \dot\eta^2 \rangle}{\left\langle \dot\xi^2 \right\rangle} = \frac{\kappa_0^2}{4\omega_0^2} \qquad . \tag{2}$$

Calculer numériquement ce rapport en prenant les valeurs des fréquences fondamentales du voisinage solaire données dans le cours (section 9.3)

8) Les observations tendent à montrer qu'en moyenne on a aussi $\left\langle \dot{z_0}^2 \right\rangle \simeq \langle \dot\eta^2 \rangle$. En déduire le rapport entre $\left\langle \dot{z_0}^2 \right\rangle$ et $\left\langle \dot\xi^2 \right\rangle$. En quoi ce résultat montre-t-il que le potentiel galactique possède nécessairement une troisième intégrale isolante ?

III Le courant asymétrique

On considère une galaxie comme la nôtre que l'on supposera axisymétrique (on néglige la structure spirale) avec un potentiel $U(r,z)$ en coordonnées cylindriques (r,θ,z). A une distance r, les étoiles individuelles suivent des orbites presque circulaires à la vitesse v_c.

1) Rappeler le lien entre v_c et la fréquence circulaire ω, puis son expression en fonction des dérivées locales du potentiel.

Il a été observé dans notre Galaxie que des sous-systèmes comme des amas stellaires qui ont une dispersion de vitesse radiale σ_{rr}^2 assez importante ont tendance à tourner autour du centre galactique à une vitesse moyenne $\langle v_\theta \rangle$ légèrement plus petite que la vitesse circulaire v_c à l'endroit où ils sont. La différence entre les deux porte le nom de *courant asymétrique* v_a. Nous écrirons donc

$$v_a = v_c - \langle v_\theta \rangle \qquad . \tag{3}$$

L'observation du voisinage solaire donne la relation empirique $v_a \simeq \sigma_{rr}^2/D$ avec $D \simeq 120\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Le but de cet exercice est de trouver une justification de ce phénomène et de cette expression à partir des équations de Jeans. On part donc des équations de Jeans en coordonnées cylindriques (Equations (D.50)–(D.52) dans l'annexe du cours), et en particulier l'équation dans la direction radiale.

2) Le mouvement de l'amas est en moyenne circulaire autour du centre galactique à la vitesse $\langle v_\theta \rangle$. Que valent dans ces conditions les moyennes $\langle v_r \rangle$ et $\langle v_z \rangle$?

3) On suppose également que la galaxie est à l'état stationnaire. En tenant compte de l'axisymétrie et de la définition de v_c, montrer que l'équation de Jeans radiale peut se réécrire

$$\frac{\partial(\rho\sigma_{rr}^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho\sigma_{zr}^2)}{\partial z} + \frac{\rho}{r}\left(\sigma_{rr}^2 - \sigma_{\theta\theta}^2 - \langle v_\theta \rangle^2 + v_c^2\right) = 0 \tag{4}$$

Par la suite, on pourra noter pour simplifier σ_r^2 au lieu de σ_{rr}^2 et autant pour les coordonnées θ et z.

4) En tenant compte du fait que $v_a \ll v_c$ (ou encore $\langle v_\theta \rangle \simeq v_c$), montrer qu'on peut écrire

$$v_c^2 - \langle v_\theta \rangle^2 \simeq 2 v_c v_a \qquad . \tag{5}$$

5) Les étoiles de l'amas restent proches du plan galactique. Par symétrie autour du plan, on a nécessairement $\partial\rho/\partial z = 0$. En déduire que l'équation de Jeans s'écrit en définitive

$$\frac{2v_c v_a}{\sigma_r^2} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2} - 1 - \frac{r}{\sigma_r^2}\frac{\partial\left\langle v_r v_z\right\rangle}{\partial z} - \frac{r}{\rho\sigma_r^2}\frac{\partial(\rho\sigma_r^2)}{\partial r} \qquad . \tag{6}$$

6) L'observation des galaxies externes a montré que dans tous ces systèmes, la forme de l'ellipsoïde des vitesses est relativement constante, et qu'on a grossièrement $\sigma_r^2 \propto \rho$. Montrer dans ces conditions qu'on doit avoir

$$\frac{\partial(\rho\sigma_r^2)}{\partial r} = 2\sigma_r^2\frac{\partial\rho}{\partial r} \qquad . \tag{7}$$

En déduire une simplification de l'équation de Jeans.

7) Il reste dans l'équation de Jeans un terme impliquant $\langle v_r v_z\rangle$ difficile à estimer. On se place momentanément dans l'approximation de Oort-Lindblad (Section 9.1 du cours) qui consiste à dire que la troisième intégrale première du potentiel galactique est l'énergie dans le mouvement vertical. Montrer dans ces conditions que la forme de la fonction de distribution impose $\langle v_r v_z\rangle = 0$.

Cette condition est équivalente à dire que l'ellipsoïde des vitesses a ses axes parallèles aux vecteurs de base de la base locale des coordonnées cylindriques. Mais ceci ne correspond pas à la réalité. L'autre extrême consiste à dire que l'ellipsoïde des vitesses a ses axes parallèles aux vecteurs de base des coordonnées *sphériques*. Dans ce cas, on montre qu'on doit avoir $\langle v_r v_z\rangle = (\sigma_r^2 - \sigma_z^2)z/r$. Des études numériques (Binney & Spergel 1983) tendent à montrer que la réalité est quelque part entre les deux. Nous écrirons donc

$$\langle v_r v_z\rangle = \alpha\left(\sigma_r^2 - \sigma_z^2\right)\frac{z}{r} \qquad , \tag{8}$$

où α est un paramètre compris entre 0 et 1.

8) En déduire la forme finale de l'équation de Jeans.

9) On va utiliser le résultat de l'exercice II qui dit que $\sigma_\theta^2 \simeq 0.41\sigma_r^2$, et on va aussi dire $\sigma_z^2 \simeq \sigma_\theta^2$. On va aussi supposer que le profil du disque galactique est exponentiel, soit $\rho(r) = \rho_0\exp(-r/r_d)$ avec $r_0/r_d = 2.4$ si r_0 désigne la distance du voisinage solaire. On prendra aussi $v_c = 220\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ dans le voisinage solaire. Calculer numériquement dans ces conditions le rapport v_a/σ_r^2 en fonction de α et dire entre quelles bornes il varie en fonction de la valeur de α. Retrouver alors l'expression empirique donnée au début de l'exercice.