# Master 2 Astrophysique
# Gravitation, Galaxies – Corrigé

H. Beust

7 février 2018

## I La pression de radiation

**1)** La pression de radiation $F_{\mathrm{rad}}$ est proportionnelle à $1/r^2$ ; La force de gravité $F_{\mathrm{grav}} = GMm/r^2$ aussi. Par conséquent le rapport des deux est indépendant de la distance à l'étoile $r$. Nous écrirons $F_{\mathrm{rad}}/F_{\mathrm{grav}} = \beta$.

**2)** Si $\beta > 1$, on $F_{\mathrm{rad}} > F_{\mathrm{grav}}$. Autrement dit, la pression de radiation est supérieure à la force de gravité de l'étoile. Le grain va normalement être chassé au loin, repoussé par la pression de radiation.

**3)** On écrit l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{\mathrm{rad}} + \vec{F}_{\mathrm{grav}} = (1-\beta)\vec{F}_{\mathrm{grav}} = -\frac{GMm(1-\beta)}{r^3}\,\vec{r} \qquad \text{soit} \\ \ddot{\vec{r}} &= -\frac{GM(1-\beta)}{r^3}\,\vec{r} \qquad . \end{aligned}$$

**4)** Cette équation du mouvement est encore une équation de mouvement Képlérien. Si je pose $M' = M(1-\beta)$ (qui est une constante), l'équation du mouvement se réduit à

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM'}{r^3}\,\vec{r} \qquad ,$$

c'est-à-dire une équation de mouvement Képlérien pur autour d'une étoile de masse $M' < M$. Tout se passe comme si du point de vue de la particule de poussière, la pression de radiation "réduisait" la masse de l'étoile. La particule suivra toujours une orbite Képlérienne, mais différente de celle qu'elle aurait suivie sans pression de radiation.

**5)** Application numérique : On trouve $\beta = 5.7\times10^{-7} \ll 1$ pour le rocher de 1 m et $\beta = 0.57$ pour la grain de poussière. Clairement la pression de radiation est négligeable pour les rochers est n'est sensible que pour les grains de poussière suffisamment petits.

**6)** Même s'il part de la même position avec la même vitesse, le grain de poussière ne suivra pas la même orbite que celle du corps parent à cause de la pression de radiation. Le planétésimal ne subit lui aucune pression de radiation (ou complètement négligeable), ce qui n'est pas le cas du grain de poussière. Suivant ce qui a été fait dans les questions précédentes, le grain de poussière suivra une orbite différente car il "voit" une étoile de masse inférieure.

**7)** On écrit l'énergie spécifique du grain

$$h' = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM'}{r} \qquad , \tag{1}$$

C'est-à-dire la formule de $h$ mais en prenant la masse $M'$. Ceci se transforme

$$h' = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM(1-\beta)}{r} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} + \frac{GM\beta}{r} = h + \frac{GM\beta}{r} \qquad . \tag{2}$$

**8)** On introduit l'expression de $h$ :

$$h' = h + \frac{GM\beta}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GM}{a} + \frac{GM\beta}{r} \qquad .$$

Un corps reste lié à l'étoile si son énergie est négative. Le grain restera donc lié uniquement si $h' < 0$. Ceci se traduit par la condition

$$\beta < \beta_{\mathrm{lim}} = \frac{r}{2a} \qquad . \tag{3}$$

Si $\beta$ est supérieur à cette limite, l'énergie $h'$ est positive, le grain suit une orbite hyperbolique et est donc chassé du système. Il n'est plus lié à l'étoile.

**9)** Si l'orbite est circulaire, on a $r = a$ et donc $\beta_{\mathrm{lim}} = 1/2$. On pourrait croire intuitivement qu'il faille $\beta > 1$ pour chasser un grain du système. Mais ce serait oublier que le grain de poussière part déjà avec la vitesse du planétésimal. Donc même avec $\beta > 1/2$, son énergie devient positive, et son orbite hyperbolique.

**10)** Au périastre $r$ est le plus petit possible, donc la limite $r/2a$ est petite. A l'inverse à l'apoastre ce rapport est le plus grand possible. En fonction de l'excentricité, on trouve

$$\beta_{\mathrm{lim,periastre}} = \frac{1-e}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta_{\mathrm{lim,apoastre}} = \frac{1+e}{2} \qquad . \tag{4}$$

Clairement $\beta_{\mathrm{lim,periastre}} < \beta_{\mathrm{lim,apoastre}}$, dans un rapport qui peut être assez élevé si l'excentricité est grande. Un grain de poussière émis par le planétésimal restera donc moins facilement lié à l'étoile s'il est émis au périastre du planétésimal que s'il est émis à l'apoastre. Ceci pourrait paraître contre-intuitif, mais c'est en fait une question de vitesse initiale. L'énergie cinétique est en effet maximale au périastre.

# II Dispersion de vitesses dans le voisinage Solaire

**1)** La solution vue dans le cours est un mouvement épicyclique en $(\xi, \eta)$ dans le plan, accompagné d'un mouvement oscillatoire en $z$, c'est-à-dire

$$\xi = \frac{2\omega_0 a}{\kappa_0^2} + c\cos\kappa_0\,(t - t_0) \qquad ; \tag{5}$$

$$\eta = a\left(1 - \frac{4\omega_0^2}{\kappa_0^2}\right)(t - t_1) - \frac{2\omega_0 c}{\kappa_0}\sin\kappa_0\,(t - t_0) \qquad ; \tag{6}$$

$$z = z_0\cos\omega_z(t - t_2) \qquad , \tag{7}$$

où $t_0$, $t_1$, $t_2$, $z_0$, $a$ et $c$ sont des constantes d'intégration. Les fréquences qui apparaissent sont $\omega_0$ (fréquence circulaire), $\kappa_0$ (fréquence épicyclique) et $\omega_z$ (fréquence verticale).

**2)** Pour obtenir les vitesses, on dérive par rapport au temps. Il vient

$$\dot\xi = -c\kappa_0\sin\kappa_0\,(t - t_0) \qquad ; \tag{8}$$

$$\dot\eta = a\left(1 - \frac{4\omega_0^2}{\kappa_0^2}\right) - 2\omega_0 c\cos\kappa_0\,(t - t_0) \qquad ; \tag{9}$$

$$\dot z = -z_0\omega_z\sin\omega_z(t - t_2) \qquad , \tag{10}$$

**3)** A $t = t_{\mathrm{obs}}$, l'étoile est observée à $r = r_0$, donc $\xi(t_{\mathrm{obs}}) = 0$.

**4)** On peut toujours pour une étoile donnée se ramener à $a = 0$ en changeant de rayon de référence, c'est-à-dire en décalant $r_0$ de manière à rendre nulle la moyenne de $\xi$ et la dérive de $\eta$. Ici, nous ne le ferons pas, car $r_0$ a été choisi pour correspondre au rayon orbital du Soleil. Or nous rencontrons dans le voisinage solaire des étoiles qui n'ont pas toutes le même $r_0$. Donc en gardant la constante $a$, nous rendons compte de cette diversité sans changer de $r_0$.

**5)** Comme à $t = t_{\text{obs}}$, on a $\xi = 0$, en reportant dans la solution, on en déduit

$$a = -\frac{c\kappa_0^2}{2\omega_0 a} \cos\kappa_0 \left(t_{\text{obs}} - t_0\right) \tag{11}$$

Si on remplace alors la valeur de $a$ dans l'expression des vitesses, on trouve alors

$$\dot{\xi}(t_{\text{obs}}) = -c\kappa_0 \sin\kappa_0 \left(t_{\text{obs}} - t_0\right) \quad ; \tag{12}$$
$$\dot{\eta}(t_{\text{obs}}) = -\frac{c\kappa_0^2}{2\omega_0} \cos\kappa_0 \left(t_{\text{obs}} - t_0\right) \quad . \tag{13}$$

Il n'y a plus alors qu'à élever au carré.

$$\dot{\xi}^2(t_{\text{obs}}) = c^2\kappa_0^2 \sin^2\kappa_0 \left(t_{\text{obs}} - t_0\right) \quad ; \tag{14}$$
$$\dot{\eta}^2(t_{\text{obs}}) = -\frac{c^2\kappa_0^4}{4\omega_0^2} \cos^2\kappa_0 \left(t_{\text{obs}} - t_0\right) \quad . \tag{15}$$

**6)** Les phases $t_0$ sont distribuées au hasard. Donc, moyenné sur un grand nombre d'étoiles, on obtient (en utilisant l'indication)

$$\left\langle \dot{\xi}^2 \right\rangle = \frac{c^2\kappa_0^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \left\langle \dot{\eta}^2 \right\rangle = -\frac{c^2\kappa_0^4}{8\omega_0^2} \quad . \tag{16}$$

**7)** En faisant le rapport des deux, on a immédiatement le résultat annoncé, c'est-à-dire

$$\frac{\langle \dot{\eta}^2 \rangle}{\left\langle \dot{\xi}^2 \right\rangle} = \frac{\kappa_0^2}{4\omega_0^2} \quad . \tag{17}$$

Le cours mentionne pour le voisinage solaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \omega_0 & = & 25\,\text{km}\,s^{-1}\,\text{kpc}^{-1} \\ \kappa_0 & = & 32\,\text{km}\,s^{-1}\,\text{kpc}^{-1} \\ \omega_z & = & 72\,\text{km}\,s^{-1}\,\text{kpc}^{-1} \end{array} \right. \quad . \tag{18}$$

ce qui donne par application numérique $\langle \dot{\eta}^2 \rangle / \left\langle \dot{\xi}^2 \right\rangle \simeq 0.41$.

**8)** Si $\left\langle \dot{z_0}^2 \right\rangle \simeq \langle \dot{\eta}^2 \rangle$, on doit donc aussi avoir $\left\langle \dot{z_0}^2 \right\rangle \simeq 0.41 \left\langle \dot{\xi}^2 \right\rangle$. Dans le cours il a été montré (Section 9.1) que si le potentiel galactique ne comportait que 2 intégrales premières isolantes (l'énergie et la projection sur $Oz$ du moment cinétique), alors nécessairement les variables $r$ et $z$ devraient jouer le même rôle dans la fonction de distribution. En conséquence, on devrait avoir $\langle v_r \rangle^2 = \langle v_z \rangle^2$. Ici, l'orbite est essentiellement circulaire, ce qui fait que $v_r = \dot{\xi}$ et $v_z = \dot{z}_0$. On devrait donc avoir $\left\langle \dot{z_0}^2 \right\rangle = \left\langle \dot{\xi}^2 \right\rangle$ ce qui n'est manifestement pas le cas. Le potentiel galactique comporte donc bien une troisième intégrale isolante.

# III Le courant asymétrique

**1)** On a $v_c = r\omega$ et

$$v_c^2 = r\frac{\partial U}{\partial r} \qquad \text{ou} \qquad \omega^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \quad . \tag{19}$$

**2)** Clairement on a $\langle v_r \rangle = \langle v_z \rangle = 0$. Une conséquence de cela est qu'on a

$$\sigma_{rr}^2 = \left\langle v_r^2 \right\rangle - \langle v_r \rangle^2 = \left\langle v_r^2 \right\rangle \qquad \text{et de même} \qquad \sigma_{zz}^2 = \left\langle v_z^2 \right\rangle \quad . \tag{20}$$

**3)** En coordonnées cylindriques, l'équation de Jeans dans la direction radiale s'écrit en toute généralité (Equation (D.50) du cours)

$$\rho \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial t} + \rho \left( \langle v_r \rangle \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial r} + \frac{\langle v_\theta \rangle}{r} \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial \theta} + \langle v_z \rangle \frac{\partial \langle v_r \rangle}{\partial z} - \frac{\langle v_\theta \rangle^2}{r} \right) = -\rho \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho \sigma_{rr}^2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho \sigma_{\theta r}^2)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\rho \sigma_{zr}^2)}{\partial z} + \frac{\rho \sigma_{\theta\theta}^2}{r} \qquad (21)$$

Ici, l'état de la galaxie est stationnaire, donc les $\frac{\partial}{\partial t}$ sont nuls. Elle est axisymétrique donc les $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sont nuls également. En tenant compte du résultat de la question précédente, il reste

$$-\rho \frac{\langle v_\theta \rangle^2}{r} = -\rho \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho \sigma_{rr}^2)}{\partial r} - \frac{\partial (\rho \sigma_{zr}^2)}{\partial z} + \frac{\rho \sigma_{\theta\theta}^2}{r} \qquad (22)$$

On remplace ensuite $\partial U / \partial r$ par son expression en fonction de $v_c$, on développe partiellement le terme $\partial (r \rho \sigma_{rr}^2)/\partial r$, on réarrange et on trouve l'expression annoncée, soit

$$\frac{\partial (\rho \sigma_{rr}^2)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho \sigma_{zr}^2)}{\partial z} + \frac{\rho}{r} \left( \sigma_{rr}^2 - \sigma_{\theta\theta}^2 - \langle v_\theta \rangle^2 + v_c^2 \right) = 0 \qquad (23)$$

**4)** On écrit

$$v_c^2 - \langle v_\theta \rangle^2 = (v_c - \langle v_\theta \rangle)(v_c + \langle v_\theta \rangle) = v_a (v_c + \langle v_\theta \rangle) \simeq 2 v_a v_c \qquad (24)$$

car $v_c + \langle v_\theta \rangle \simeq 2 v_c$.

**5)** Dans l'équation de Jeans, on développe le terme en $\partial / \partial z$ en tenant compte de $\partial \rho / \partial z = 0$. On remarque aussi que

$$\sigma_{zr}^2 = \langle v_r v_z \rangle - \langle v_z \rangle \langle v_r \rangle = \langle v_r v_z \rangle \quad . \qquad (25)$$

L'équation de Jeans devient donc après multiplication par $r/\rho$

$$v_c^2 - \langle v_\theta \rangle^2 = \sigma_\theta^2 - \sigma_r^2 - \frac{r}{\rho} \frac{\partial (\rho \sigma_r^2)}{\partial r} - r \frac{\partial \langle v_r v_z \rangle}{\partial z} \quad . \qquad (26)$$

On tient ensuite compte du résultat de la question précédente, on divise par $\sigma_r^2$, et il vient

$$\frac{2 v_c v_a}{\sigma_r^2} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2} - 1 - \frac{r}{\sigma_r^2} \frac{\partial \langle v_r v_z \rangle}{\partial z} - \frac{r}{\rho \sigma_r^2} \frac{\partial (\rho \sigma_r^2)}{\partial r} \quad . \qquad (27)$$

**6)** Ecrivons $\sigma_r^2 = k \rho$, avec $k$ coefficient constant. Nous avons alors

$$\frac{\partial (\rho \sigma_r^2)}{\partial r} = \frac{\partial (k \rho^2)}{\partial r} = 2 k \rho \frac{\partial \rho}{\partial r} = 2 \sigma_r^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad . \qquad (28)$$

Ce résultat peut aussi se retrouver très simplement en utilisant des dérivées logarithmiques. On en déduit pour l'équation de Jeans

$$\frac{2 v_c v_a}{\sigma_r^2} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2} - 1 - \frac{r}{\sigma_r^2} \frac{\partial \langle v_r v_z \rangle}{\partial z} - 2 \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad . \qquad (29)$$

**7)** Dans le cadre de l'approximation de Oort-Lindblad, la troisième intégrale première du mouvement des étoiles s'écrit

$$I_3 = \frac{1}{2} v_z^2 + \phi_2(z) \quad . \qquad (30)$$

où $\phi_2(z)$ est la partie verticale du potentiel. Dans ces conditions par le théorème de Jeans, la fonction de distribution s'écrit nécessairement (Equation 9.8 du cours)

$$\Psi = \Psi \left( \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2), r v_\theta, \frac{1}{2} v_z^2 + \phi_2(z) \right) \quad . \qquad (31)$$

La moyenne $\langle v_r v_z \rangle$ s'écrit alors naturellement

$$\begin{aligned}\rho \langle v_r v_z \rangle &= \iiint \Psi(E, L_z) v_r v_z \, \mathrm{d}^3\vec{v} \\ & \iiint \Psi \left[ U(r,z) + \frac{1}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2\right), r v_\theta, \frac{1}{2} v_z^2 + \phi_2(z) \right] v_r v_z \, \mathrm{d}v_r \, \mathrm{d}v_\theta \, \mathrm{d}v_z \end{aligned} \qquad (32)$$

On remarque alors que la fonction de distribution apparaît comme une fonction paire de $v_z$ comme de $v_r$. Par conséquent, une fois multipliée par $v_r v_z$, la fonction à intégrer est une fonction impaire de chacune de ces deux variables. En intégrant une fonction impaire de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient nécessairement zéro. Donc $\langle v_r v_z \rangle = 0$.

**8)** Si nous donnons à $\langle v_r v_z \rangle$ la forme indiquée, l'équation de Jeans s'écrit au final

$$\frac{2 v_c v_a}{\sigma_r^2} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2} - 1 - 2\frac{r}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} - \alpha \left(1 - \frac{\sigma_z^2}{\sigma_r^2}\right) \qquad . \qquad (33)$$

**9)** Avec le profil exponentiel donné, on tire

$$\frac{r}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{r}{r_d} \qquad \text{(dérivée logarithmique)} \qquad . \qquad (34)$$

Il n'y a plus qu'à faire l'application numérique. On trouve d'abord

$$\frac{v_c v_a}{\sigma_r^2} = 2.105 - 0.295\alpha \qquad . \qquad (35)$$

Avec la valeur de $v_c$, on trouve

$$\frac{v_a}{\sigma_r^2} = (9.567 \times 10^{-3} - 1.341 \times 10^{-3}\alpha) \, \mathrm{km}^{-1} \, \mathrm{s} \qquad . \qquad (36)$$

Cette quantité varie entre $9.567 \times 10^{-3} \, \mathrm{km}^{-1} \, \mathrm{s}$ pour $\alpha = 0$ et $8.225 \times 10^{-3} \, \mathrm{km}^{-1} \, \mathrm{s}$ pour $\alpha = 1$. Pour comparer avec l'expression empirique du début, il est plus intéressant d'introduire l'inverse de ce rapport que nous noterons $D$. Dimensionnellement, $D$ est une vitesse. On trouve

$$D = \frac{1}{9.567 \times 10^{-3} - 1.341 \times 10^{-3}\alpha} \, \mathrm{km} \, \mathrm{s}^{-1} \qquad . \qquad (37)$$

$D$ varie alors entre $104.5 \, \mathrm{km} \, \mathrm{s}^{-1}$ pour $\alpha = 0$ et $121.6 \, \mathrm{km} \, \mathrm{s}^{-1}$ pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire une plage de valeurs proche du $D \simeq 120 \, \mathrm{km} \, \mathrm{s}^{-1}$ mesuré empiriquement. Remarquons que la valeur empirique est plus proche de celle déduite avec $\alpha = 1$, ce qui tend à accréditer l'hypothèse d'un ellipsoïde des vitesses aligné dans la direction des vecteurs de base des coordonnées sphériques.