

UE SM1-2 – MÉCANIQUE DU POINT

DEUG MIAS 1^{ère} ANNÉE



La célèbre expérience de Galilée sur la chute des corps le long d'un plan incliné.

Hervé Beust

mai 2009

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Généralités sur la mécanique	1
1.2	Définitions	2
1.3	Rappels mathématiques	4
1.3.1	Quantité scalaires et vectorielles	4
1.3.2	Dérivation et différentielle	4
1.3.3	Fonctions de plusieurs variables. Dérivées partielles	6
1.3.4	Produit scalaire	6
1.3.5	Produit vectoriel	7
1.3.6	Equations différentielles	9
1.4	Les principaux systèmes de coordonnées utilisés	12
1.4.1	Coordonnées dans le plan	12
1.4.2	Coordonnées dans l'espace	14
1.4.3	Opérateur gradient	16
1.5	Principes de base de l'analyse dimensionnelle	16
1.5.1	Grandeurs mesurables et systèmes d'unités	17
1.5.2	Analyse dimensionnelle	19
2	Cinématique	21
2.1	Généralités. Vecteur position	21
2.2	Vitesse	21
2.2.1	Notion intuitive de vitesse moyenne	21
2.2.2	Vitesse instantanée. Vecteur vitesse	22
2.3	Accélération	23
2.4	Expression des vecteurs vitesse et accélération dans les divers systèmes de coordonnées	24
2.4.1	Coordonnées dans le plan	24
2.4.2	Coordonnées dans l'espace	25
2.4.3	Représentation de Frenet	26
2.5	Exemples de mouvements classiques	28
2.5.1	Le mouvement rectiligne uniforme	28
2.5.2	Le mouvement uniformément accéléré	29
2.5.3	Le mouvement circulaire uniforme	31
2.6	Changements de référentiel	32
2.6.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre	33
2.6.2	Formules de changement de référentiel	37

3	Dynamique du point matériel	43
3.1	Notion de force	43
3.1.1	Les forces d'interaction à distance	44
3.1.2	Les forces de contact	46
3.2	Première loi de Newton : le principe d'inertie	51
3.2.1	Quantité de mouvement	51
3.2.2	Le principe d'inertie	51
3.2.3	Référentiels galiléens ou inertiels	52
3.3	Deuxième loi de Newton : la Relation Fondamentale de la Dynamique	54
3.4	Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques	55
3.5	Extension aux systèmes de points matériels	55
3.5.1	Centre d'inertie et quantité de mouvement totale	55
3.5.2	Le théorème du centre d'inertie	56
3.6	Dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie	57
3.7	Moment cinétique et rotation	58
3.7.1	Moment d'une force	58
3.7.2	Moment cinétique	59
3.7.3	Le théorème du moment cinétique pour un point matériel	60
3.7.4	Le théorème du moment cinétique pour un système de points	61
3.7.5	Le premier théorème de Koenig	62
3.7.6	Applications simples	63
4	Travail et énergie	67
4.1	Travail d'une force	67
4.1.1	Travail élémentaire d'une force	67
4.1.2	Travail d'une force le long d'un trajet. Puissance	67
4.1.3	Travail moteur et résistant	68
4.1.4	Exemples de travaux de forces	69
4.2	Energie cinétique	70
4.2.1	Définition	70
4.2.2	Le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel	71
4.2.3	Le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de points	72
4.2.4	Le second théorème de Koenig	73
4.2.5	Applications simples	73
4.3	Energie potentielle et énergie mécanique	74
4.3.1	Forces conservatives	74
4.3.2	Energie potentielle	76
4.3.3	Exemples d'énergie potentielle	77
4.3.4	Energie mécanique	78
4.4	Diagrammes d'énergie et puits de potentiel	80
4.4.1	Contrainte d'énergie	80
4.4.2	L'oscillateur harmonique	81
4.4.3	Le pendule simple	82
5	Chocs et systèmes à deux corps	85
5.1	Chocs	85
5.1.1	Définition et propriétés de conservation	85
5.1.2	Exemple : choc linéaire	87
5.2	Propriétés générales des systèmes à deux corps	88

5.2.1	Référentiel barycentrique	89
5.2.2	Mouvement relatif. Masse réduite	90
5.3	Retour sur les chocs	92
5.3.1	Aspect énergétique	92
5.3.2	Conservation du moment cinétique. Paramètre d'impact	93
6	L'interaction de gravitation	97
6.1	La force de gravitation	97
6.2	Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle	97
6.3	Champ de gravitation créé par une masse étendue	98
6.4	Le champ gravitationnel de la Terre	99
6.5	Principe d'équivalence	100
6.6	Energie potentielle de gravitation	101
6.7	Energie potentielle de pesanteur	102
7	Les mouvements à forces centrales	105
7.1	Généralités sur les mouvements à forces centrales	105
7.1.1	Définition	105
7.1.2	Moment cinétique. Loi des aires	106
7.1.3	Les formules de Binet	108
7.1.4	Energie Potentielle	109
7.2	Le problème des deux corps	111
7.2.1	Introduction	111
7.2.2	Le mouvement Képlérien. Etude énergétique	112
7.2.3	Le mouvement Képlérien. Résolution	114
7.2.4	Le mouvement Képlérien. Mouvement elliptique	118
7.3	Pistes de réflexion sans équations (ou presque)	122
7.3.1	Le problème des N corps	122
7.3.2	Le mouvement Képlérien perturbé. Dynamique du Système Solaire	125

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités sur la mécanique

La **physique** est une science fondamentale qui vise à l'étude du comportement, au sens le plus large qui soit, de la matière et de l'espace qui nous entourent. Cette définition est suffisamment vague pour qu'on puisse y englober des domaines d'étude très variés et extrêmement différents. Néanmoins, dans tous ces domaines, le principe de base de la démarche scientifique reste le même :

1. L'observation *répétée* de phénomènes naturels permet de dégager des lois que l'on suppose invariantes.
2. On fait ensuite rentrer ces lois dans le cadre d'un *modèle mathématique* censé représenter au mieux la réalité.
3. Le modèle ainsi posé permet de déduire des prédictions sur le comportement de la matière. Ces prédictions théoriques, une fois confrontées à l'expérience, permettent de valider ou d'infirmer le modèle.

Précisons pour compléter ce tableau que tout modèle, même considéré comme valable, a ses limites. Une modélisation est par essence une simplification, une approximation de la réalité, donc il y a toujours un moment où l'approximation n'est plus valable.

De même, l'accord que l'on peut obtenir entre prédiction théorique et expérience est toujours estimé avec un certain degré de précision, ne serait-ce que parce que toute mesure est entachée d'une *incertitude*. Le calcul de l'incertitude liée à une quelconque mesure physique ou à toute quantité déduite de cette mesure est aussi important que la valeur numérique obtenue.

La discipline la plus fondamentale de la physique, et historiquement la plus anciennement développée, est la *mécanique*. Elle vise à étudier le *mouvement* des corps en le reliant aux *forces* qui en sont à l'origine. Dans la pratique, la description du mouvement d'un corps se traduit le plus souvent par la donnée de sa position et de sa vitesse dans l'espace en fonction du temps. Ceci définit le cadre de la *mécanique du point* qui est l'objet de ce cours.

Si le corps dont on décrit le mouvement est étendu, il peut être intéressant de décrire en plus l'évolution de sa *rotation* propre autour de lui-même. On parlera alors de *mécanique du solide*, qui sort du cadre de ce cours. On peut également s'intéresser, outre au mouvement d'un corps, à ses déformations sous l'effet des contraintes qu'il subit, elles-mêmes fonctions de sa rigidité. Ce cadre étendu s'appelle *mécanique des milieux continus*. Enfin, on peut avoir à étudier l'écoulement d'une masse fluide (liquide ou gaz) sous l'effet des forces qui s'y appliquent, auquel cas on parlera de *mécanique des fluides*. L'étude de ces domaines de la mécanique se fait en deuxième cycle universitaire.

Cependant, les principes de base qui vont être introduits dans ce cours pour la mécanique du point constituent le fondement commun à toutes ces branches de la mécanique, même s'ils peuvent parfois prendre une forme mathématique différente. Qui plus est, l'étude d'un système mécanique donné peut se faire dans plusieurs de ces cadres suivant ce qu'on cherche à décrire. Prenons juste un exemple pour illustrer ceci, à savoir le mouvement de la Terre autour du Soleil sous l'effet du Soleil et des planètes du Système Solaire. Si l'on ne s'intéresse qu'à l'évolution de l'orbite terrestre autour du Soleil, le cadre de la mécanique du point tel qu'il est décrit dans ce cours convient parfaitement. Si maintenant on cherche en outre à décrire les mouvements de l'axe de rotation de la Terre¹, couplé à son mouvement orbital, nous devons alors décrire la Terre comme un solide. On s'apercevra ensuite assez vite qu'une description correcte de la rotation terrestre nécessite de considérer la Terre comme un milieu (faiblement) *déformable* sous l'effet de sa propre rotation, faute de quoi les résultats théoriques ne sont pas en accord avec l'expérience. L'arsenal de la mécanique des milieux continus est donc nécessaire. Enfin, la description des plus fines variations de la rotation terrestre qu'on arrive à détecter aujourd'hui nécessite de tenir compte des mouvements (fluides donc) des masses océaniques, des glaces polaires, etc. . .

Ce dont on se rend compte à travers cet exemple, c'est que faire rentrer l'étude d'un système physique dans un formalisme mathématique revient invariablement à opérer une *réduction* de la complexité de la réalité. On dit souvent que la physique fait partie des sciences *exactes*. En toute rigueur, seules les mathématiques sont une science exacte. La physique est plutôt une science de modélisation de la réalité au moyen d'un formalisme mathématique, qui se veut suffisamment proche de la réalité de manière à pouvoir faire des prédictions quant au comportement de la matière.

Ainsi donc tout formalisme a des limites de validité. Les limites de la mécanique du point qui fait l'objet de ce cours sont multiples. On trouve bien sûr les limites décrites plus haut, qui interviennent essentiellement lorsqu'on doit considérer les corps que nous étudions comme des solides éventuellement déformables. On trouve une autre limite vers l'infiniment petit, aux échelles atomiques et subatomiques. L'étude des phénomènes à ces échelles est du ressort de la *mécanique quantique*. Enfin, le formalisme qui est décrit dans ces pages cesse d'être valable lorsqu'il faut prendre en compte les effets dus à la *relativité* sous toutes ses formes, ce qui survient généralement dans les trois situations suivantes :

- lorsque les vitesses deviennent comparables à la vitesse de la lumière $c = 299792457 \text{ m/s}$;
- aux voisinages de champs gravitationnels très intenses, c'est à dire tels que la vitesse d'évasion soit de l'ordre de celle de la lumière ;
- lorsqu'on étudie des phénomènes sur une échelle de distance comparable aux dimensions de l'Univers tout entier.

Par opposition à tout cela, la mécanique du point décrite dans ce cours est dite *classique* ou *Newtonienne*.

1.2 Définitions

Il nous est nécessaire de définir un certain nombre de notions auxquelles nous nous référerons par la suite.

L'*Espace* usuel dans lequel nous étudierons les mouvements est un espace à trois dimensions auxquelles il convient d'ajouter le temps. Ainsi, la description du mouvement d'un objet se fait dans le cas général par la donnée de trois coordonnées (distances ou angles, peu importe) en

¹Ce point est capital pour l'étude du climat.

fonction du temps. Nous verrons que de nombreux mouvements peuvent en fait se ramener à une étude dans un plan (deux dimensions) ce qui bien sûr simplifie la situation.

Nous introduirons en tout premier lieu la notion de *point matériel*. Un point matériel est un objet dont les dimensions propres sont petites par rapport à l'échelle d'étude du mouvement, de telle sorte que la rotation propre de l'objet n'ait aucune influence sur le mouvement. Ainsi présenté, la notion de point matériel est relative au problème considéré. S'il apparaît clairement que cette notion s'appliquera toujours à des particules élémentaires comme un électron, il peut paraître surprenant de constater par exemple que le Soleil, la Terre et les autres planètes du Système Solaire seront considérées comme des points matériels dans l'étude de leurs mouvements relatifs, car les dimensions de leurs orbites sont très supérieures à leurs tailles physiques. Plus généralement, nous appliquerons souvent le formalisme décrit ci-dessous à des objets qu'on peut difficilement considérer comme des points matériels dans le cadre de l'étude. En fait le *théorème du centre d'inertie* introduit plus loin dans ce cours montre que tout le formalisme relatif aux points matériels s'applique tant que les notions de rotation propre n'ont pas à intervenir.

Une notion fondamentale est celle de *référentiel*. Il faut savoir qu'un mouvement s'analyse toujours par rapport à quelque chose que l'on suppose fixe. Cette référence fixe est appelée référentiel. En d'autres termes, il n'y a de mouvement que *relatif*. Préciser le référentiel d'étude d'un mouvement est fondamental, car suivant le référentiel choisi, un même mouvement peut être analysé de manière très différente. Ainsi prenons l'exemple d'un passager debout dans un train en mouvement et lâchant un objet. Si un observateur présent dans le train (référentiel lié au train) observe le mouvement de l'objet, il conclura à un mouvement rectiligne vertical. Pour un autre observateur assistant au passage du train depuis l'extérieur (référentiel lié à la Terre), ses conclusions quant au mouvement de l'objet (pour peu qu'il puisse le voir) seront bien différentes. Nous introduirons par la suite des exemples classiques de référentiels.

On associe souvent à la notion de référentiel celle de *repère*. Un repère est constitué d'un point d'origine (souvent dénommé O) et d'un système d'axes utilisé pour repérer les points par rapport à l'origine. Traditionnellement, un repère en 3 dimensions s'écrit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs de base. En 2 dimensions, on se contentera de deux vecteurs de base au lieu de trois. Un repère est toujours lié à un référentiel donné, avec lequel il se déplace le cas échéant. Les deux notions ne doivent pas être confondues. On peut définir plusieurs repères liés au même référentiel.

Une fois qu'on a défini un repère, on se donne généralement un *système de coordonnées* lié au repère. Il s'agit d'un système de nombres permettant de quantifier la position des points au moyen de deux ou trois nombres suivant la dimension de l'espace considéré. Ce peut être des longueurs de projection sur les axes comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, mais on peut aussi repérer les points à l'aide d'angles ou tout autre quantité comme nous le verrons plus loin.

Enfin, lorsqu'on décrit un mouvement, il convient de se donner une *origine des temps*, c'est à dire un temps de référence à partir duquel on comptera toutes les autres dates, en positif comme en négatif. Le choix de l'origine des temps, comme celui du repère et du système de coordonnées, peut être guidé par la nature du problème étudié. En général, on cherchera dans ces choix à respecter les symétries évidentes du problème, ce qui se traduira en pratique par des calculs plus simples.

1.3 Rappels mathématiques

La pratique de la physique s'accompagne de l'utilisation d'un formalisme mathématique dont il est opportun de rappeler ici quelques bases.

1.3.1 Quantité scalaires et vectorielles

Nous appellerons une quantité *scalaire* toute grandeur qui peut se décrire à l'aide d'un nombre. Autrement dit, il s'agit d'une quantité monodimensionnelle. On peut citer deux exemples classiques : le temps, et la masse d'un corps.

Par opposition, une quantité *vectorielle*, encore appelée *vecteur*, est par définition multidimensionnelle. Dans un repère assorti d'un système de coordonnées, une telle grandeur se décrit au moyen de plusieurs nombres. Géométriquement, on dira d'un vecteur qu'il est caractérisé par une direction, un sens et une longueur ou *norme*. Traditionnellement, on représente les vecteurs à l'aide de flèches. Nous rencontrerons dans ce cours de nombreux exemples de vecteurs : forces, vitesse, quantité de mouvement, etc. . Certains vecteurs sont en outre caractérisés par un point d'application. C'est par exemple le cas des forces.

Nous noterons une quantité vectorielle au moyen d'une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{v}$. Signalons au passage que cette notation est essentiellement française. Dans les ouvrages de culture anglo-saxonne, on trouvera plutôt les vecteurs notés à l'aides de caractères gras sans flèches : $\mathbf{v}$. Il ne faut donc pas vous affoler si vous rencontrez un jour ce type de notation.

1.3.2 Dérivation et différentielle

Mathématiquement, la dérivée d'une fonction f de la variable réelle t se définit par

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad , \quad (1.1)$$

lorsque bien sûr cette limite peut être définie. Dans les applications de physique que nous faisons, toutes les fonctions que nous manipulons sont la plupart du temps au minimum continûment dérivables, de telle sorte que l'existence de dérivées est toujours assurée².

La notation f' due à Newton est d'usage courant en mathématiques. En physique, on lui préfère la notation de Leibnitz df/dt pour essentiellement deux raisons. En premier lieu, en écrivant df/dt , on indique clairement la variable par rapport à laquelle on dérive, en l'occurrence ici t . Si en mathématiques il n'y a pas d'ambiguïté, en physique on peut avoir à dériver par rapport à de nombreuses variables, d'espace ou de temps, au sein d'un même formalisme. Dans les applications qui seront les nôtres dans le cadre de ce cours, nous dériverons le plus souvent par rapport au temps t (c'est pourquoi on a écrit t au-dessus). Mais vous serez assez rapidement amenés à dériver par rapport à des variables d'espace.

La deuxième raison qui fait préférer la notation de Leibnitz est qu'elle en appelle à la notion intuitive de dérivée. On peut encore écrire

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \quad , \quad (1.2)$$

indiquant par là que la dérivée est la limite du taux d'accroissement. Intuitivement nous dirons donc que pour un accroissement Δt faible de la variable t , l'accroissement correspondant Δf

²Il se peut toutefois que dans une description simplifiée, certaines quantités obtenues par des dérivées ne soient pas définies en certains points pathologiques. Pensez par exemple au cas de la vitesse lors d'un rebond instantané.

de f vaudra

$$\Delta f \approx \left(\frac{df}{dt} \right) \Delta t \quad , \quad (1.3)$$

ce que nous écrirons par

$$df = \left(\frac{df}{dt} \right) dt \quad . \quad (1.4)$$

On pourrait objecter qu'il s'agit ici de « mathématiques pour physicien » peu rigoureuses. En fait il n'en est rien. On peut définir mathématiquement et tout à fait rigoureusement les quantités df et dt^3 appelées *différentielles* et nous vous renvoyons sur ce point à votre cours de mathématiques. Ce qu'il est important de retenir ici, c'est que ces quantités peuvent se voir intuitivement comme des accroissements infinitésimaux. Vous aurez à manipuler des différentielles dans de nombreuses branches de la physique, comme par exemple l'électromagnétisme ou la thermodynamique.

Il est d'un usage courant en mécanique de noter au moyen d'un point les dérivées par rapport au temps t . Ainsi, si t désigne le temps (et uniquement dans ce cas-là), on pourra écrire, sans que ce soit obligatoire, $\dot{f}$ comme abréviation de df/dt , et $\ddot{f}$ au lieu de d^2f/dt^2 . Nous ferons usage de cette notation dans ce cours. Toutefois, à la moindre ambiguïté, la notation de Leibnitz sera reprise.

La notion de dérivation n'est pas restreinte aux quantités scalaires. La fonction générale f introduite plus haut peut prendre ses valeurs dans n'importe quel espace où la définition de la dérivée prend un sens. Ainsi, on définira la dérivée d'un vecteur $d\vec{A}/dt$ si le vecteur $\vec{A}$ est une fonction du temps t . Les exemples seront nombreux dans ce cours.

La dérivation est une opération linéaire. Les dérivées des sommes sont les sommes des dérivées. Les produits se dérivent selon la règle bien connue

$$\frac{d(fg)}{dt} = f \frac{dg}{dt} + \frac{df}{dt} g \quad . \quad (1.5)$$

Ceci est valable pour n'importe quelle forme de produit, produit scalaire ou vectoriel. De même si λ est une quantité scalaire dépendant du temps et $\vec{A}$ une quantité vectorielle dépendant du temps, on peut exprimer la dérivée par rapport au temps du vecteur $\lambda\vec{A}$ (colinéaire à $\vec{A}$) :

$$\frac{d(\lambda\vec{A})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \vec{A} \quad . \quad (1.6)$$

Mentionnons pour finir la composition des dérivations. Si nous avons une fonction f dérivable d'une variable θ , elle-même fonction dérivable du temps t , la fonction $f \circ \theta$ peut se dériver. En notation de Newton, on écrit :

$$(f \circ \theta)'(t) = f'(\theta(t)) \times \theta'(t) \quad . \quad (1.7)$$

En notation de Leibnitz, cette formule est d'une écriture très simple :

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad . \quad (1.8)$$

³On les définit comme des applications linéaires.

1.3.3 Fonctions de plusieurs variables. Dérivées partielles

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit la dérivation pour des fonctions qui dépendent d'une seule variable réelle. En physique, cette variable sera souvent le temps t . Nous aurons aussi à manipuler des fonctions dépendant de *plusieurs* variables réelles. Dans ce cas, les variables en question seront la plupart du temps des coordonnées spatiales. Nous prendrons donc pour illustrer notre propos l'exemple d'une fonction $f(x, y, z)$ qui dépend de trois variables réelles x , y et z , mais ce qui suit reste valable pour des fonctions d'un nombre arbitraire de variables.

Nous appellerons *dérivée partielle de f par rapport à x* au point (x_0, y_0, z_0) la dérivée de f en ce point dans l'hypothèse où seule la coordonnée x varierait, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} . \quad (1.9)$$

Bien entendu, nous aurons des définitions similaires pour $\partial f / \partial y$ et $\partial f / \partial z$. La notation ∂ est purement symbolique, mais elle a pour but de montrer qu'en dérivant par rapport à une des variables, nous n'avons pas une différentielle totale. En clair, nous n'avons pas $df = (\partial f / \partial x) dx$. En fait, nous avons

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz . \quad (1.10)$$

Explicitons un peu plus à quoi va nous servir cette formule. Imaginons un mobile se déplaçant dans l'espace. Ses coordonnées (x, y, z) (voir plus loin) sont elles-mêmes fonctions du temps t . La fonction f définie en tout (x, y, z) devient une fonction du temps. Nous avons alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} . \quad (1.11)$$

Nous faisons là un abus de langage courant. En toute rigueur la fonction qui au temps associe la valeur de f au point $(x(t), y(t), z(t))$ est la composée de la fonction du mouvement $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ et de la fonction spatiale f . Nous devrions en fait utiliser une autre lettre (g par exemple), et écrire

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} . \quad (1.12)$$

Cette formule est à voir comme le pendant de la formule (1.8) pour les fonctions à plusieurs variables⁴. Il faut surtout retenir que la formule (1.8) n'est valable que pour des fonctions d'une seule variable réelle où les différentielles sont exactes. Il ne faut *surtout pas* appliquer ceci à des dérivées partielles, et ceci justifie la différence de notation.

Précisons enfin que la fonction f que nous avons utilisée ici n'est pas nécessairement à valeurs scalaires. Ce peut être une fonction vectorielle, auquel cas les dérivées partielles sont elles-mêmes des vecteurs.

1.3.4 Produit scalaire

En mathématiques, un produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive. En fait, dans un espace de dimension finie, on montre qu'on peut toujours définir une base orthonormée

⁴Ici nous composons une fonction de plusieurs variables avec une fonction d'une seule variable. Pour dériver la composée de deux fonctions toutes deux de plusieurs variables, c'est un peu plus compliqué, mais nous n'en aurons pas besoin dans notre cours.

pour le produit en question et se ramener au cas usuel. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un *réel* noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Si les deux vecteurs ont pour coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) dans un repère cartésien orthonormé, alors on aura

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad . \quad (1.13)$$

En dimension 2, la somme se limite à deux termes. On a bien sûr $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, et on a les relations de bilinéarité usuelles, à savoir

$$(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \quad , \quad (1.14)$$

où les λ_i sont des réels quelconques.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, le produit $\vec{u} \cdot \vec{u}$ (noté encore $\vec{u}^2$) est une quantité positive. La *norme* de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ ou encore u s'il n'y a pas d'ambiguïté, sera par définition

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad . \quad (1.15)$$

Géométriquement, on montre aisément que pour tout couple de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire s'écrit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad , \quad (1.16)$$

où θ l'angle formé par les deux vecteurs (Fig. 1.1), compté entre 0 et π . Ceci montre par contre-coup que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul si et seulement si un des deux vecteurs est nul ou s'ils sont orthogonaux entre eux.

Par définition, un vecteur *unitaire* sera un vecteur dont la norme vaut 1. Nous utiliserons fréquemment des vecteurs unitaires pour caractériser des directions. Ainsi, si $\vec{v}$ est un vecteur quelconque, le vecteur $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ sera un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{v}$.

Nous allons montrer ici un résultat qui nous servira par la suite. Supposons que nous ayons un vecteur $\vec{u}(t)$ variable en fonction du temps⁵. Nous supposons en outre que ce vecteur variable reste *unitaire*. En d'autres termes, $\vec{u}$ est un vecteur unitaire variable. Nous disposons donc a priori de la dérivée temporelle $d\vec{u}/dt$ de $\vec{u}$. Par définition, la norme de $\vec{u}$ est constante et vaut 1. On a donc toujours $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$, et donc $d/dt(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0$. On écrit donc (le produit scalaire se dérivant comme un produit)

$$0 = \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \implies \quad \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \quad . \quad (1.17)$$

Par conséquent, $d\vec{u}/dt$ et $\vec{u}$ sont *orthogonaux*. Nous pouvons donc énoncer

La dérivée d'un vecteur unitaire est un vecteur orthogonal à ce vecteur.

Il en sera de même pour tout vecteur dont la norme reste constante (sans forcément valoir 1). La figure 1.2 nous aidera à appréhender ce résultat de manière intuitive. On a représenté le vecteur $\vec{u}$ à l'instant t ($\vec{u}(t)$) et à l'instant juste après $t+dt$ ($\vec{u}(t+dt)$). La variation infinitésimale $d\vec{u} = \vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)$ est le petit vecteur reliant les deux extrémités. Si la norme de $\vec{u}$ reste constante, l'extrémité de ce vecteur se déplacera sur un cercle, et on voit bien que la variation élémentaire sera perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$: Le rayon d'un cercle est perpendiculaire à la tangente au cercle en un point.

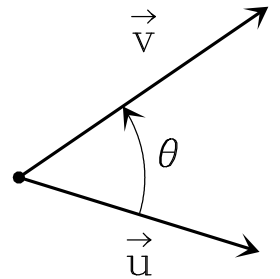


FIG. 1.1: Angle entre deux vecteurs

1.3.5 Produit vectoriel

⁵On a explicité ici la dépendance en fonction du temps, mais ce ne sera pas toujours le cas.

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ⁶, est une notion intimement liée à la structure tridimensionnelle de l'espace. Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur, contrairement au produit scalaire qui est un nombre.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini comme un vecteur orthogonal au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (voir Fig. 1.3), avec

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin \theta \quad . \quad (1.18)$$

Ceci nous définit un vecteur au sens près. Le sens est fixé en imposant que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit *direct*, c'est à dire orienté comme sur la figure. Le trièdre $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ sera, lui, *indirect*. Précisons que ce choix de choisir comme directs un certain type de trièdres plutôt que les autres est une pure convention, qui constitue un choix d'*orientation de l'espace*. On aurait très bien pu choisir une orientation opposée, auquel cas le produit vectoriel aurait été opposé.

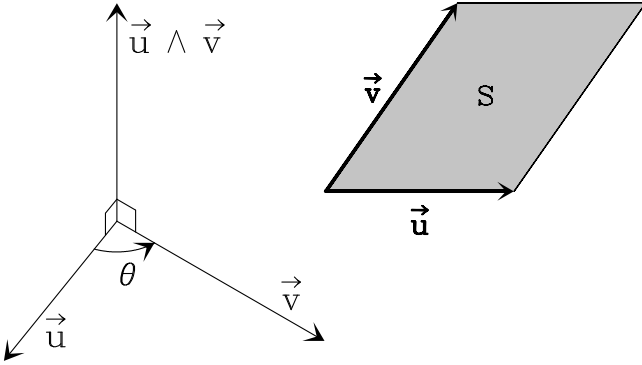


FIG. 1.3: Définition intrinsèque du produit vectoriel et signification géométrique

montre alors par un simple calcul que les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \quad , \quad (1.19)$$

où le symbole $|\dots|$ est celui du *déterminant*. Pour tous réels (a, b, c, d) , on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad . \quad (1.20)$$

Cette formule peut constituer en elle-même une définition du produit vectoriel, une fois qu'on a montré que le vecteur obtenu de cette façon est le même quel que soit le repère choisi. Une telle définition, faisant explicitement référence à un repère, sera qualifiée d'*extrinsèque*, et constituera en outre une formule de calcul pratique. Géométriquement, la norme du produit vectoriel correspond aussi à la surface du parallélogramme sous-tendu par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (Fig. 1.3)

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = S \quad . \quad (1.21)$$

Le produit vectoriel obéit aux mêmes règles de bilinéarité que le produit scalaire. Il est en outre antisymétrique ($\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$), et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Tout comme

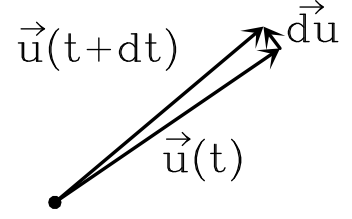


FIG. 1.2: Variation élémentaire d'un vecteur unitaire

⁶On trouve parfois la notation $\vec{u} \times \vec{v}$.

pour le produit scalaire, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont fonction du temps, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se dérivera en fonction du temps comme un produit, mais là on fera bien attention à l'ordre des facteurs dans les produits vectoriels individuels :

$$\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \quad . \quad (1.22)$$

Mentionnons maintenant quelques formules usuelles. On aura en premier lieu de manière évidente d'après la définition

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad . \quad (1.23)$$

Enfin, pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on aura

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad (\text{produit mixte}), \quad (1.24)$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (\text{double produit vectoriel}). \quad (1.25)$$

Le produit mixte $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est aussi égal au *volume* du parallélépipède sous-tendu par les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1.3.6 Equations différentielles

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions d'une variable réelle satisfaisant une relation donnée entre elle-même et ses dérivées. Le relation constitue l'« équation différentielle ». On appelle *ordre* de l'équation l'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans l'équation. Ainsi, dans une équation du premier ordre, on aura une relation entre une fonction et sa dérivée ; dans une équation du deuxième ordre, on aura une relation entre la fonction, sa dérivée (éventuellement) et sa dérivée seconde.

Il est traditionnel de nommer y la fonction dans une équation différentielle et y' sa dérivée (et y'' la dérivée seconde). Ainsi, résoudre l'équation différentielle $y'' + 3ty = \sqrt{t^2 + 1}$ revient à chercher toutes les fonctions f de la variable t telles que $f''(t) + 3tf(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ pour tout t (au minimum sur une intervalle).

Nous renvoyons le lecteur à un cours de mathématiques plus complet pour les conditions d'existence des solutions (théorème de Cauchy-Lipschitz...). La résolution de problème de physique passe souvent par la résolution d'équations différentielles, pour l'essentiel des équations du premier ou du second ordre. Nous pouvons faire ici quelques remarques :

- l'espace d'arrivée des fonctions n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$. La fonction y apparaissant dans une équation donnée peut être une fonction *vectorielle*. Si on décompose dans un système de coordonnées donné, on peut se ramener à plusieurs équations différentielles scalaires couplées.
- *toutes* Toutes les équations ne sont pas solubles analytiquement à partir des fonction usuelles, et c'est même la majorité. Mieux, on *définit* certaines fonctions particulières (fonctions de Bessel...) comme les solutions d'une équation différentielle particulière qu'on ne sait pas résoudre explicitement.
- La résolution d'une équation différentielle s'accompagne en général de la donnée d'une ou plusieurs *conditions initiales*, comme la valeur que doit prendre la fonction et/ou sa dérivée en un point donné. La solution générale d'une équation différentielle est le plus souvent constitué d'une famille de fonctions qui dépendent d'un certain nombre de constantes d'intégration qui constituent autant de paramètres libres. La prise en compte des conditions initiales permet de fixer ces constantes. Le nombre de constantes à fixer (et donc de conditions initiales à préciser) est en général égal à l'ordre de l'équation.

- Il arrive assez souvent que l'on ait à résoudre une équation différentielle du second ordre de type $\mathcal{F}(y, y', y'') = 0$ pour laquelle une résolution analytique est impossible, mais où il est possible par contre d'en tirer une relation ne faisant plus intervenir y'' mais une première constante d'intégration, du genre $\mathcal{G}(y, y') = \text{cte}$. Ce type de relation est appelée *intégrale première* de l'équation, ou du mouvement lorsqu'il s'agit d'un problème de mécanique. Ainsi la conservation de l'énergie mécanique dans un système conservatif est un exemple d'intégrale première.

Dans ce qui suit, nous désignerons par t la variable dont dépend la fonction recherchée (implicitement le temps, en rapport avec notre cours de mécanique). Mais ce n'est qu'une simple convention. Il est d'usage de classer les équations différentielles en fonction de leurs caractéristiques : linéaires, à variables séparables, à coefficients constants, homogènes, etc.

Equations à variables séparables

On appelle équation différentielle à variables séparables toute équation différentielle *scalaire* qui se laisse mettre sous la forme

$$f(y)y' = g(t) \quad , \quad (1.26)$$

où f et g sont deux fonctions d'une variable réelle. Dans ce cas, si F et G désignent deux primitives des fonction f et g (dans le cas de f , où on prend y comme variable), alors, le membre de gauche est la dérivée par rapport au temps de $F(y)$ (dérivation composée) et celui de droite la dérivée de $G(t)$. Ainsi, on doit avoir par intégration

$$F(y) = G(t) + C \quad , \quad (1.27)$$

où C est une constante. Ceci permet d'achever la résolution de l'équation, au pire sous forme implicite. Traditionnellement, notant $y'dy/dt$, (1.26) s'écrit

$$f(y) dy = g(t) dt \implies \int f(y) dy = \int g(t) dt + C \iff F(y) = G(t) + C \quad . \quad (1.28)$$

Equations linéaires du premier ordre

Une équation linéaire du premier ordre est une équation du type

$$y' + f(t)y = g(t) \quad (1.29)$$

où f et g sont des fonctions de t données. L'équation est dite *homogène* si $g = 0$. Une équation linéaire homogène est à variables séparables et se résout. En effet, là où $y \neq 0$, on écrit

$$y' + f(t)y = 0 \implies \frac{y'}{y} = -f(t) \implies \ln|y| = -\int f(t)dt + C \iff y = -K \exp\left(-\int f(t)dt\right), \quad (1.30)$$

où K est une autre constante ($= e^C$), et où $\int f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f .

Considérons maintenant une équation non-homogène de type (1.29). On appellera *équation homogène associée* la même équation où on aura remplacé g (qu'on appelle aussi le *second membre* de l'équation) par 0. Si y_1 et y_2 sont deux solutions différentes de l'équation (1.29) avec second membre, un calcul très simple montre que la différence $y_1 - y_2$ est une solution de l'équation homogène associée. Ainsi, la stratégie de résolution de (1.29) est la suivante :

- On commence par résoudre l'équation homogène associée ;
- On recherche *une solution particulière* de l'équation complète ;

- L'ensemble des solutions de l'équation complète s'obtient alors en rajoutant la solution particulière à l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

La difficulté est de trouver une solution particulière. Il existe un cas où c'est facile, c'est lorsque f et g sont des constantes k_1 et k_2 . Dans ce cas, il y a une solution particulière évidente qui est $y = k_2/k_1$ (solution constante, $y' = 0$). Comme la solution de l'équation homogène est $y = Ce^{-k_1 t}$, la solution globale s'écrit $y = k_2/k_1 + Ce^{-k_1 t}$.

Dans les situations plus compliquées, la méthode classique est celle de « variation de la constante ». On prend la solution de l'équation homogène associée, soit $y = C \exp(-F(t))$, où F est une primitive de f , et on considère que C est maintenant une fonction $C(t)$ (on fait « varier » la constante C). On dérive par rapport au temps

$$y' = C f(t) \exp(-F(t)) + C' \exp(-F(t)) \quad , \quad (1.31)$$

et on réinjecte ces formes de y et y' dans l'équation complète (1.29). Il reste au bout du compte

$$C' \exp(-F(t)) = g(t) \quad \implies \quad C' = \exp(F(t)) g(t) \quad . \quad (1.32)$$

On en déduit alors C en prenant une primitive, ce qui fournit la solution générale de l'équation (et donc une solution particulière).

Equations du second ordre

Les équations du second ordre sont plus difficiles à résoudre. Une telle équation est dite linéaire lorsqu'elle se met sous la forme

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t) \quad , \quad (1.33)$$

où f , g , h sont trois fonctions d'une variable réelle. L'équation est homogène lorsque $h = 0$. Là encore, il suffit en théorie de résoudre l'équation homogène associée et d'ajouter aux solutions une solution particulière de l'équation avec second membre pour trouver toutes les solutions de l'équation avec second membre. Mais ici, deux difficultés se dressent :

- La résolution de l'équation homogène associée n'a rien d'évident. Tout dépend du contexte. C'est tellement vrai qu'il existe des fonctions comme les fonctions de Bessel qui sont définies comme les solutions d'une équation de ce type.
- Même si on y arrive, la méthode de variation de la, ou des constante(s) (équation d'ordre 2 = deux constantes d'intégration) est moins aisée à mettre en œuvre. Dans certains cas, cela marche et passe par la résolution d'une équation du premier ordre annexe.

Il existe au moins un cas où l'équation est résoluble, c'est lorsque les coefficients sont constants. Considérons une équation du type

$$y'' + 2\frac{\omega}{Q}y' + \omega^2 y = 0 \quad . \quad (1.34)$$

La technique consiste à chercher des solutions exponentielles $y = e^{rt}$. En remplaçant dans l'équation, on voit que nécessairement r doit vérifier l'équation caractéristique

$$r^2 + 2\frac{\omega}{Q}r + \omega^2 = 0 \quad . \quad (1.35)$$

Ceci fournit deux solutions

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - Q^2}}{Q} \omega \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - Q^2}}{Q} \omega. \quad (1.36)$$

Pour des raisons de dimensions, alors toutes les solutions sont de la forme

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad , \quad (1.37)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Dans le cas particulier où $r_1 = r_2 = r$ (racine double), on montre alors que $y = t e^{rt}$ est aussi solution, auquel cas la solution générale s'écrit

$$y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \quad . \quad (1.38)$$

Attardons nous un instant sur le cas où toutes les constantes sont réelles. Si $Q \leq 1$, alors r_1 et r_2 sont des réels, et la solution est une combinaison de deux exponentielles réelles. Si $Q > 1$ dans ce cas r_1 et r_2 sont deux complexe conjugués qui peuvent s'écrire $a + ib$ et $a - ib$. La solution de l'équation s'écrit alors

$$y = e^{at} (C_1 e^{ibt} + C_2 e^{-ibt}) \quad . \quad (1.39)$$

En utilisant alors les formules d'Euler $e^{ibt} = \cos bt + i \sin bt$ et $e^{-ibt} = \cos bt - i \sin bt$ on retransforme cette équation sous la forme bien réelle cette fois

$$y = e^{at} (K_1 \cos bt + K_2 \sin bt) \quad , \quad (1.40)$$

où K_1 et K_2 sont de nouvelles constantes. Ceci peut se mettre encore sous la forme

$$y = e^{at} K \cos(bt + \phi) \quad , \quad (1.41)$$

où K et ϕ sont encore de nouvelles constantes. Il s'agit d'un mouvement sinusoïdal pseudopériodique, amorti ou amplifié suivant le signe de Q . Dans le cas plus particulier encore où le terme en y' est nul ($Q \rightarrow \infty$), le terme en e^{at} disparaît ($a = 0$), et la solution est purement sinusoïdale. Ces deux derniers cas sont très fréquents en mécanique.

1.4 Les principaux systèmes de coordonnées utilisés

1.4.1 Coordonnées dans le plan

Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnées cartésiennes est le plus simple à introduire. Dans le plan, il consiste à se donner un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé et fixe, et on repère la position d'un point courant M par rapport à l'origine au moyen de ses projections (x, y) sur les vecteurs de base appelées respectivement abscisse et ordonnée (Fig. 1.4). Nous écrirons

$$O\vec{M} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad . \quad (1.42)$$

Coordonnées polaires

En coordonnées polaires, on introduit toujours le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, mais on repère maintenant le point M au moyen de sa distance ρ (ou rayon) au point O , et de l'angle polaire θ que fait le vecteur $O\vec{M}$ avec le vecteur $\vec{i}$, compté dans le sens trigonométrique (Fig. 1.4). Ce système de coordonnées (ρ, θ) est clairement relié au système cartésien (x, y) comme suit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad . \quad (1.43)$$

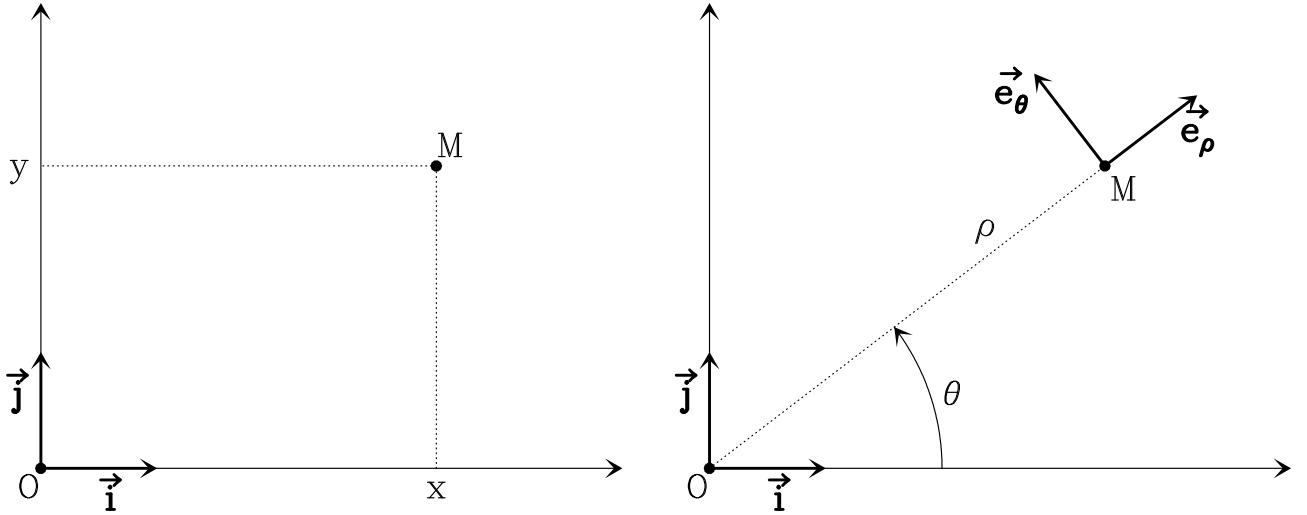


FIG. 1.4: Coordonnées cartésiennes et polaires dans le plan

On notera toutefois que la relation $\tan \theta = y/x$ ne définit θ qu'à π près, l'indétermination étant levée par le signe de x et y .

Il est commode dans ce système de coordonnées d'introduire la notion de *base locale*. Il s'agit d'une base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ qui dépend de la position du point M (voir Fig. 1.4). A partir d'une position donnée du point M , le vecteur unitaire $\vec{e}_\rho$ sera défini comme correspondant à la direction dans laquelle se déplace le point M si on augmente légèrement le rayon ρ . De même, $\vec{e}_\theta$ correspondra à la direction dans laquelle se déplacera le point M lors d'une augmentation infinitésimale de l'angle polaire θ . Il est alors facile de voir qu'on a :

$$\vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad ; \quad (1.44)$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad . \quad (1.45)$$

On a aussi $\vec{e}_\rho = \partial \vec{OM} / \partial \rho$ et $\vec{e}_\theta = (1/\rho) \partial \vec{OM} / \partial \theta$. Dans cette base, la position du point M s'exprime simplement :

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho \quad , \quad (1.46)$$

ce qui a l'avantage d'être plus simple que la définition (1.42) en coordonnées cartésiennes, mais le prix à payer ici est que le vecteur $\vec{e}_\rho$ peut être amené à varier lors d'un mouvement du point M (voir chapitre suivant), ce qui n'est pas le cas de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On peut remarquer à ce niveau que la notion de base locale ne se limite pas aux seules coordonnées polaires. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, on peut définir une base locale comme les directions de déplacement de M lors d'augmentations infinitésimales des coordonnées x et y . On se rendra vite compte que dans ce cas, la base locale n'est autre que la base $(\vec{i}, \vec{j})$, et ce *quelle que soit la position du point M* . C'est pourquoi nous ne l'avons pas introduite comme telle plus haut.

En coordonnées polaires, la base locale dépend de la position du point M . Plus précisément, on voit bien que $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ ne dépendent que de θ et non de ρ . Nous allons montrer ici un résultat important qui nous sera utile par la suite : Nous pouvons considérer les *dérivées* de ces vecteurs par rapport à θ . En dérivant les expressions (1.44) et (1.45), on trouve

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{e}_\theta \quad ; \quad (1.47)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} = -\vec{e}_\rho \quad . \quad (1.48)$$

Nous retrouvons bien ici le fait que la dérivée d'un vecteur unitaire est un vecteur perpendiculaire au vecteur initial. Simplement, dans notre cas, la dérivée de chacun de nos vecteurs est un vecteur tourné de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique. Ce résultat peut se deviner intuitivement sur un dessin.

1.4.2 Coordonnées dans l'espace

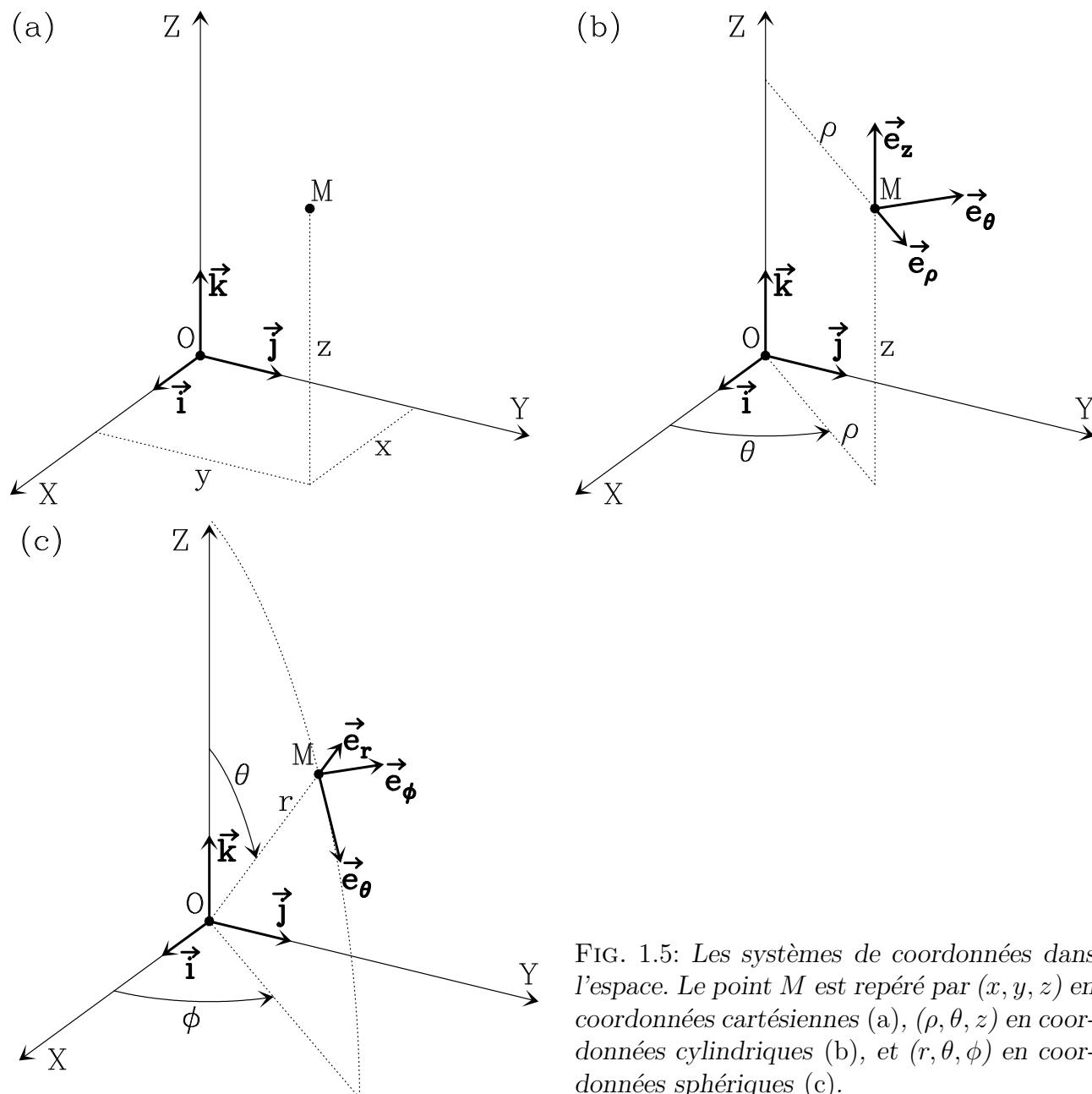


FIG. 1.5: Les systèmes de coordonnées dans l'espace. Le point M est repéré par (x, y, z) en coordonnées cartésiennes (a), (ρ, θ, z) en coordonnées cylindriques (b), et (r, θ, ϕ) en coordonnées sphériques (c).

Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnées cartésiennes dans l'espace s'introduit aussi naturellement que dans le plan. On se donne maintenant un repère orthonormé *direct* fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M sera repéré par ses trois projections (x, y, z) sur les axes principaux (Fig. 1.5a). Vectoriellement,

nous écrirons

$$O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad . \quad (1.49)$$

Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont une extension tridimensionnelle des coordonnées polaires dans le plan. Ainsi, nous considérerons la projection du point M sur le plan XOY , et la repérerons par ses coordonnées polaires (ρ, θ) dans ce plan. La position du point M est ensuite précisée par la donnée de son altitude ou cote z (la même qu'en cartésien). Les coordonnées cylindriques sont donc (ρ, θ, z) . Elles sont clairement reliées aux coordonnées cartésiennes par les mêmes formules (1.43) qui relient coordonnées polaires et cartésiennes dans le plan, l'altitude z restant inchangée (Fig. 1.5b).

On définit aussi une base locale pour les systèmes de coordonnées dans l'espace. Dans le cas des coordonnées cylindriques, cette base sera $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, où $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ seront définis par les mêmes relations (1.44) et (1.45) qui les définissaient dans le plan par rapport à $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et où on a bien sûr $\vec{e}_z = \vec{k}$. Dans cette base locale, la position du point M devient :

$$O\vec{M} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad . \quad (1.50)$$

Les coordonnées cylindriques s'emploient généralement lors du traitement de problèmes à symétrie axiale, c'est-à-dire de révolution autour d'un axe qui correspondra à l'axe OZ .

Coordonnées sphériques

Au contraire des coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques sont de véritables coordonnées polaires tridimensionnelles. Le point M est maintenant repéré au moyen d'une distance r et de deux angles θ et ϕ . r est la distance au point O , θ est l'angle que fait $O\vec{M}$ avec l'axe OZ , et ϕ a la même définition que le θ des coordonnées cylindriques, à savoir l'angle polaire de la projection de M sur le plan XOY . θ porte le nom de *colatitude* et ϕ est appelé *longitude* (Fig. 1.5c). Le lien avec les coordonnées cartésiennes est

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad . \quad (1.51)$$

On définit également une base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ (voir Fig. 1.5c) :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad ; \quad (1.52)$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad ; \quad (1.53)$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \quad . \quad (1.54)$$

Dans cette base locale, on écrit simplement :

$$O\vec{M} = r \vec{e}_r \quad . \quad (1.55)$$

Les coordonnées sphériques s'emploient généralement dans le cas de symétries centrales par rapport au point O .

Il convient de préciser enfin que cette liste de systèmes de coordonnées, tant dans le plan que dans l'espace, n'est pas exhaustive. Les systèmes présentés ici sont juste (et de très loin !) les

plus utilisés, mais il peut être judicieux dans certains problèmes d'introduire d'autres systèmes souvent plus sophistiqués, basés sur d'autres symétries. Par exemple, les modèles dynamiques actuels de galaxies introduisent souvent un jeu de coordonnées dites *sphéroïdales* que nous ne décrirons pas ici. On peut dire pour simplifier qu'il s'agit d'un système intermédiaire entre les systèmes cylindriques et sphériques, compliqué à manipuler, mais bien adapté à la description d'un potentiel galactique. Tout dépend donc du problème à traiter.

1.4.3 Opérateur gradient

Le gradient est un *opérateur différentiel* dont nous aurons besoin dans notre cours⁷. Supposons donc une fonction *scalaire* f dépendant du point de l'espace au point considéré. Dans un système de coordonnées quelconque (par exemple des coordonnées cartésiennes (x, y, z)), la fonction f peut être vue comme une fonction de plusieurs variables réelles. Nous noterons $\vec{dr}$ le vecteur déplacement élémentaire en un point. En coordonnées cartésiennes, ce sera un vecteur différentiel de coordonnées (dx, dy, dz) . C'est encore la différentielle du vecteur $\vec{OM}$.

En un point de l'espace, le *gradient* de la fonction f sera l'unique vecteur, noté $\vec{\nabla}f$ ou $\vec{\text{grad}} f$, tel que

$$df = \vec{\nabla}f \cdot \vec{dr} \quad . \quad (1.56)$$

On peut expliciter ce vecteur dans les divers systèmes de coordonnées présentés plus haut. On obtient une collection de formules classiques d'analyse vectorielles. Nous nous bornerons à les donner ici sans les démontrer. Pour cela, nous vous renvoyons à un cours de mathématiques.

La formule la plus simple s'obtient en coordonnées cartésiennes. Nous avons

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad . \quad (1.57)$$

En coordonnées cylindriques, la formule équivalente est

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad . \quad (1.58)$$

En coordonnées sphériques, c'est un peu plus compliqué :

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad . \quad (1.59)$$

Précisons bien qu'il s'agit là de trois formules définissant le *même* vecteur !

1.5 Principes de base de l'analyse dimensionnelle

Une différence fondamentale entre le monde des mathématiques et celui de la physique est que ce dernier manipule des grandeurs correspondant à des réalités concrètes, et que toute combinaison de telles grandeurs doit pouvoir avoir un sens physique. Nous appellerons *dimension* d'une grandeur physique le type de réalité à laquelle elle se rapporte. Ainsi, si la variable l est choisie pour désigner une distance entre deux points, nous dirons que l est une *longueur*, ou encore que l a la *dimension* d'une longueur. Si l' est une autre longueur, alors la somme $l + l'$ aura un sens comme la somme de deux longueurs. Ce sera encore une longueur. Par contre, si la variable t désigne un laps de temps entre deux instants (on dira que t a la dimension d'un *temps*), la somme $l + t$ n'aura aucun sens physique, pour la raison simple qu'on n'additionne pas des longueurs et des temps. L'analyse dimensionnelle est une technique simple de vérification de la cohérence dimensionnelle des expressions physiques.

⁷Il en existe d'autres que verrez plus tard

1.5.1 Grandeurs mesurables et systèmes d'unités

La *mesure* d'une grandeur physique conduit à y associer, à partir d'une observation, un nombre obtenu par comparaison avec un étalon de référence choisi au préalable. Cette grandeur de référence sera appelée *unité*. Il y aura a priori une unité par type de grandeur, l'unité qu'on s'est fixée pour étalonner les durées ne pouvant servir à étalonner les longueurs. En fait, on montre qu'il suffit de se définir un petit nombre d'unités correspondant à des grandeurs mesurables dites *fondamentales* pour que toutes les unités correspondant à toutes les autres grandeurs s'en déduisent automatiquement.

Il suffit pour s'en convaincre de prendre un exemple. Prenons un sujet se déplaçant en ligne droite. Nous pouvons caractériser la distance parcourue par le sujet au moyen d'une unité de longueur, par exemple le mètre. Nous pouvons aussi caractériser le temps mis pour réaliser ce parcours au moyen d'une unité de temps, par exemple la seconde. Mettons que notre sujet ait parcouru 1000 mètres en 500 secondes. Sa vitesse moyenne le long du parcours sera de manière évidente de *2 mètres par seconde*. Ainsi nous caractérisons la vitesse au moyen d'une unité déduite des deux autres, et ainsi il n'y aura qu'à diviser la mesure de la distance parcourue dans notre unité de longueur par la mesure du temps écoulé dans notre unité de temps, pour obtenir une mesure de vitesse moyenne dans une unité appropriée.

Nous appellerons *système d'unités* un ensemble d'unités fondamentales à partir duquel toutes celles dont on a besoin seront définies. Pour les besoins de notre cours, il nous suffit de définir seulement *trois* unités fondamentales, une unité de *longueur*, une unité de *masse* et une unité de *temps*. En termes consacrés d'analyse dimensionnelle, on donne à ces dimensions les symboles L (Longueur), M (Masse), et T (Temps).

La communauté internationale a choisi d'officialiser un système d'unités dit *Système International* ou encore « MKS » (mètre – kilogramme – seconde), où l'on définit comme unités fondamentales :

- la *seconde* (unité de temps, symbole « s ») qui est par définition 9192631770 fois la période correspondant à une transition électronique particulière de l'atome de ^{133}Cs , utilisé dans les horloges atomiques à vapeur ;
- le *mètre* (unité de longueur, symbole « m »), défini comme étant la distance parcourue par la lumière dans le vide, pendant une durée de $1/299792458$ seconde. A l'origine, le mètre fut défini sous la révolution comme la quarante millionième partie du méridien terrestre, ce qui par la suite posa des problèmes de définition. C'est pourquoi cette référence a été abandonnée.
- le *kilogramme* (unité de masse, symbole « kg »), défini par un bloc de platine, considéré comme étalon, conservé au Bureau International des Poids et Mesures (à Sèvres, en France). Là encore, à l'origine, le kilogramme avait été fixé de manière à ce qu'un litre d'eau sur Terre pèse très exactement 1 kg. Mais comme chacun sait, tout liquide se dilate ou se contracte légèrement en fonction de la température, donc la définition originale posait un problème de précision.

Il convient de préciser que ces trois unités fondamentales ne sont pas les seules définies par le Système International, même si ce sont les seules dont nous aurons besoin. On définit en outre une unité pour l'intensité électrique (l'Ampère, « A »), une unité de température (le Kelvin, « K »), une unité de quantité de matière (la mole, « mol »), et une unité d'intensité lumineuse (la candela, « cd »). Le Système International officialise d'autres noms d'unités, mais celles-ci sont toutes des unités dérivées des unités fondamentales. Ainsi, l'unité officielle d'énergie est le *Joule* (« J ») ; mais on sait qu'une énergie est dimensionnellement la produit d'une masse par

le carré d'une vitesse⁸, de dimension ML^2T^{-2} . Et de fait, nous avons

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad .$$

Le Joule n'est donc qu'une combinaison des trois unités fondamentales.

Il existe d'autres systèmes d'unités fondamentales que le Système International. Il y a quelques dizaines d'années, on utilisait un système dit « CGS », où l'unité de longueur est le centimètre, l'unité de masse le gramme, et l'unité de temps la seconde. D'autres systèmes peuvent être introduits dans des problèmes plus spécifiques. En physique atomique et en physique des particules, les scientifiques utilisent souvent des systèmes d'unités où l'on s'arrange pour que les constantes fondamentales (vitesse de la lumière, constante de Planck, etc. . .) valent 1, ce qui a pour mérite à la fois de simplifier les calculs et de donner des nombres d'ordres de grandeurs similaires. Il va sans dire que lorsqu'on utilise un tel système d'unités, il convient de le préciser clairement, faute de quoi les erreurs numériques de relecture sont inévitables. Il y a déjà eu par le passé des erreurs retentissantes dues à ce type de problème, et même de la part de scientifiques chevronnés.

Supposons que vous ayez besoin de compter des mouvements des planètes dans le Système Solaire. Vous pouvez choisir de le faire en gardant le Système International, ou bien vous définir un système spécifique, où par exemple l'unité de temps sera l'année, l'unité de longueur la distance moyenne entre la Terre et le Soleil (appelée encore Unité Astronomique), et l'unité de masse $M_{\odot}/(4\pi^2)$, où $M_{\odot}$ est la masse du Soleil. Il est facile de voir par application de la troisième loi de Képler (voir chapitre 7) à l'orbite terrestre que dans ce système d'unités, la célèbre constante de la Gravitation Universelle G vaut très exactement 1. Outre le fait de simplifier les calculs, l'usage d'un tel système dans les applications informatiques permet de n'avoir à manipuler que des nombres dont les ordres de grandeurs tournent autour de l'unité, ce qui optimise la précision des calculs numériques. Ce ne serait bien sûr absolument pas le cas en restant en Système International.

Cependant, dans toutes les applications de ce cours, nous nous cantonnerons au Système International ou à quelques unités voisines dérivées d'usage usuel. Par ailleurs, il convient de rappeler que le système d'unités n'intervient qu'au passage à l'application numérique. Les expressions littérales sont en principes indépendantes du système utilisé.

Nous manipulerons donc toutes sortes de grandeurs ayant des dimensions variées. Il existera parmi elles une classe particulière de grandeurs, celles qui n'ont *pas de dimension*, c'est à dire qui sont des nombres purs : facteurs numériques devant une expression, comme le $1/2$ dans l'expression de l'énergie cinétique, ou rapports entre quantités de mêmes dimensions. Ainsi, un rapport entre deux longueurs sera un nombre sans dimension. Les grandeurs sans dimensions sont les seules dont la valeur numérique ne dépend pas du système d'unités. Ainsi, considérez le rapport entre la distance moyenne de la planète Jupiter au Soleil et la distance moyenne de la Terre au Soleil. Il s'agit clairement d'une quantité sans dimension, et quel que soit l'unité que vous utiliserez pour mesurer ces deux longueurs, vous trouverez toujours le même rapport, de l'ordre de 5.2.

Il existe enfin deux autres grandeurs mesurables qui ont fait l'objet d'une définition officielle, à savoir :

- les angles, mesurés en *radians* (« rad ») ;
- les angles solides (angles tri-dimensionnels), mesurés en *stéradians* (« sr »). Tout l'espace correspond à 4π sr.

On peut mesurer également les angles en degrés ($^{\circ}$), mais ce n'est qu'un usage. Lorsque qu'on parle de $\cos \theta$, θ est implicitement supposé exprimé en radians.

⁸Il suffit de considérer la célèbre formule $E = mc^2$.

Cependant, les angles sont mathématiquement définis par des rapports de longueurs, autrement dit des quantités sans dimensions. Et c'est bien cela qui fait toute la particularité des unités d'angles : du point de vue de l'analyse dimensionnelle, *un angle est une quantité sans dimension, un nombre pur*. Radian et stéradian ne sont donc que des pseudo-unités, décrivant des grandeurs en réalité sans dimensions.

1.5.2 Analyse dimensionnelle

La manipulation de grandeurs dimensionnées dans les expressions doit donc obéir à un certain nombre de règles de vraisemblance, que l'on peut résumer brièvement :

- On ne peut et ne doit comparer que des quantités de même dimension. En pratique, cela signifie que si dans un calcul, on obtient une expression du genre $A = B$ où A et B sont chacune des expressions dimensionnées, le plus souvent obtenues par combinaison d'autres variables, alors la dimension de A doit être la même que celle de B . On dira que l'équation $A = B$ est *homogène* dimensionnellement. Si A est une longueur (L), B ne peut pas être par exemple une vitesse (LT^{-1}). Cela n'aurait pas de sens.
- Similairement, on ne peut additionner ou soustraire que des quantités de même dimension. S'il est question de $A + B$ ou de $A - B$, alors A et B doivent être de même dimension. Cependant, comme seule exception à ces deux premières règles, le *zéro* sera compatible avec toutes les dimensions. Ainsi, si on a $A - B = 0$, on ne se préoccupera pas de l'homogénéité du zéro par rapport aux autres variables ⁹ !
- La multiplication de quantité dimensionnées entre elles est autorisée. On obtient des grandeurs de dimensions combinées. Ainsi, en divisant une longueur par un temps, on obtient toujours une vitesse. De même, on peut élever à n'importe quelle puissance, *même fractionnaire*, des grandeurs dimensionnées. Par exemple, prendre la racine carrée d'une quantité dimensionnée est autorisée : en prenant la racine carrée d'une surface (L^2), on obtient une longueur.
- A l'inverse, les arguments des autres fonctions mathématiques telles que $\sin, \cos, \tan, \exp, \ln, \log, \dots$, doivent être des nombres sans dimension, par exemple des rapports de quantités dimensionnées. Le résultat de ces fonctions est aussi un nombre sans dimension. On peut faire une remarque particulière à propos de la fonction logarithme. On peut arriver à une expression du type $\ln(r/r_0)$, où r et r_0 sont par exemple des longueurs. Mathématiquement parlant, cette quantité peut aussi s'écrire $\ln r - \ln r_0$, mais du point de vue de l'analyse dimensionnelle, la première écriture est de loin préférable.
- La dérivation a un effet sur la dimension des variables. D'après la définition, on voit bien que si on dérive une quantité A par rapport à une variable B , la quantité obtenue dA/dB aura la dimension de A divisée par celle de B . En d'autres termes, en dérivant par rapport à une variable, on divise la dimension par la dimension de cette variable. Si on dérive plusieurs fois, on divise autant de fois par la dimension de la variable. C'est ainsi qu'une vitesse instantanée, obtenu par dérivation par rapport au temps d'une longueur (voir chapitre suivant), aura la dimension d'une longueur divisée par un temps (LT^{-1}); une accélération, obtenue par dérivée seconde d'une longueur par rapport au temps, aura la dimension d'une longueur divisée par le carré d'un temps (LT^{-2}).

Lorsqu'on conduit ses calculs, la simple opération consistant à vérifier l'homogénéité de tous les termes que l'on additionne ou compare, ou plus généralement que les règles ci-dessus sont vérifiées, peut se révéler un outil très puissant de chasse aux erreurs de calcul. Il suffit pour cela de prendre un exemple. La période d'oscillation d'un pendule pesant, simple, dans la limite des

⁹mais de celle de A par rapport à B , oui...

petites oscillations, vaut

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad , \quad (1.60)$$

où l est la longueur de fil du pendule et g l'accélération de la pesanteur. Cette formule est-elle juste? On peut bien sûr refaire la théorie, mais ce n'est pas le but ici. Nous pouvons aisément vérifier si le membre de droite de cette équation est bien homogène à un temps, comme on s'y attend. l est une longueur, de dimension L ; g est une accélération, de dimension LT^{-2} ; l/g aura pour dimension $L/(LT^{-2}) = T^2$, donc la racine carrée de cette quantité est bien un temps. Si par exemple en se trompant dans les calculs, on avait abouti à une formule erronée comme $T = 2\pi\sqrt{gl}$, l'analyse dimensionnelle nous montrerait que T obtenu par cette formule serait homogène à une vitesse, ce qui est impossible ici. On se serait donc immédiatement aperçu de l'erreur de calcul.

L'analyse dimensionnelle est donc un outil très efficace de vérification des résultats obtenus. Elle peut même dans certains cas aider à deviner la forme d'un résultat. C'est le cas du pendule pesant. En effet, les seuls paramètres du problème sont l et g . On peut se rendre compte assez facilement que la seule façon de former un temps à partir de ces deux paramètres est de prendre quelque chose de proportionnel à $\sqrt{l/g}$. Cependant, les cas de ce type sont rares. Dans des problèmes plus compliqués avec un nombre plus grand de paramètres, il y a souvent plusieurs façons de former une quantité ayant une dimension voulue. Dès lors, l'analyse dimensionnelle ne fournit pas la forme de la solution.

Même dans notre cas simple du pendule pesant, il est un point que l'analyse dimensionnelle ne donne pas, à savoir le facteur 2π dans l'expression de la période. C'est un fait général. L'analyse dimensionnelle ne donnera jamais le moindre renseignement sur les facteurs numériques, ou autres quantités sans dimension intervenant dans une expression. Similairement, les erreurs relatives aux facteurs sans dimension ne peuvent pas être vues par l'analyse dimensionnelle. Ainsi, si nous avions trouvé par erreur $T = 4\pi\sqrt{l/g}$ dans le cas du pendule pesant, l'analyse dimensionnelle ne nous permettrait pas de voir notre erreur. Cette technique a donc ses limites dont il faut être conscient. Cependant, prendre l'habitude de vérifier systématiquement au moindre doute l'homogénéité dimensionnelle des résultats qu'on obtient permet d'éviter bien des erreurs. Ce n'est donc jamais du temps de perdu.

Chapitre 2

Cinématique

2.1 Généralités. Vecteur position

La cinématique a pour but la description des mouvements, sans se préoccuper de leurs causes. La dynamique, que nous aborderons au chapitre suivant, s'occupe de déduire le mouvement d'un corps à partir des forces qui agissent sur lui. En cinématique, on prend le mouvement comme une donnée, et on cherche à le décrire au mieux.

La description des mouvements se fait au moyen d'un certain formalisme mathématique. Dans la pratique, cela revient essentiellement à introduire un petit nombre de vecteurs dont la description en fonction du temps suffit à entièrement caractériser notre mouvement.

Il est essentiel de rappeler qu'un mouvement donné est toujours relatif à un certain *référentiel*. Il est donc fondamental, surtout lorsqu'il y a ambiguïté, de préciser le référentiel par rapport auquel nous décrirons un mouvement, ainsi que le repère dans lequel nous le comptabiliserons.

Un point matériel se déplaçant dans un référentiel donné sera caractérisé par un point $M(t)$ donnant la position du point en fonction du temps t . La *trajectoire* sera par définition le lieu géométrique des positions occupées par le mobile au cours du temps, ou encore l'ensemble des points $M(t)$ pour toutes les valeurs possibles de t . La plupart du temps, ce sera une courbe, dans un plan ou dans l'espace suivant les cas ; il se peut aussi que la « courbe » remplisse toute une portion d'espace.

Si on se donne un repère d'origine O , nous appellerons *vecteur position* le vecteur $\vec{OM}$, où $M(t)$ répond à la définition ci-dessus. La donnée de la fonction $\vec{OM}(t)$ suffit à caractériser le mouvement du point matériel. On note parfois $\vec{r}(t)$.

2.2 Vitesse

2.2.1 Notion intuitive de vitesse moyenne

Dans le langage quotidien, on utilise le mot vitesse pour évoquer la distance parcourue pendant un certain temps, entre deux positions connues d'un mobile. Supposons pour simplifier dans un premier temps que notre mobile se déplace sur une droite (Fig. 2.1). Les positions du mobile seront repérées par une abscisse $x(t)$ par rapport à une origine O . Nous appellerons *vitesse moyenne* entre les instants t_1 et t_2 , la quantité

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad , \quad (2.1)$$

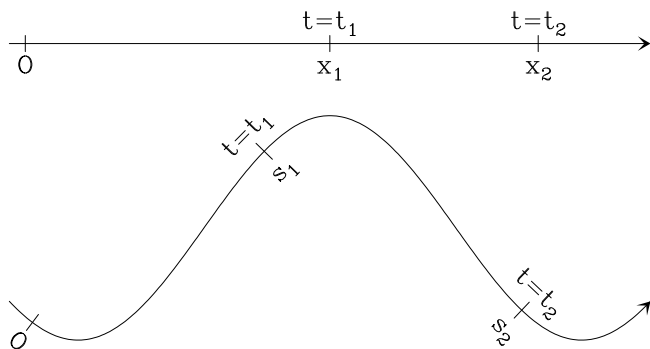


FIG. 2.1: Trajectoire rectiligne ou curviligne. Vitesse moyenne entre deux positions

x_1 et x_2 désignant la position du mobile à t_1 et t_2 . Dimensionnellement, une vitesse est donc une longueur divisée par un temps, de dimension $L T^{-1}$.

Cette notion n'est en fait pas restreinte aux seules trajectoires rectilignes. Le long d'une courbe, il suffit de repérer les positions successives du mobile par une *abscisse curviligne* $s(t)$ (Fig. 2.1), décrivant la « longueur de courbe » ainsi parcourue. Nous écrirons donc plus généralement

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} . \quad (2.2)$$

La vitesse moyenne ainsi définie est toujours positive. C'est la vitesse qu'on obtient lors d'un déplacement en voiture en divisant le kilométrage parcouru au compteur par le temps qu'on a mis à faire le trajet. C'est une notion utile dans la vie courante mais peu précise en physique.

2.2.2 Vitesse instantanée. Vecteur vitesse

Intuitivement, la vitesse instantanée en un temps t sera la limite de la vitesse moyenne entre t et t' , pour t' proche de t . Nous écrirons donc

$$v(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} = \frac{ds}{dt}(t) . \quad (2.3)$$

Cette vitesse est celle qui s'affiche sur le tableau de bord d'une voiture en roulant. C'est une quantité scalaire, positive. Elle renseigne sur la vitesse de déplacement, mais pas sur la direction du déplacement. C'est la raison pour laquelle on introduit la notion de *vecteur vitesse*. Désignons par $\vec{T}$ un vecteur unitaire, tangent à la trajectoire au point considéré, et dans le sens du mouvement (nous réintroduirons ce vecteur plus loin). Nous *définirons* le vecteur vitesse par

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T} . \quad (2.4)$$

Ainsi défini, la norme du vecteur vitesse donne la vitesse instantanée, et sa direction est celle du mouvement à l'instant t . On peut donner une autre expression, plus pratique, du vecteur vitesse. Supposons notre référentiel rapporté à un repère d'origine O . Considérons les positions du mobile $M(t)$ à l'instant t et $M(t')$ à l'instant t' légèrement après. On a clairement

$$\frac{O\vec{M}(t') - O\vec{M}(t)}{t' - t} = \frac{M(t)\vec{M}(t')}{t' - t} . \quad (2.5)$$

Si t et t' sont suffisamment proches, nous pouvons considérer la portion de trajectoire entre t et t' comme rectiligne, et nous aurons

$$M(t)\vec{M}(t') \simeq (s(t') - s(t)) \vec{T} , \quad (2.6)$$

soit

$$\frac{\vec{OM}(t') - \vec{OM}(t)}{t' - t} \simeq \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} \vec{T} \quad . \quad (2.7)$$

En faisant tendre t' vers t , nous aurons donc rigoureusement

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t)} \quad . \quad (2.8)$$

Cette relation peut en fait constituer une définition du vecteur vitesse, qui apparaît donc comme la dérivée (vectorielle) du vecteur position par rapport au temps.

Le vecteur vitesse est par définition tangent à la trajectoire en tout point. Il *dépend du référentiel*. En toute rigueur, nous devrions écrire $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ pour préciser qu'il s'agit ici de la vitesse du point M dans un certain référentiel $\mathcal{R}$. Nous ne l'avons pas écrit ici afin de ne pas alourdir la notation, et parce qu'il n'y a aucune équivoque possible. Il conviendra cependant de repréciser la notation dès que ce sera nécessaire, en particulier lors de changements de référentiels.

2.3 Accélération

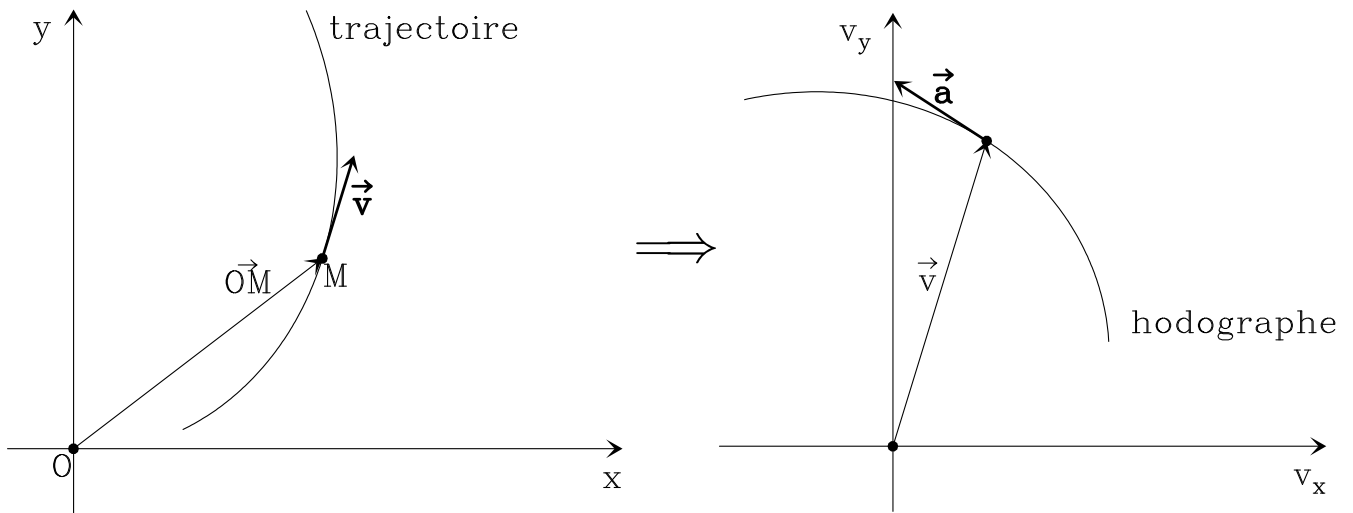


FIG. 2.2: Trajectoire et hodographe : illustration

Le vecteur vitesse peut être amené à changer au cours du temps. Les variations de ce vecteur seront décrites au moyen du *vecteur accélération* $\vec{a}(t)$, que nous *définirons* par

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}(t)} \quad . \quad (2.9)$$

Là encore, il s'agit d'une quantité qui dépend du référentiel d'étude. Dimensionnellement, une accélération est donc une vitesse divisée par un temps. Sa dimension est $L T^{-2}$.

Nous n'avons pas cherché ici à déduire un vecteur accélération à partir de la notion intuitive d'accélération, car la chose est moins aisée qu'avec le vecteur vitesse. Remarquons bien ici que l'accélération telle que nous l'avons définie décrit les variations du *vecteur* vitesse, et non uniquement de sa norme, la vitesse instantanée. Ainsi, le vecteur accélération sera non nul lorsque la vitesse instantanée augmentera (notion usuelle d'accélération), ou lorsqu'elle diminuera (notion usuelle de décélération); mais il sera également non nul si le vecteur vitesse change de

direction *sans pour autant que la vitesse instantanée change*, autrement dit si le mobile effectue un virage. En fait le vecteur accélération est non nul dès qu'on ne se déplace plus en ligne droite à vitesse constante.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, mais pas le vecteur accélération. Le vecteur accélération est tangent à une autre courbe appelée *hodographe*. De même que la trajectoire est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur position, l'hodographe est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse au cours du temps, une fois rapporté à une origine arbitraire (Fig. 2.2). l'hodographe a surtout une utilité expérimentale, lorsqu'on cherche à caractériser un mouvement.

2.4 Expression des vecteurs vitesse et accélération dans les divers systèmes de coordonnées

Nous allons maintenant expliciter l'expression des vecteurs vitesse et accélération dans les divers systèmes de coordonnées introduits au chapitre précédent.

2.4.1 Coordonnées dans le plan

Coordonnées cartésiennes

Dans ce système, Le point M est repéré par ses coordonnées $(x(t), y(t))$. On a en dérivant

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}} . \quad (2.10)$$

De même en redérivant, on obtient

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{cases}} . \quad (2.11)$$

Coordonnées polaires

En coordonnées polaires, notre mobile est repéré par $(\rho(t), \theta(t))$. Nous avons a priori $\vec{v} = v_r \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta$. Il vient

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta , \end{aligned} \quad (2.12)$$

où on a utilisé la relation (1.47). On peut donc écrire

$$\boxed{\begin{cases} v_r = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho \dot{\theta} \end{cases}} . \quad (2.13)$$

Pour l'accélération, on redérive

$$\begin{aligned}
 \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\
 &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
 &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta, \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

en réutilisant (1.47) et (1.48). En définitive, il vient

$$\boxed{\begin{cases} a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \end{cases}}. \tag{2.15}$$

On donne traditionnellement à v_r et a_r le nom de vitesse et d'accélération *radiales* et à v_θ et a_θ le nom de vitesse et accélération *orthoradiales*.

2.4.2 Coordonnées dans l'espace

Pour les systèmes de coordonnées dans l'espace, nous ne détaillerons pas les calculs permettant d'obtenir les expressions, le procédé étant le même que précédemment.

Coordonnées cartésiennes

C'est ici aussi simple qu'en deux dimensions. Les coordonnées du point M sont (x, y, z) . On a

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}}; \tag{2.16}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}}. \tag{2.17}$$

Coordonnées cylindriques

Les calculs sont les mêmes qu'en polaire bidimensionnel, avec la coordonnée z en plus. Il vient

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_\rho + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} v_r = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}}; \tag{2.18}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_\rho + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}}. \tag{2.19}$$

Coordonnées sphériques

Les calculs sont ici un peu plus subtils, dans la mesure où les vecteurs de la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ dépendent à la fois de θ et de ϕ . On tire

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi, \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta. \quad (2.20)$$

De cela, partant de $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, on dérive

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\phi = r\dot{\phi} \sin \theta \end{cases} ; \quad (2.21)$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\phi \vec{e}_\phi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.3 Représentation de Frenet

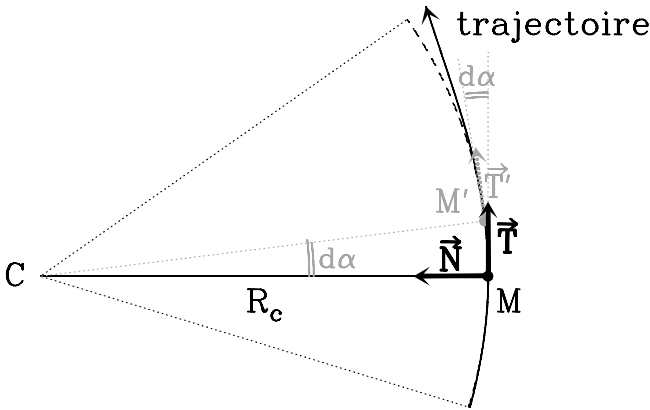


FIG. 2.3: Représentation de Frenet : vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$, cercle osculateur et rayon de courbure

Le système de représentation de Frenet peut être perçu comme un système de coordonnées attaché au mouvement d'un mobile dont l'origine coïncide à chaque instant avec le point $M(t)$. On suppose donnée la trajectoire du mobile, chaque point $M(t)$ étant repéré par son abscisse curviligne $s(t)$. Nous définissons ensuite le couple de vecteurs unitaires $(\vec{T}, \vec{N})$ (voir Fig. 2.3). Nous avons déjà introduit le vecteur $\vec{T}$ auparavant. C'est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement. Clairement, nous avons

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad (2.23)$$

ou encore

$$\vec{v} = v \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad (2.24)$$

si nous désignons par v la norme de $\vec{v}$ (au lieu de $||\vec{v}||$). $\vec{N}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{T}$ et dirigé dans le sens de la concavité de la trajectoire (Fig. 2.3). Lorsque le mouvement est plan, ceci suffit à définir complètement $\vec{N}$.

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc liée à la vitesse par sa différentielle $ds = v(t) dt$. La différentielle ds porte traditionnellement le nom d'*élément de longueur*. Son intégration (qui n'est pas toujours faisable analytiquement) fournit l'abscisse curviligne lorsque la vitesse est connue. Ainsi, entre deux positions correspondant aux temps de passage t_1 et t_2 , nous aurons

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (2.25)$$

Considérons maintenant la dérivée de $\vec{T}$, par rapport au temps comme par rapport à l'abscisse curviligne s . $\vec{T}$ étant unitaire, sa dérivée est un vecteur perpendiculaire. Dans le cas où la trajectoire est plane, ce vecteur est forcément colinéaire à $\vec{N}$. Nous écrirons donc

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R_c} \vec{N} \quad , \quad (2.26)$$

où nous introduisons la quantité R_c , appelée *rayon de courbure*. On peut voir intuitivement que R_c est une quantité positive, la dérivée de $\vec{T}$ pointant clairement dans le sens de la concavité de la courbe, donc dans le même sens que $\vec{N}$. Cette relation définit le rayon de courbure. Dans le cas où la trajectoire n'est pas plane, on pose cette relation comme vraie est c'est ainsi qu'on définit dans ce cas le vecteur $\vec{N}$; on complète alors la base ainsi introduite par le vecteur $\vec{T} \wedge \vec{N}$.

Il est facile de voir que dimensionnellement, R_c est homogène à une longueur. Géométriquement, R_c est le rayon du cercle dit *osculateur* (voir Fig. 2.3), c'est-à-dire qui colle « au mieux » à la trajectoire au point $M(t)$ ¹. Si le long de ce cercle, on tourne d'un petit angle $d\alpha$, l'abscisse curviligne avance de $ds = R_c d\alpha$, et le vecteur $\vec{T}$ tourne également de $d\alpha$ dans le sens de $\vec{N}$ (Fig. 2.3). On a donc bien $d\vec{T} = d\alpha \vec{N} = (ds/R_c) \vec{N}$, ce qui revient à la définition de R_c .

Exprimons maintenant dans ce système le vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{T} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} ; \\ \Rightarrow \quad \vec{a} &= \frac{dv}{dt} \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{\vec{N}}{R_c} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Il vient donc en définitive

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \vec{T}}_{\text{accélération tangentielle}} + \underbrace{\frac{v^2}{R_c} \vec{N}}_{\text{accélération normale}}} . \quad (2.28)$$

Le vecteur accélération se décompose donc ainsi dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$. Les deux composantes apparaissant dans l'équation (2.28) ont chacun une interprétation physique différente.

La composante le long de $\vec{T}$ porte le nom d'*accélération tangentielle*. Elle est liée à la variation de la *norme* du vecteur vitesse. C'est elle qui traduit l'idée intuitive d'accélération ou de décélération, suivant le signe de dv/dt . La composante le long de $\vec{N}$ est appelée *accélération normale*, et traduit quant à elle les changements de *direction* du vecteur vitesse. Elle est donc liée à la courbure de la trajectoire et existe même si la norme de la vitesse est constante. L'accélération normale est toujours positive, donc dirigée vers la concavité de la courbe, ou encore vers le centre du cercle de courbure. C'est pourquoi on parle également d'*accélération centripète*.

La relation (2.28) est vraie que le mouvement soit plan ou non. Si nous avons affaire à un mouvement dans l'espace, nous voyons que le vecteur accélération reste dans le plan vectoriel formé par $\vec{T}$ et $\vec{N}$ (il n'y a pas de composante le long de $\vec{T} \wedge \vec{N}$), tout comme d'ailleurs le vecteur vitesse qui reste colinéaire à $\vec{T}$. Le plan formé par $(\vec{T}, \vec{N})$ qui passe par $M(t)$, et qui donc contient à chaque instant les vecteurs vitesse et accélération, est appelé *plan osculateur* au mouvement au point $M(t)$. Si la trajectoire est plane, ce plan est fixe et se confond avec le plan d'étude du mouvement. A l'inverse, dans le cas d'un mouvement tridimensionnel, ce plan est susceptible de changer à chaque instant. Ses variations sont liées à la notion de *torsion* de la trajectoire, caractéristique des courbes dans l'espace.

¹Cette notion de cercle osculateur peut être définie très précisément

2.5 Exemples de mouvements classiques

Nous allons maintenant appliquer la formalisme introduit plus haut à la description de quelques mouvements simples très classiques. Tous ces mouvements sont plans.

2.5.1 Le mouvement rectiligne uniforme

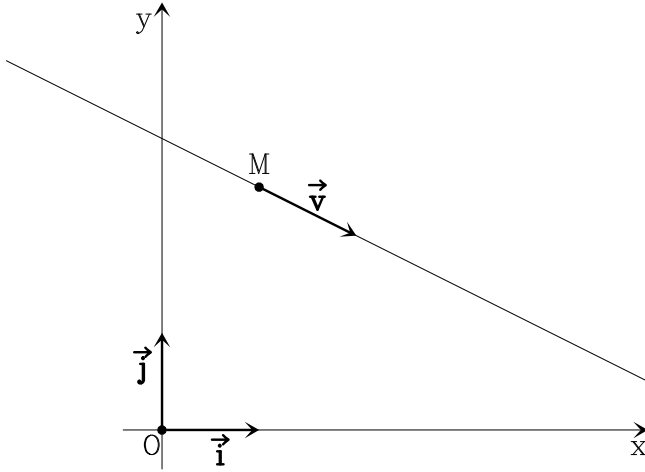


FIG. 2.4: Mouvement rectiligne uniforme : Trajectoire, vitesse

Ce mouvement, peut-être le plus simple de tous, est caractérisé par un vecteur vitesse constant dans le temps, ou encore, de manière équivalente, par un vecteur accélération constamment nul. Si nous rapportons notre plan d'étude à un système de coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse aura donc pour composantes (constantes) (v_x, v_y) , et nous aurons donc

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = v_y t + y_0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

(x_0, y_0) représentant la position à $t = 0$. L'équation cartésienne de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre $x(t)$ et $y(t)$. On obtient

$$xv_y - yv_x = x_0v_y - y_0v_x, \quad (2.30)$$

ce qui montre bien comme on s'y attendait que la trajectoire est une droite, comme illustré sur la figure 2.4. L'hodographe est quant à lui réduit à un seul point, le vecteur vitesse étant constant.

La norme de la vitesse est également constante et vaut $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. On en tire l'élément de longueur et par intégration l'abscisse curviligne :

$$ds = v dt = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt \implies s(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} t + s_0, \quad (2.31)$$

s_0 étant une constante d'intégration qu'on peut fixer à zéro, ce qui revient à fixer l'origine des abscisses curvilignes au point correspondant à $t = 0$. A partir de l'expression de v , on tire les composantes des vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} \implies \vec{T} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \vec{i} + \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \vec{j} \implies \vec{N} = -\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \vec{i} + \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \vec{j}. \quad (2.32)$$

Ces vecteurs sont constants. On a donc $d\vec{T}/dt = \vec{0}$ ce qui montre que le rayon de courbure est infini (ou encore, la courbure est nulle). C'est bien entendu normal, la trajectoire étant une droite.

Nous avons choisi de traiter ce mouvement en coordonnées cartésiennes. Si nous avions choisi des coordonnées polaires, en écrivant que l'accélération est nulle à partir des formules (2.15) nous aurions eu à résoudre le système

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0 \end{cases}. \quad (2.33)$$

La résolution de ce système doit nous donner $\rho(t)$ et $\theta(t)$. On le voit, la tâche est ici nettement moins aisée qu'en coordonnées cartésiennes (mais néanmoins faisable), et ce pour la description du *même mouvement*.

Ce que nous montre cet exemple, c'est que le choix du bon système de coordonnées peut se révéler capital pour arriver à traiter un problème. Dans le cas présent, le choix des coordonnées cartésiennes est un bon choix, celui des coordonnées polaires un choix très maladroit. En général, le choix du bon système de coordonnées, c'est à dire celui qui conduira aux expressions les plus simples, doit être guidé par le respect des *symétries* naturelles du problème. Le mouvement rectiligne uniforme n'ayant aucune symétrie de révolution autour du point O (ni d'aucun autre point), le choix des coordonnées polaires ne pouvait être que mal adapté.

2.5.2 Le mouvement uniformément accéléré

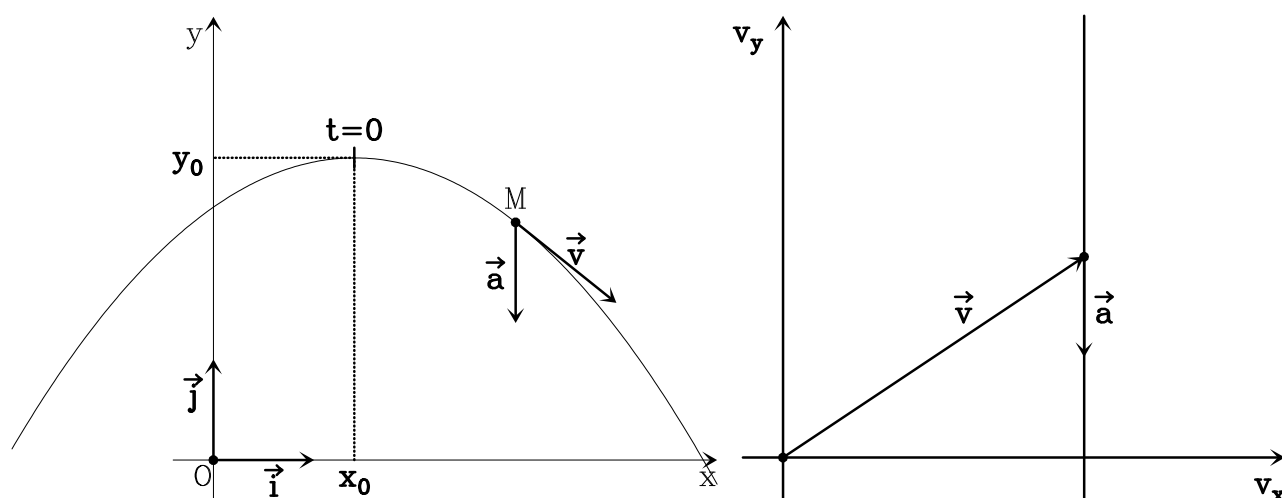


FIG. 2.5: Le mouvement uniformément accéléré : trajectoire (à gauche) et hodographe (à droite)

Le mouvement uniformément accéléré (ou encore uniformément varié) est caractérisé par un vecteur accélération constant. C'est un mouvement plan, le plan du mouvement étant défini par la position initiale, le vecteur vitesse initial, et le vecteur accélération. Nous nous placerons dans le plan du mouvement, rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous raisonnerons en coordonnées cartésiennes.

Dans le but d'alléger les calculs, nous supposerons que le vecteur accélération $\vec{a}$ est vertical, colinéaire au vecteur $\vec{j}$. Par analogie avec le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre (qui est l'exemple même de ce type de mouvement) nous supposerons $\vec{a}$ dirigé vers le bas, c'est-à-dire $\vec{a} = -a\vec{j}$ avec $a > 0$ (Fig. 2.5).

Il faut bien comprendre qu'en fixant ainsi arbitrairement la direction du vecteur constant $\vec{a}$, nous ne restreignons en rien la généralité de l'étude du mouvement uniformément accéléré. En effet, dans le cas général où le vecteur $\vec{a}$ ne serait pas dirigé le long de $\vec{j}$, rien ne nous interdit de changer de repère dans notre plan d'étude, et de nous définir une nouvelle base orthonormée $(\vec{i}', \vec{j}')$, tournée d'un certain angle par rapport à la première, et dans laquelle $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{j}'$. Il n'y a plus ensuite qu'à comptabiliser le mouvement par rapport à cette nouvelle base.

Ce petit tour de passe-passe destiné à simplifier les calculs est un simple exemple d'un fait général : un mouvement est indépendant du repère et du système de coordonnées dans lequel on choisit de le comptabiliser. Dans l'étude d'un mouvement donné, il convient de toujours

²qui, rappelons-le, est une donnée fixe de ce mouvement...

choisir le repère et le système de coordonnées les mieux adaptés à notre étude. Ce choix se fait bien entendu en respectant les symétries naturelles du problème.

Dans notre cas, choisir le repère de manière à ce que le vecteur accélération, qui est la donnée principale de ce problème, soit colinéaire à un des vecteurs de base ($\vec{i}$ ou $\vec{j}$, peu importe) permet de simplifier considérablement les calculs. Nous aurions pu procéder de même plus haut dans l'étude du mouvement rectiligne uniforme, en choisissant par exemple le vecteur vitesse (constant) colinéaire à $\vec{i}$ ou à $\vec{j}$. Dans ce cas, une des deux constantes v_x ou v_y disparaissait et on peut voir aisément que les expressions sont nettement plus simples (plus de racines carrées). Nous ne l'avons pas fait car dans ce cas, même dans le cas général, les calculs étaient simples. Dans le cas du mouvement uniformément accéléré, c'est nécessaire.

Revenons à l'étude de notre mouvement. Le vecteur accélération est dirigé vers le bas, en coordonnées cartésiennes, nous aurons

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -a \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = -at + v_y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_y t + y_0 \end{cases}, \quad (2.34)$$

(v_x, v_y) , (x_0, y_0) étant des constantes d'intégration représentant respectivement les vecteurs vitesse et position à $t = 0$. A ce niveau, nous allons encore simplifier les calculs en *fixant l'origine des temps*. Nous sommes en effet libres de fixer l'instant correspondant à $t = 0$ sans pour autant restreindre la généralité de l'étude. Nous fixerons l'origine des temps à l'instant où la vitesse selon y ($\dot{y}$) s'annule. Ceci revient en fait à choisir nulle la constante v_y , ce que nous supposons donc désormais. Une fois ceci fixé, l'équation cartésienne de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre $x(t)$ et $y(t)$. Il vient

$$y = -\frac{1}{2}a \frac{(x - x_0)^2}{v_x^2} + y_0, \quad (2.35)$$

ce qui est l'équation cartésienne d'une *parabole* de sommet (x_0, y_0) dont la concavité est dirigée vers le bas. Notre choix d'origine des temps revient en fait à fixer $t = 0$ au moment où le mobile passe par le sommet de la parabole (Fig. 2.5).

L'hodographe se déduit des expressions de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en fonction du temps. C'est une droite verticale parcourue dans le sens du vecteur accélération (Fig. 2.5). La norme de la vitesse vaut $v = \sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}$. On en déduit l'élément de longueur ds :

$$ds = \sqrt{v_x^2 + a^2 t^2} dt. \quad (2.36)$$

L'intégration de cette expression pour obtenir $s(t)$ est plus délicate. On trouve en définitive

$$s(t) = \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{a} \ln \left(\frac{at + \sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}}{|v_x|} \right) + \frac{1}{2} t \sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}, \quad (2.37)$$

où l'on a choisi la constante d'intégration de manière à ce que $s(0) = 0$. Comme précédemment, on tire le vecteur $\vec{T}$:

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} \vec{i} - \frac{at}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} \vec{j} \implies \vec{N} = \varepsilon \frac{at}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} \vec{i} + \varepsilon \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} \vec{j}, \quad (2.38)$$

la quantité ε valant 1 ou -1 . Les composantes de $\vec{N}$ s'obtiennent à partir de celles de $\vec{T}$, au sens près (ε), en disant que $\vec{N}$ est de norme 1 et vérifie $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$. Donc si $\vec{T}$ a pour

composantes (T_x, T_y) , $\vec{N}$ a forcément pour composantes $(-T_y, T_x)$ ou $(T_y, -T_x)$. Le sens est fixé par la concavité de la courbe. Ici, elle est dirigée vers le bas, ce qui nous montre que la composante selon $\vec{j}$ de $\vec{N}$ doit toujours être négative. Donc si $v_x > 0$, $\epsilon = -1$ et inversement si $v_x < 0$, $\epsilon = +1$. L'accélération normale s'obtient en calculant le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{N}$, soit

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = -\frac{\epsilon a v_x}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} = \frac{a|v_x|}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} \quad , \quad (2.39)$$

compte tenu de la prescription sur la valeur de ϵ . On tire ensuite le rayon de courbure de $a_N = v^2/R_c$. Il vient

$$R_c = \frac{(v_x^2 + a^2 t^2)^{3/2}}{a|v_x|} \quad . \quad (2.40)$$

Ceci constitue une méthode de calcul du rayon de courbure : calcul de $\vec{N}$ à partir de $\vec{T}$, puis obtention de l'accélération normale par produit scalaire. On peut aussi calculer l'accélération tangentielle $a_T = dv/dt$, puis obtenir l'accélération normale en prenant la norme de $(\vec{a} - a_T \vec{T})$. On peut enfin dériver $\vec{T}$ par rapport au temps, puis tirer $d\vec{T}/ds$ par $d\vec{T}/dt = (d\vec{T}/ds)(ds/dt) = v(d\vec{T}/ds)$. En prenant la norme, on a $1/R_c$.

Les trois méthodes conduisent au même résultat. La meilleure à employer dépend du contexte. Il faut savoir que le calcul du rayon de courbure donne souvent lieu à des calculs un peu lourds. Dans notre cas, nous trouvons que R_c est minimal (et donc la courbure est maximale) lorsque $t = 0$, c'est-à-dire au sommet de la parabole. Ceci correspond bien à l'intuition. Enfin, si nous calculons l'accélération tangentielle, nous trouvons

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 t}{\sqrt{v_x^2 + a^2 t^2}} \quad . \quad (2.41)$$

On vérifie facilement que la somme $a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$ redonne bien le vecteur constant $-a \vec{j}$. Le vecteur accélération est donc bien constant, mais cette accélération se répartit différemment au cours du temps entre accélération normale et accélération tangentielle.

Mentionnons enfin un dernier cas particulier, celui où la vitesse (constante) selon $\vec{i}$ est nulle, soit $v_x = 0$. Dans ce cas le mouvement est rectiligne. On parle de mouvement rectiligne uniformément accéléré. C'est par exemple le mouvement d'un objet lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. L'abscisse curviligne prend alors la forme très simple $s(t) = (1/2)|a|t^2$.

2.5.3 Le mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement dont la trajectoire est un cercle parcouru à vitesse constante, ou plus exactement avec une vitesse de norme constante³. Il est à peu près évident que pour l'étude de ce mouvement plan, nous placerons l'origine O de notre repère cartésien au centre du cercle, et raisonnerons en coordonnées polaires. Dans ces conditions, le mouvement est décrit par $\rho(t)$ et $\theta(t)$.

Dans la mesure où le mouvement est confiné un à cercle centré sur l'origine, nous aurons

$$\rho(t) = R = \text{cte} \quad , \quad (2.42)$$

³Le vecteur vitesse, lui, n'est pas constant du fait de la trajectoire non rectiligne.

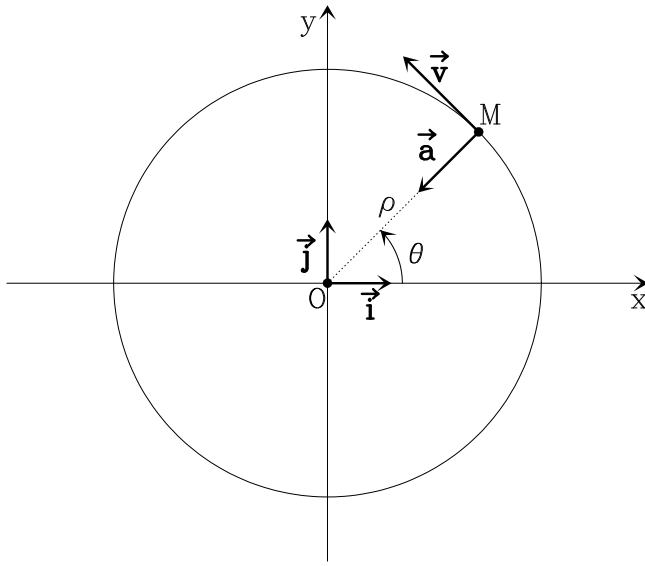
où R est le rayon du cercle. A partir de là, quelle que soit la fonction $\theta(t)$, la norme de la vitesse vaudra d'après les formules (2.13) :

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\theta}^2} = R|\dot{\theta}| \quad . \quad (2.43)$$

v étant constant par hypothèse, $\dot{\theta}$ est constant, et porte le nom de *vitesse angulaire*. Nous écrirons

$$\dot{\theta} = \text{cte} = \omega \quad \implies \quad \theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad , \quad (2.44)$$

où θ_0 représente l'angle polaire à $t = 0$, que l'on peut choisir nul quitte à fixer convenablement l'origine des temps.



A partir des formules (2.13) et (2.15), on tire les composantes de la vitesse et de l'accélération dans la base locale :

$$\begin{cases} v_r = \dot{\rho} = 0 \\ v_\theta = \rho\dot{\theta} = R\omega \end{cases} \quad (2.45)$$

et

$$\begin{cases} a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -R\omega^2 \\ a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Ainsi, la vitesse apparaît-elle uniquement orthoradiale, tandis que l'accélération est purement radiale, centripète (Fig. 2.6).

L'élément de longueur ds s'intègre immédiatement

FIG. 2.6: Mouvement circulaire uniforme : Trajectoire, vitesse, accélération

$$ds = v dt = R|\omega| dt \implies s(t) = R|\omega|t \quad , \quad (2.47)$$

en fixant $s(0) = 0$. Au bout d'un tour

($|\omega t| = |\theta| = 2\pi$), nous avons $s = 2\pi R$, ce qui est bien la circonférence de notre cercle...

La vitesse étant purement orthoradiale, le vecteur $\vec{T}$ est égal soit à $\vec{e}_\theta$ soit à $-\vec{e}_\theta$, suivant le signe de ω . Le vecteur $\vec{N}$ est, lui, toujours égal à $-\vec{e}_\rho$. La norme de la vitesse étant constante, l'accélération tangentielle est nulle, par conséquent l'accélération n'est que normale (et colinéaire à $\vec{N}$) :

$$a_N = \frac{v^2}{R_c} = R\omega^2 \quad \implies \quad R_c = R \quad , \quad (2.48)$$

en s'aidant de $v = R|\omega|$. Le rayon de courbure de la trajectoire est constant et n'est autre que le rayon du cercle, ce à quoi ou pouvait bien évidemment s'attendre !

2.6 Changements de référentiel

Nous l'avons déjà évoqué plus haut, mais n'hésitons pas à le rappeler ici : tout mouvement dépend du référentiel par rapport auquel on le comptabilise. C'est en particulier le cas des vecteurs importants de la cinématique, vecteurs position, vitesse, accélération.

On se trouve souvent dans une situation où l'on dispose pour décrire un mouvement donné de *deux* référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Par exemple, un mouvement se déroulant à l'intérieur d'un wagon lui-même en mouvement peut être décrit dans le référentiel

du wagon ou bien du sol. Si nous savons décrire le mouvement dans un des deux référentiels, il est utile de disposer d'un formalisme permettant d'en déduire le mouvement relatif à l'autre référentiel, sans recommencer l'étude. C'est l'objet des formules dites de *changement de référentiel*.

2.6.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

Nous supposons donc en présence *deux* référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, en mouvement l'un par rapport à l'autre. Pour fixer les idées, nous supposons le référentiel $\mathcal{R}$ fixe et comptabiliserons le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Nous supposons $\mathcal{R}$ rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}'$ rapporté à un repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

La description du mouvement entre les deux référentiels est équivalente à la description du mouvement de $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ce type de mouvement relève de la *cinématique du solide*, et se décompose toujours en deux parties bien distinctes : un mouvement de *translation* et un mouvement de *rotation*.

Mouvement de translation. Vitesse d'entraînement

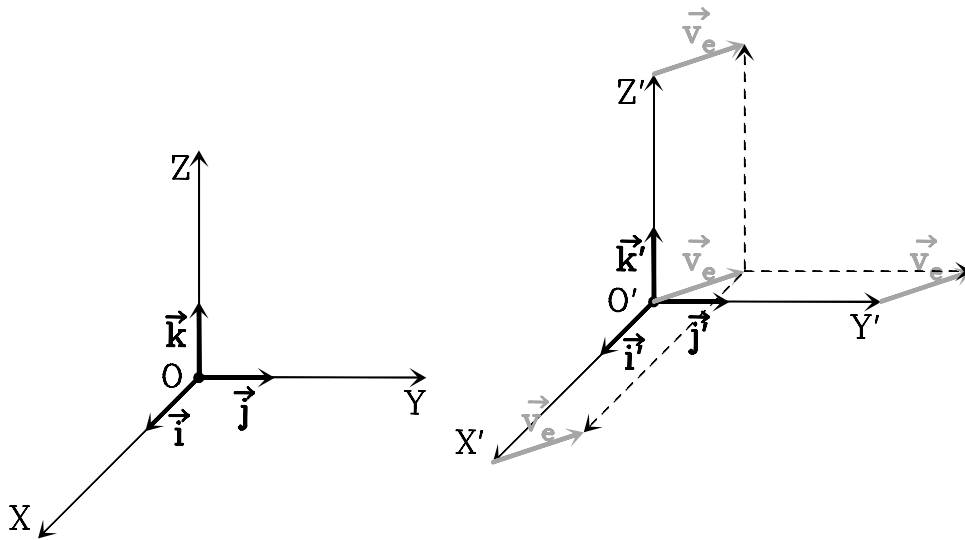


FIG. 2.7: Mouvement de translation d'un référentiel par rapport à un autre : les axes mobiles restent parallèles à eux-mêmes. Seul le mouvement de l'origine compte.

Dans un mouvement de *translation*, le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace sans tourner sur lui-même. Les axes du repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ restent en permanence parallèles à eux-mêmes, et quitte à changer de repère dans $\mathcal{R}'$, on peut toujours les supposer parallèles aux axes du repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce cas, qui encore une fois ne restreint en rien la généralité, les vecteurs $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ restent identiques aux vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et le mouvement est entièrement caractérisé par la donnée du mouvement de l'origine O' par rapport à O .

Le mouvement du point O' est un mouvement ponctuel. Il est défini à un instant t donné par ses vecteurs vitesse et accélération. Le vecteur vitesse, noté $\vec{v}_e$, est appelé *vitesse d'entraînement* du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. De même, le vecteur accélération, noté $\vec{a}_e$, sera l'*accélération d'entraînement*. Nous aurons donc

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO}'}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OO}'}{dt^2} \quad . \quad (2.49)$$

La vitesse et l'accélération d'entraînement n'ont aucune raison d'être constantes au cours du temps. Le mouvement reste une translation tant que les axes du repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ se déplacent parallèlement à eux-mêmes.

Si le vecteur vitesse d'entraînement est constant, on parlera alors de translation rectiligne uniforme, mais c'est juste un cas particulier. Ce cas sera celui d'un wagon se déplaçant à vitesse constante sur une portion de voie rectiligne : le référentiel lié au wagon est alors en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel lié au sol⁴.

L'exemple suivant illustre une translation non rectiligne : On trouve parfois dans des parcs (Paris, Vienne...) ou des fêtes foraines des « grandes roues » où les passagers prennent place dans des nacelles attachées à des grandes roues circulaires qui tournent lentement sur elles-mêmes. Le mouvement de rotation de la roue amène les nacelles à effectuer le tour de la roue, avec un passage à grande hauteur au sommet. Tout au long de leur mouvement, les nacelles accrochées à la roue restent parallèles au sol, de manière à ce les passagers puissent y tenir debout. Chaque nacelle effectue donc un mouvement circulaire vertical par rapport au sol, tout en restant à chaque instant parallèle à elle-même. Le référentiel lié à la nacelle est donc bien en translation par rapport à celui du sol. Il ne s'agit pas d'une translation rectiligne, mais plutôt d'une translation circulaire⁵.

Mouvement de rotation. Vecteur rotation

La situation inverse est celle d'un mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ où l'origine O' reste fixe par rapport à $\mathcal{R}$, mais où seuls les axes, c'est-à-dire les vecteurs de base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, bougent. On parle alors de mouvement de *rotation* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Quitte encore une fois à changer de repère dans l'un ou l'autre référentiel, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que les deux origines O et O' sont confondues (puisqu'elles ne bougent pas l'une par rapport à l'autre).

Dans le cas général la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est tridimensionnelle sans se faire autour d'un axe fixe. Nous allons voir qu'instantanément, on peut toujours définir un axe autour duquel, à l'instant t , la rotation a lieu, et qu'on caractérise entièrement la rotation instantanée à l'instant t par un vecteur appelé *vecteur rotation*.

Puisque les vecteurs de base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ bougent par rapport à $\mathcal{R}$, nous pouvons considérer leurs dérivées par rapport au temps. Rappelons ici que lorsque qu'on dérive un vecteur par rapport au temps, il faut toujours spécifier dans quel référentiel on calcule cette dérivée, le résultat pouvant être différent suivant les cas. Dans le cas fréquent où il n'y a qu'un seul référentiel en jeu, cette précision est implicite, mais ce n'est pas le cas ici. Ainsi, la dérivée temporelle des vecteurs de base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, *calculée dans $\mathcal{R}'$* , est forcément nulle, car il s'agit de justement de vecteurs de base d'un repère lié à ce référentiel ; ils sont donc fixes. Par contre, *par rapport à $\mathcal{R}$* , ces vecteurs ne sont pas fixes, du fait du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Nous considérerons donc leurs dérivées temporelles, calculées dans $\mathcal{R}$, et notées :

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}}, \quad \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}}, \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}}.$$

Nous allons maintenant chercher à décomposer ces trois vecteurs sur la base *en mouvement* $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Ceci est parfaitement licite, $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ constituant à l'instant t une base orthonormée de l'espace au même titre que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous allons contraindre cette décomposition en utilisant le fait que la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ *reste orthonormée* tout en étant en mouvement. Par conséquent la

⁴Par contre si le wagon aborde une portion de voie courbe, il n'a plus translation, car le wagon tourne autour de lui-même par rapport au sol.

⁵pas forcément uniforme, car de temps en temps la roue s'arrête...

norme de $\vec{i}'$ reste égale à 1. Nous pouvons donc écrire

$$\left. \frac{d(\vec{i}' \cdot \vec{i}')}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 0 \quad \implies \quad \vec{i}' \cdot \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 0 \quad . \quad (2.50)$$

Cette dernière relation nous montre que la composante de $d\vec{i}'/dt|_{\mathcal{R}}$ le long de $\vec{i}'$ est nulle. Par conséquent, $d\vec{i}'/dt|_{\mathcal{R}}$ se décompose uniquement sur $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$. De même, $d\vec{j}'/dt|_{\mathcal{R}}$ se décomposera uniquement sur $\vec{i}'$ et $\vec{k}'$, et $d\vec{k}'/dt|_{\mathcal{R}}$ se décomposera uniquement sur $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$. Posons maintenant

$$a = \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{k}' \quad , \quad (2.51)$$

(a est la composante de $d\vec{j}'/dt|_{\mathcal{R}}$ le long de $\vec{k}'$) et exprimons le fait que $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$ restent toujours orthogonaux :

$$\left. \frac{d(\vec{j}' \cdot \vec{k}')}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 0 \quad \implies \quad \vec{j}' \cdot \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{k}' = 0 \quad \implies \quad \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{j}' = -a \quad . \quad (2.52)$$

Par conséquent la composante de $d\vec{k}'/dt|_{\mathcal{R}}$ le long de $\vec{j}'$ est $-a$. Nous pouvons bien sûr raisonner ainsi avec les autres vecteurs. Posons de manière similaire :

$$b = \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{i}' \quad \text{et} \quad c = \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{j}' \quad . \quad (2.53)$$

En exprimant de manière similaire la conservation des produits scalaires, on aboutit aux relations suivantes :

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = c\vec{j}' - b\vec{k}' \quad ; \quad (2.54)$$

$$\left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -c\vec{i}' + a\vec{k}' \quad ; \quad (2.55)$$

$$\left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = b\vec{i}' - a\vec{j}' \quad . \quad (2.56)$$

Introduisons maintenant le vecteur

$$\vec{\Omega} = a\vec{i}' + b\vec{j}' + c\vec{k}' \quad . \quad (2.57)$$

C'est alors par une simple application des formules (1.19) définissant le produit vectoriel qu'on constate que les trois expressions ci-dessus peuvent se réécrire

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}' \quad ; \quad (2.58)$$

$$\left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}' \quad ; \quad (2.59)$$

$$\left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}' \quad . \quad (2.60)$$

$\vec{\Omega}$ est appelé *vecteur rotation instantanée* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. C'est un exemple de pseudo-vecteur. La linéarité du produit vectoriel montre que pour tout vecteur $\vec{A}$ fixe dans $\mathcal{R}'$, on aura

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \quad . \quad (2.61)$$

Si $\vec{A}$ est colinéaire à $\vec{\Omega}$, sa dérivée est donc nulle. La direction de $\vec{\Omega}$ donne l'axe instantané autour duquel le mouvement de rotation se fait, et la norme de $\vec{\Omega}$ donne la vitesse angulaire instantanée de la rotation. Bien entendu, $\vec{\Omega}$ n'a aucune raison d'être constant dans le temps, tant en direction qu'en norme.

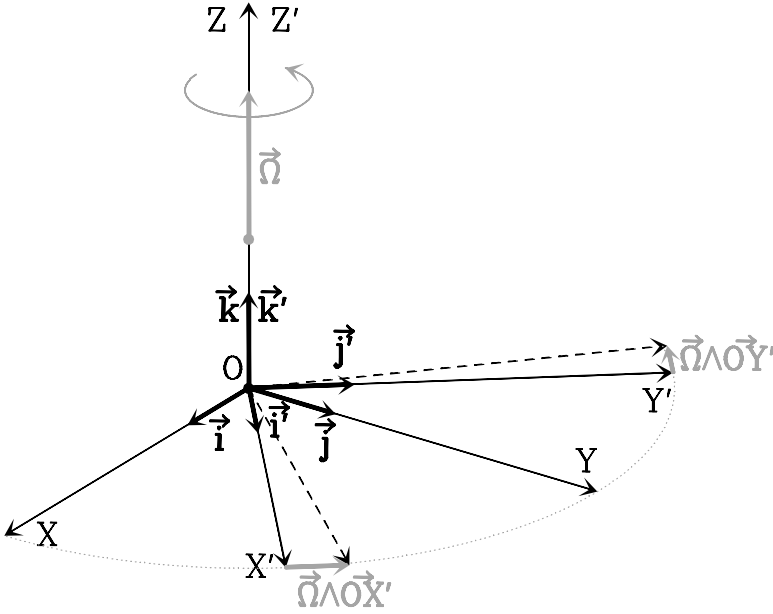


FIG. 2.8: Mouvement de rotation du repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, autour de l'axe OZ : illustration de la notion de vecteur rotation

Si la direction du vecteur rotation reste fixe, alors la rotation se fait autour d'un axe fixe, toujours le même. Quitte encore une fois à changer de repère dans chacun des référentiels, nous pouvons supposer que les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ sont parallèles à cet axe. Dans ce cas $\vec{k}'$ reste fixe (on a toujours $\vec{k} = \vec{k}'$), et $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ tournent dans le plan XOY (Fig. 2.8). Prenons n'importe quel point de l'axe en mouvement OX' , et repérons le par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ au moyen de ses coordonnées polaires (ρ, θ) . Dans ce cas, $(\vec{i}', \vec{j}')$ n'est rien d'autre que la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ introduite plus haut. On a donc forcément

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{j}' \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{i}' \quad , \quad (2.62)$$

ce qui correspond bien aux relations (2.58) et (2.59) avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{k}$. Comme $\vec{k}'$ est fixe cette relation s'applique aussi à lui, donc $\vec{\Omega}$ défini ainsi est bien le vecteur rotation. La norme de $\vec{\Omega}$ indique donc bien la vitesse angulaire instantanée $\dot{\theta}$.

Dans le cas général, la direction de $\vec{\Omega}$ change avec le temps, et donc le mouvement de rotation ne se réduit pas à un simple mouvement autour d'un axe fixe. Cependant, la donnée du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (et de sa dérivée $d\vec{\Omega}/dt$) suffit à décrire instantanément le mouvement de rotation de $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Cas général

Dans le cas général, un mouvement quelconque de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est toujours la combinaison d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Le mouvement de

translation traduit le mouvement de l'origine O' et la rotation traduit le mouvement de la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Il suffira donc pour caractériser le mouvement à un instant t quelconque de donner vitesse d'entraînement et vecteur rotation $(\vec{v}_e, \vec{\Omega})$, ainsi que leurs dérivées par rapport au temps $(\vec{a}_e, d\vec{\Omega}/dt)$.

2.6.2 Formules de changement de référentiel

Nous supposons maintenant, indépendamment de nos deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en mouvement l'un par rapport à l'autre, la présence d'un mobile dans l'espace repéré par le point $M(t)$. Son mouvement peut être décrit dans l'un ou l'autre référentiel. Dans $\mathcal{R}$, le mobile aura une vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ et une accélération $\vec{a}_{\mathcal{R}}$. Dans $\mathcal{R}'$, ce sera $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'}$. Ces quantités sont a priori différentes, à cause du mouvement relatif des deux référentiels. Il existe néanmoins des relations entre elles que nous allons exprimer ici.

Mouvement de translation pure

Dans ce cas, la base mobile $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ reste confondue avec la base fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Seule l'origine O' bouge. Nous partons de la relation de Chasles

$$O\vec{M} = O\vec{O}' + O'\vec{M} \quad , \quad (2.63)$$

et nous dérivons par rapport au temps, dans le référentiel $\mathcal{R}$. Il vient :

$$\left. \frac{dO\vec{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{dO\vec{O}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \quad . \quad (2.64)$$

$dO\vec{M}/dt|_{\mathcal{R}}$ est par définition la vitesse dans $\mathcal{R}$, $\vec{v}_{\mathcal{R}}$; $dO\vec{O}'/dt|_{\mathcal{R}}$ est la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ introduite plus haut. Le dernier terme est a priori différent de $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$, qui est par définition $dO'\vec{M}/dt|_{\mathcal{R}'}$. Si dans $\mathcal{R}'$, $O'\vec{M}$ s'écrit

$$O'\vec{M} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \quad , \quad (2.65)$$

alors nous aurons par définition

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \quad . \quad (2.66)$$

Or la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ reste fixe par rapport à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donc nous aurons aussi

$$\left. \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' + \underbrace{x' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + y' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}_{=0} = \left. \frac{dO'\vec{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{v}_{\mathcal{R}'} \quad . \quad (2.67)$$

Par conséquent, la formule (2.64) devient

$$\boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\mathcal{R}'}} \quad , \quad (2.68)$$

dite formule de *composition des vitesses*. En dérivant une nouvelle fois par rapport au temps, nous obtenons de la même façon la formule de composition des accélérations :

$$\boxed{\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_e + \vec{a}_{\mathcal{R}'}} \quad . \quad (2.69)$$

Remarquons ici que dans ces formules, ce sont l'accélération et la vitesse *dans le référentiel fixe* que nous exprimons en fonction de celles dans le référentiel mobile, et non l'inverse. La quantité $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement *de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$* , que nous devrions en toute rigueur écrire $\vec{v}_{e,\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. Nous ne l'avons pas écrit ainsi afin de ne pas alourdir l'écriture, d'autant plus que nous avons dit clairement au départ quel référentiel était fixe et lequel était en mouvement. Cependant, rien ne nous interdirait de considérer que c'est $\mathcal{R}'$ qui est fixe et que c'est $\mathcal{R}$ qui bouge par rapport à lui. Nous avons alors de manière évidente

$$\vec{v}_{e,\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{O}\vec{O}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = - \left. \frac{d\vec{O}\vec{O}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = - \left. \frac{d\vec{O}\vec{O}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\vec{v}_{e,\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad , \quad (2.70)$$

et on voit alors en exprimant $v_{\mathcal{R}'}$ en fonction de $v_{\mathcal{R}}$ à partir de (2.68) qu'on obtient en fait une formule parfaitement symétrique à (2.68), mais avec cette fois-ci $\vec{v}_{e,\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ au lieu de $\vec{v}_{e,\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. La même remarque vaut bien entendu pour les accélérations.

Mouvement de rotation pure

Dans ce cas, les origines O et O' sont confondues, et le mouvement de la base mobile $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à la base fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est caractérisé à l'instant t par un vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Considérons un vecteur $\vec{A}$ quelconque, fixe dans $\mathcal{R}'$. Du fait du mouvement, il ne sera pas fixe dans $\mathcal{R}$. Nous avons vu plus haut que sa dérivée dans $\mathcal{R}$ s'exprime par

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \quad . \quad (2.71)$$

Supposons maintenant $\vec{A}$ mobile dans à la fois dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Dans la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, ce vecteur se décomposera sous la forme

$$\vec{A} = x'_A \vec{i}' + y'_A \vec{j}' + z'_A \vec{k}' \quad . \quad (2.72)$$

Dérivons maintenant cette relation par rapport au temps, *dans $\mathcal{R}$* . Il vient

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = x'_A \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + y'_A \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z'_A \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \frac{dx'_A}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'_A}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'_A}{dt} \vec{k}' \quad . \quad (2.73)$$

Les trois premiers termes de cette expression représenteraient la totalité de $d\vec{A}/dt|_{\mathcal{R}}$, *s'il était fixe dans $\mathcal{R}'$* . Ils sont donc égaux à $\vec{\Omega} \wedge \vec{A}$; les trois autres représentent par définition la dérivée de $\vec{A}$ dans $\mathcal{R}'$. Nous écrirons donc comme généralisation de (2.71)

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A} + \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \quad . \quad (2.74)$$

Appliquons maintenant ceci au vecteur position $O\vec{M}$ ⁶. Il vient immédiatement

$$\boxed{v_{\mathcal{R}} = v_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge O\vec{M}} \quad , \quad (2.75)$$

ce qui constitue la formule de composition des vitesses dans le cas de la rotation. Le terme $\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}$ peut être vu comme une vitesse d'entraînement, mais contrairement au cas de la

⁶On rappelle que les deux origines sont confondues

translation pure, ce terme *dépend du point* M auquel il s'applique. Un autre mobile situé au même moment à un autre endroit verra une vitesse d'entraînement différente. C'est pourquoi ce terme peut être qualifié de vitesse *locale* d'entraînement.

Passons maintenant à la composition des accélérations. Les calculs sont ici un petit peu plus complexes, mais conceptuellement c'est la même chose. On part de la relation (2.75), et on redérive par rapport au temps, *dans* $\mathcal{R}$. Il vient

$$\left. \frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{dv_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}) \Big|_{\mathcal{R}} . \quad (2.76)$$

Le membre de gauche est par définition $\vec{a}_{\mathcal{R}}$. En développant le membre de droite, nous obtenons

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \left. \frac{dv_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge O\vec{M} + \vec{\Omega} \wedge \left. \frac{dO\vec{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} . \quad (2.77)$$

Le terme $dO\vec{M}/dt|_{\mathcal{R}}$ n'est autre que $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$, que nous avons déjà exprimé par (2.75). Il n'y a donc qu'à remplacer par le membre de droite de cette équation. Pour évaluer le terme $dv_{\mathcal{R}'}/dt|_{\mathcal{R}}$, nous appliquons la formule (2.74) au vecteur $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$, soit

$$\left. \frac{dv_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{dv_{\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{a}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} . \quad (2.78)$$

Par ailleurs, on se convaincra facilement par une nouvelle application de (2.74), mais cette fois-ci à $\vec{\Omega}$ lui-même, que les dérivées temporelles de $\vec{\Omega}$ dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ sont égales. Par conséquent, nous pouvons omettre l'indice " $\mathcal{R}$ " dans $d\vec{\Omega}/dt$. En définitive donc, (2.77) devient

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\mathcal{R}} &= \vec{a}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge O\vec{M}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge O\vec{M} \\ &= \vec{a}_{\mathcal{R}'} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge O\vec{M} , \end{aligned} \quad (2.79)$$

ce que nous pouvons encore une fois transformer en utilisant la formule du double produit vectoriel (1.25) :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{\mathcal{R}'} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} + (\vec{\Omega} \cdot O\vec{M}) \vec{\Omega} - \Omega^2 O\vec{M} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge O\vec{M} . \quad (2.80)$$

Considérons maintenant le point P , projection orthogonale de M sur l'axe instantané de rotation (Fig. 2.9). $O\vec{P}$ est la projection de $O\vec{M}$ sur $\vec{\Omega}$. Nous aurons $\vec{\Omega} \cdot O\vec{M} = \vec{\Omega} \cdot O\vec{P}$, et donc

$$(\vec{\Omega} \cdot O\vec{M}) \vec{\Omega} - \Omega^2 O\vec{M} = (\vec{\Omega} \cdot O\vec{P}) \vec{\Omega} - \Omega^2 O\vec{M} = \Omega^2 O\vec{P} - \Omega^2 O\vec{M} = \Omega^2 (O\vec{P} - O\vec{M}) = -\Omega^2 P\vec{M} . \quad (2.81)$$

Donc notre formule de composition des accélérations devient

$$\boxed{\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{\mathcal{R}'} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}}_{\text{accélération de Coriolis}} + \underbrace{(\vec{\Omega} \cdot O\vec{M}) \vec{\Omega} - \Omega^2 O\vec{M}}_{\text{accélération locale d'entraînement}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge O\vec{M}} . \quad (2.82)$$

Les deux derniers termes de cette expression peuvent être vus comme une accélération locale d'entraînement. Il s'agit bien d'une accélération d'entraînement, mais elle dépend du point

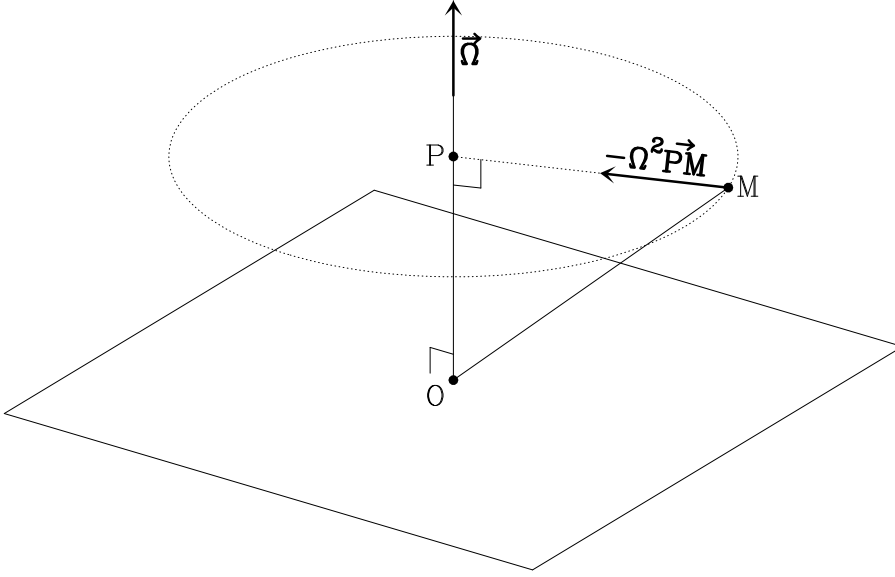


FIG. 2.9: Les points O , P et M par rapport au vecteur rotation; l'accélération centripète $-\Omega^2 \vec{P}\vec{M}$

d'application. Le dernier terme n'est non nul que si le vecteur rotation Ω n'est pas constant. Le terme $-\Omega^2 \vec{P}\vec{M}$ est quant à lui toujours présent. Comme représenté sur la figure 2.9, ce terme d'accélération est dirigé vers le point P . C'est la raison pour laquelle on l'appelle *accélération centripète*, c'est-à-dire dirigée vers le point P autour duquel “tourne” le point M .

Le terme $2\vec{\Omega} \wedge v_{\mathcal{R}'}$ est de nature différente. Il est non nul uniquement lorsque $v_{\mathcal{R}'} \neq \vec{0}$, autrement dit lorsque le mobile se déplace dans $\mathcal{R}'$. Il est appelé *accélération de Coriolis* et a comme nous le verrons des effets macroscopiques importants.

Cas général

Le cas général correspond à un déplacement de l'origine O' et à une rotation de la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. La formule de décomposition (2.64) écrite dans le cas de la translation reste toujours valable, mais cette fois $v_{\mathcal{R}'}$ ne coïncide plus avec $d\vec{O}'\vec{M}/dt|_{\mathcal{R}}$. En fait, on voit facilement que $\vec{O}\vec{O}'$ se dérive comme dans le cas de la translation, et $\vec{O}'\vec{M}$ comme dans le cas de la rotation. Il vient donc par combinaison des résultats précédents :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + v_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}'\vec{M} \quad ; \quad (2.83)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_e + a_{\mathcal{R}'} + 2\vec{\Omega} \wedge v_{\mathcal{R}'} - \Omega^2 \vec{P}\vec{M} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O}'\vec{M} \quad , \quad (2.84)$$

le point P' étant défini par rapport à M et O' comme P précédemment.

Le fait qu'un mouvement relève du cas général ou non peut dépendre d'un choix approprié de l'origine du repère dans $\mathcal{R}'$. Prenons pour illustrer ceci l'exemple suivant : imaginons un plateau de manège (référentiel $\mathcal{R}'$) en rotation autour de son axe par rapport au sol (référentiel $\mathcal{R}$; voir Fig. 2.10)). Dans ce cas, nous fixerons de manière évidente l'origine du repère dans $\mathcal{R}'$ en un point O' situé sur l'axe de rotation, auquel cas le mouvement relève du cas de rotation pure. Rien ne nous empêcherait cependant de fixer l'origine de notre repère dans $\mathcal{R}'$ en un point A situé hors axe qui tourne avec le manège (Fig. 2.10). Dans ce cas, l'origine bouge et la base tourne, donc le mouvement relève du cas général. Il est clair que le choix de A comme origine du repère dans $\mathcal{R}'$ relève d'une mauvaise stratégie, le choix de O' simplifiant grandement la description du mouvement.

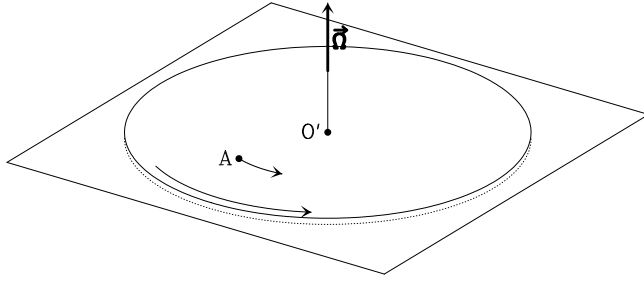


FIG. 2.10: Mouvement de rotation d'un référentiel par rapport à un autre : choix de l'origine

mouvement relève du cas général. S'il existe un point M qui puisse être pris comme origine dans $\mathcal{R}'$ et tel que le mouvement relève de la rotation pure, alors ce point M doit avoir une vitesse nulle, aussi bien dans $\mathcal{R}'$ que dans $\mathcal{R}$. Par simple application de (2.83), cette condition se traduit mathématiquement par

$$\vec{\Omega} \wedge O'M = -\vec{v}_e \quad . \quad (2.85)$$

Il est clair d'après la définition du produit vectoriel que ceci n'est possible que si $\vec{\Omega} \perp \vec{v}_e$ ⁷. Si tel n'est pas le cas, le mouvement ne peut que relever du cas général. Si par contre la condition $\vec{\Omega} \perp \vec{v}_e$ est remplie, alors il existe des solutions. En tout premier lieu, on voit facilement que s'il existe un point M_0 vérifiant la relation (2.85), alors tout autre point M tel que $O'M = O'M_0 + \lambda \vec{\Omega}$ convient également. Enfin, si $\vec{\Omega} \cdot \vec{v}_e = 0$, il est facile de voir par application de la formule du double produit vectoriel (1.25) que le point M_0 vérifiant $O'M_0 = (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_e) / \Omega^2$ convient, et tous les points situés sur une droite passant par M_0 de vecteur directeur $\vec{\Omega}$ conviennent. Cette droite porte le nom d'*axe instantané de rotation*.

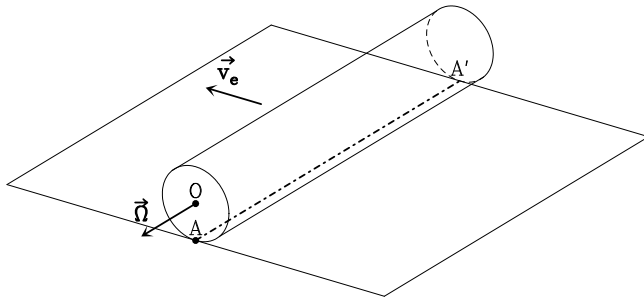


FIG. 2.11: Cylindre roulant sur un plan : illustration de la notion d'axe instantané de rotation.

culaire au vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (Fig. 2.11). Il y a donc un axe instantané de rotation. En fait l'axe instantané de rotation est constitué de manière évidente par la droite correspondant au contact entre le cylindre et la plan de roulement (droite passant par A sur la figure). Le mouvement peut donc être décrit de manière instantanée comme une rotation autour de cet axe. Le problème est que cet axe change dans $\mathcal{R}'$ au cours du temps (ce n'est pas toujours la même portion du cylindre qui est en contact avec le sol). Du coup cette description apparaît compliquée. En fait, il est beaucoup plus simple dans ce cas de considérer comme origine dans $\mathcal{R}'$ un point O' passant par l'axe de symétrie du cylindre qui se déplacera par rapport au sol à la vitesse $\vec{v}_e$, et autour duquel le cylindre tourne à une vitesse de rotation Ω telle que la base soit en roulement parfait. Le cas général est donc ici plus simple que celui de la rotation pure.

Nous sommes alors en droit de nous poser la question de savoir si tout mouvement qui apparemment relève du cas général ne relève en fait pas du cas de rotation pure, moyennant un choix approprié de l'origine du repère dans $\mathcal{R}'$. En fait, ce n'est pas le cas, et nous pouvons nous en rendre compte assez simplement. Supposons que nous disposions déjà d'une origine O' dans $\mathcal{R}'$, et que le

Même lorsque le mouvement peut être décrit comme un mouvement de rotation autour d'un axe instantané de rotation, il n'est pas sûr que cette description soit la plus simple. La raison à cela est que l'axe instantané de rotation *ne reste a priori pas fixe dans $\mathcal{R}'$* . Pour illustrer ceci, prenons le cas simple d'un cylindre roulant sans frottement sur un plan. Dans ce cas, la vitesse du cylindre $\vec{v}_e$ est clairement perpendi-

⁷Ce problème est un problème classique dit de division vectorielle.

Enfin, dans l'exemple qui nous préoccupe, il est clair que si la vitesse de déplacement du cylindre n'est pas perpendiculaire à $\vec{\Omega}$, il ne peut pas y avoir de roulement idéal, donc pas d'axe instantané de rotation.

Chapitre 3

Dynamique du point matériel

Nous abordons dans ce chapitre la *dynamique du point*, c'est-à-dire la détermination du mouvement des corps à partir des forces agissant sur eux.

3.1 Notion de force

Une force est une action mécanique subie par un point matériel, qui se représente bien mathématiquement à l'aide d'un *vecteur*. En effet, on imagine bien qu'une force sera exercée dans une certaine direction et dans un certain sens, et avec une certaine intensité. On reconnaît bien là les caractéristiques des vecteurs.

La notion de force a été introduite par Galilée et Newton. Alors que la cinématique consiste à décrire les mouvements sans souci de leurs causes, l'introduction du concept de force permet d'aller au-delà d'une simple description et d'examiner les causes des mouvements et de leurs variations. Cette étude est la dynamique. En système international, l'unité de mesure de l'intensité d'une force est le *Newton*, de symbole N. Nous relierons plus loin cette unité aux unités fondamentales.

Outre les caractéristiques usuelles de vecteurs, il sera utile parfois de joindre à ces informations la notion de *point d'application* ou *point d'appui* d'une force, caractérisant le point où l'action se fait sentir. En fait, cette notion n'a de sens que pour des systèmes étendus. Si nous étudions un simple point matériel dont les dimensions propres sont petites et sans intérêt pour l'étude du problème, il va de soi qu'une force subie par ce point matériel s'applique sur lui et il est inutile d'en dire davantage. Les choses se compliquent si nous avons affaire à un objet étendu comme un *solide*. Dans ce cas, le résultat dynamique de l'application d'une force sur notre solide dépendra bien entendu du point où s'applique notre force. Ceci est extrêmement important pour toutes les questions relatives au *moment cinétique* d'un système, notion qui sera abordée dans ce chapitre. Ce qui vaut pour les solides vaut aussi pour les ensembles de points matériels. Si nous étudions un tel ensemble de points, il est nécessaire dès lors qu'il est question d'une force de préciser sur lequel des points elle s'applique, ce qui revient en fait à donner un point d'application.

Lorsqu'on a affaire à un objet étendu comme un solide, il est possible qu'une force particulière soit exercée en *tout point* de ce solide. Le mouvement d'ensemble de l'objet sera déterminé en toute rigueur par la somme de toutes ces forces microscopiques agissant sur chaque point de l'ensemble. En fait, on peut trouver une représentation plus commode. Le *théorème du centre d'inertie* que nous verrons dans ce chapitre montre que le mouvement d'ensemble du système (hors rotation) sera déterminé par la somme vectorielle des forces microscopiques agissant sur les divers points (donnant donc une seule force macroscopique) à condition de donner

comme point d'application à cette force unique le *centre d'inertie* du système. La force unique s'appelle *résultante* des forces microscopiques. L'exemple le plus classique est le poids $\vec{P}$ d'un objet sur Terre, c'est à dire l'attraction gravitationnelle (voir plus bas) qu'il subit de la part de la Terre au niveau du sol. En toute rigueur, il s'agit d'une force qui s'applique en tout point du solide, mais on la représente traditionnellement sous la forme d'une force unique appliquée au centre d'inertie du solide. D'ailleurs, le centre d'inertie est souvent appelé *centre de gravité* pour cette raison.

Il y a plusieurs types de forces dans la Nature. On fait en général la distinction entre forces à distance et force de contact.

3.1.1 Les forces d'interaction à distance

Comme leur nom l'indique, ces forces sont celles qui interviennent entre deux corps qui ne sont pas en contact. Ces forces, encore qualifiées d'interactions fondamentales, sont au nombre de quatre : la force de gravitation, la force électromagnétique, la force d'interaction faible et la force d'interaction forte. Cette classification date de 1948. Deux d'entre elles (la gravitation et l'électromagnétisme) sont à longue portée. Les deux autres sont de courte portée (l'interaction forte et l'interaction faible).

L'interaction forte ou force nucléaire

Parmi les 4 types d'interactions, c'est de loin la plus forte (100 fois plus forte que l'interaction électromagnétique), mais elles n'agit que sur de très courtes distances (10^{-15}m). Elle lie les nucléons (protons et neutrons) à l'intérieur des noyaux atomiques.

Cette interaction a « bâti » la plupart des atomes existant dans l'Univers, soit lors de la formation de l'Univers (Big-Bang), soit grâce aux réactions thermonucléaires au sein des étoiles. C'est là la source principale d'énergie des étoiles. Pratiquement toute l'énergie disponible sur Terre provient du Soleil et donc de cette interaction.

L'interaction faible

Elles est très mal connue, sa portée est inférieure à $4 \cdot 10^{-17}\text{m}$. Son intensité est égale ou inférieure à celle des forces électromagnétiques. Elle est responsable de l'essentiel de la radioactivité, et de la production des neutrinos. La découverte des bosons intermédiaires $W^\pm$ a permis de la relier à l'électromagnétisme.

Les neutrinos sont des particules dont la masse est extrêmement faible, et qui interagissent très peu avec les autres particules. Le Soleil est une importante source de neutrinos. Ceux-ci traversent la Terre sans la moindre difficulté. On essaye de les détecter, c'est notre seul espoir de voir directement l'intérieur du Soleil. La détection des neutrinos solaires est un problème important de l'astrophysique contemporaine.

L'étude des interactions faibles et fortes ne s'aborde pas avant le second cycle universitaire. Précisons cependant qu'on ne dispose pas de loi exacte de description de ces interactions, mais seulement de modèles approximatifs (potentiels de Yukawa...).

L'électromagnétisme

Les forces électromagnétiques sont importantes pour la structure des atomes, des molécules, des minéraux, des roches et des corps solides en général. Les charges électriques en mouvement produisent des champs magnétiques. Ces derniers sont présents partout dans l'Univers observé.

En électromagnétisme, on fait la distinction entre force électrostatique et force magnétique. Les deux sont liées, et ceci est compris depuis le XIX^e siècle. L'interaction électrostatique ou Colombienne s'énonce ainsi : Deux corps ponctuels de charges q_1 et q_2 exercent entre eux une action inversement proportionnelle au carré de leur distance mutuelle. L'action est attractive si les charges sont de signe opposé et répulsive dans le cas contraire. Si $\vec{r}$ désigne le rayon vecteur joignant le point 1 au point 2, et r la distance qui les sépare, la force exercée par l'objet 2 sur l'objet 1 vaut

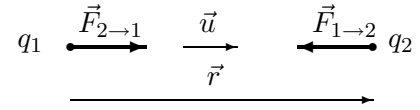


FIG. 3.1: Interaction électrostatique entre deux charges

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \quad , \quad (3.1)$$

où $\vec{u} = \vec{r}/|\vec{r}|$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{r}$. La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est bien sûr opposée. Le terme $1/(4\pi\epsilon_0)$ est une *constante de couplage* faisant intervenir la quantité $\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{A}^2 \text{m}^{-3} \text{kg}^{-3} \text{s}^4$ appelée *permittivité du vide*. C'est une constante fondamentale. En système international, on a $1/(4\pi\epsilon_0) \simeq 9 \cdot 10^9$.

Cette force vaut pour des charges au repos. En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, une charge q en mouvement subira en outre une *force magnétique* valant

$$\vec{F}_{\text{magn}} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad , \quad (3.2)$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la particule. L'expression de cette force est donc très différente. Signalons au passage que la présence du produit vectoriel dans l'expression de cette force rend son étude complètement tridimensionnelle.

Il faut également savoir que toute charge en mouvement crée du champ magnétique et que la variation dans le temps d'un champ magnétique crée un champ électrique induit en vertu des équations de Maxwell. Les deux sont donc bien liés, et en dehors de situations particulières une charge électrique subira toujours une force électrique *et* une force magnétique. On peut regrouper les deux sous l'appellation de *force électromagnétique*.

La force de gravitation

La gravitation est de loin la plus faible de toutes les forces fondamentales. Son expression est semblable à celle de la force électrostatique, à ceci près qu'elle concerne des masses et non des charges. Entre deux masses ponctuelles s'exerce donc une action telle que la force qu'exerce la masse 2 sur la masse 1 vaut

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u} \quad , \quad (3.3)$$

$\vec{r}$ et $\vec{u}$ répondant aux mêmes définitions que précédemment. La forme mathématique de cette force ressemble donc à celle de la force électrostatique, mais il y a deux différences importantes. En premier lieu la constante de couplage G , appelée *Constante de la gravitation*, vaut $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. Sa valeur est donc très faible. La force de gravitation est 10^{36} fois plus faible de la force électrostatique et près de 10^{38} fois plus faible que les forces nucléaires. Par conséquent pour que cette force puisse se faire sentir, il faut que les masses en jeu soient très importantes. Elle concerne donc en tout premier lieu les objets célestes que sont planètes, étoiles, galaxies, etc... A l'échelle humaine, nous ressentons cette force de la part de la Terre, c'est celle qui nous lie au sol. Par contre il est très difficile d'apprécier cette force entre deux

TAB. 3.1: Comparaison des forces fondamentales

Force de gravitation	Force électrique	Forces nucléaires
Force attractive. Effet cumulatif. Intervient aux échelles astronomiques	Force attractive et répulsive. Neutre à l'échelle macroscopique.	Attractive pour $r \simeq 10^{-15}\text{m}$. Répulsive pour $r \ll 10^{-15}\text{m}$.
Loi simple : $F_g = \frac{Gmm'}{r^2}$	Loi simple : $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$	Forme exacte inconnue
Intensité $\simeq 2 \cdot 10^{-34}\text{ N}$ entre deux nucléons dans un noyau atomique.	Intensité $\simeq 2 \cdot 10^2\text{ N}$ entre deux protons dans un noyau atomique.	Intensité $\simeq 8 \cdot 10^3\text{ N}$ entre deux nucléons dans un noyau atomique.

objets donnés de notre quotidien. Il n'en va pas de même de la force électrostatique que nous pouvons voir à l'œuvre dans des expériences classiques mettant en œuvre des boulettes chargées.

Il y a aussi une autre différence entre les deux interactions : la gravitation est *toujours attractive*, au contraire de la force électrostatique qui dépend du signe des charges. Or la matière est globalement neutre à grande échelle, les charges négatives équilibrant les charges positives. Par conséquent la force électrostatique n'a que peu d'effet à grande échelle. Du coup, et comme les forces nucléaires n'agissent que sur des très courtes distances, la force de gravitation est la force dominante d'interaction aux échelles astronomiques, bien qu'elle soit de loin la plus faible de toutes (voir comparatif Table 3.1). La gravitation a un effet cumulatif. C'est la force qui régit la dynamique des planètes, des étoiles, des amas d'étoiles, des galaxies et des amas de galaxies. Nous reviendrons sur la gravitation au chapitre 6 de ce cours.

3.1.2 Les forces de contact

Les forces de contact sont celles qui entrent en jeu lorsque deux systèmes matériels viennent à entrer en contact. A y regarder de plus près, ces forces ne sont rien d'autre qu'une manifestation macroscopique du résultat de forces d'interaction fondamentales intervenant à l'échelle microscopique. Il n'y a donc pas de nouvelle force ! Simplement, il est commode et suffisant pour l'étude de la dynamique des systèmes matériels qui nous intéressent de ne décrire que le résultat macroscopique de ces forces d'interaction microscopiques. Ainsi, si nous appuyons avec le doigt sur un rocher, nous sentons macroscopiquement une résistance qui est une force de réaction. Au niveau microscopique, cette réaction est celle manifestée par la cohésion du réseau cristallin que forment les atomes de la roche. Pour l'essentiel, il s'agit d'interactions électromagnétiques entre les atomes qui se manifestent comme une résistance à la déformation du cristal. Il est cependant commode de décrire l'effet global sous la forme d'une seule force de réaction.

On distingue plusieurs types de forces de contact que nous allons détailler : forces de *réaction*, de *frottement*, de *tension* et de *pression*.

Les forces de réaction

La réaction d'un support est tout simplement la force de réponse du support à un objet exerçant lui-même une action sur ce support. Cette réaction est par définition une force qui se répartit uniformément sur toute la surface de contact entre l'objet et le support (encore appelée interface). On peut toutefois la représenter sous la forme d'une force résultante unique

appliquée au centre de l'interface. Un exemple classique est celui d'un objet pesant reposant sur un support horizontal (Fig. 3.2). L'objet subit son poids $\vec{P}$ de la part de la Terre et donc exerce une action sur le sol, qui en retour exerce une réaction $\vec{R}$ sur l'objet. Le poids $\vec{P}$ s'applique au centre d'inertie G de l'objet, la réaction au centre O de la surface de contact. Par le principe d'inertie que nous verrons plus loin, si l'objet est immobile, la résultant de toutes ces forces est nulle, soit

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad . \quad (3.4)$$

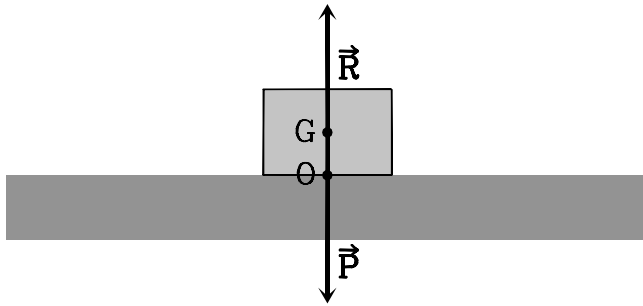


FIG. 3.2: Réaction du sol $\vec{R}$ face à un objet pesant.

La réaction est donc normale à la surface de contact, ce qui est caractéristique des situations où aucune action de frottement n'entre en jeu. La réaction est juste une action de pression.

Les forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui tendent à s'opposer au déplacement d'un objet. Parfois, elles interviennent lorsque le mouvement n'est pas encore présent mais qu'une force appliquée sur l'objet tente de le déplacer. On parle alors de frottement *statique*. Elles sont en général encore présentes lorsque le

mouvement est effectif, et tentent de s'y opposer. Il est alors question de frottement *dynamique*. On fait aussi la distinction entre frottements *solides*, qui interviennent à l'interface de contact entre deux solides, et frottements *visqueux*, qui interviennent lors du déplacement d'un objet solide dans un fluide.

Forces de frottement visqueux : Ces forces n'apparaissent que lorsque le mouvement existe. Elles s'opposent au déplacement d'un objet au sein d'un fluide. Ces frottements génèrent une force qui vectoriellement est opposée à la vitesse $\vec{v}$ de déplacement de l'objet dans le fluide. Pour les petites vitesses elle est proportionnelle à la vitesse. Nous écrirons donc $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où α est un coefficient positif indépendant de la vitesse, fonction de la forme de l'objet et des caractéristiques visqueuses du fluide. Pour des vitesses plus élevées, cette force a tendance à être proportionnelle au *carré* de la vitesse, soit $\vec{F} = -\beta \|\vec{v}\| \vec{v}$, où β est un autre coefficient du même type. Il est à noter que ces lois, comme toutes celles concernant les forces de frottement, sont pour l'essentiel *empiriques*, c'est à dire qu'on les a tirées de l'expérience sans les avoir déduites d'un modèle théorique. Les frottements sont des phénomènes complexes dont l'étude théorique est difficile¹.

Forces de frottement solides : Lorsqu'on décide de faire glisser un objet solide en appui sur un support plan, on lui applique une force de traction. Si cette force est trop faible, on constate expérimentalement que l'objet ne se déplace pas malgré la force. C'est la réaction du support qui s'adapte pour maintenir l'objet immobile. Il s'agit là de frottement statique.

Si bien sûr on augmente la force de traction, l'objet se mettra en mouvement. La force de frottement ne cesse pas pour autant, elle continue à s'opposer au mouvement, mais cette fois en mode dynamique.

¹et c'est souvent le cas pour tous les phénomènes de surface.

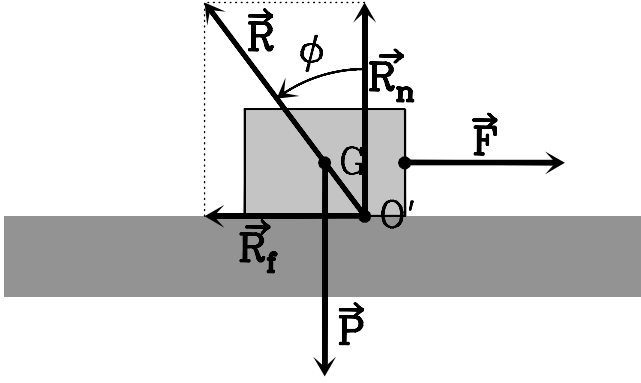


FIG. 3.3: Réaction du sol $\vec{R}$ en présence de frottements

normale) et horizontale (réaction de frottement) de la réaction $\vec{R}$ (voir Fig. 3.3). Nous avons donc par définition

$$\|\vec{R}_f\| = \|\vec{R}\| \sin \phi \quad \text{et} \quad \|\vec{R}_n\| = \|\vec{R}\| \cos \phi \quad . \quad (3.6)$$

Comme par ailleurs $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$, nous avons forcément

$$\vec{P} = -\vec{R}_n \quad \text{et} \quad \vec{F} = -\vec{R}_f \quad . \quad (3.7)$$

Tout ceci apparaît évident sur la figure 3.3. On en déduit aisément

$$\tan \phi = \frac{\|\vec{R}_f\|}{\|\vec{R}_n\|} = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{P}\|} \quad . \quad (3.8)$$

Le nombre $\tan \phi$ est appelé *coefficient de friction*. Tant que l'objet reste immobile, on parle de *coefficient de friction statique*, encore nommé f_s . On comprend alors intuitivement ce qui se passe. Lorsque la force $\vec{F}$ est nulle, f_s et l'angle ϕ sont nuls. Quand on fait croître $\vec{F}$, l'angle ϕ augmente de telle façon que $\tan \phi$ augmente proportionnellement à $\|\vec{F}\|$ (le poids ne change pas).

On peut noter un point de détail supplémentaire : En présence de frottement statique le point d'application de la résultante $\vec{R}$ des forces de réaction ne se situe plus au centre O de l'interface, mais se déplace en un point O' vers le point d'application de la force $\vec{F}$ (voir Fig. 3.3). C'est bien sûr la réaction qui s'adapte, mais mathématiquement, cela provient du fait que notre objet est en équilibre vis-à-vis de la translation mais aussi de la rotation. Le théorème du moment cinétique que nous verrons plus loin montre alors que nécessairement la réaction, partant du point O' , doit passer par le centre de gravité G . Ceci est impossible en restant au point O .

Lorsque la force atteint une valeur critique F_c , l'objet se met alors en mouvement. A partir de ce moment, nous n'avons plus $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$. Expérimentalement, on constate alors que l'angle de frottement devient indépendant de la force (pouvant qu'on reste en mouvement). Le coefficient de frottement $\tan \phi$ se stabilise à une valeur f_d appelée *coefficient de friction dynamique*. Expérimentalement, on constate que le coefficient f_d est légèrement inférieur à la valeur maximale du coefficient statique f_s obtenue pour une force juste en-dessous de la valeur critique F_c (voir Fig. 3.4). En un mot, quand le mouvement démarre, l'angle de frottement diminue légèrement et se stabilise.

Les forces agissant sur l'objet sont le poids $\vec{P}$, la réaction du sol $\vec{R}$, et la force de traction $\vec{F}$. Tant que l'objet est au repos, nous avons nécessairement

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \quad . \quad (3.5)$$

$\vec{P}$ étant vertical, et $\vec{F}$ horizontale, nécessairement la réaction $\vec{R}$ n'est plus verticale comme avant. Elle s'incline dans la direction opposée à $\vec{F}$ (voir Fig. 3.3). Soit ϕ l'angle que fait la réaction $\vec{R}$ avec la verticale. Cet angle est appelé *angle de frottement*. Désignons par $\vec{R}_n$ et $\vec{R}_f$ les projections verticale (réaction nor-

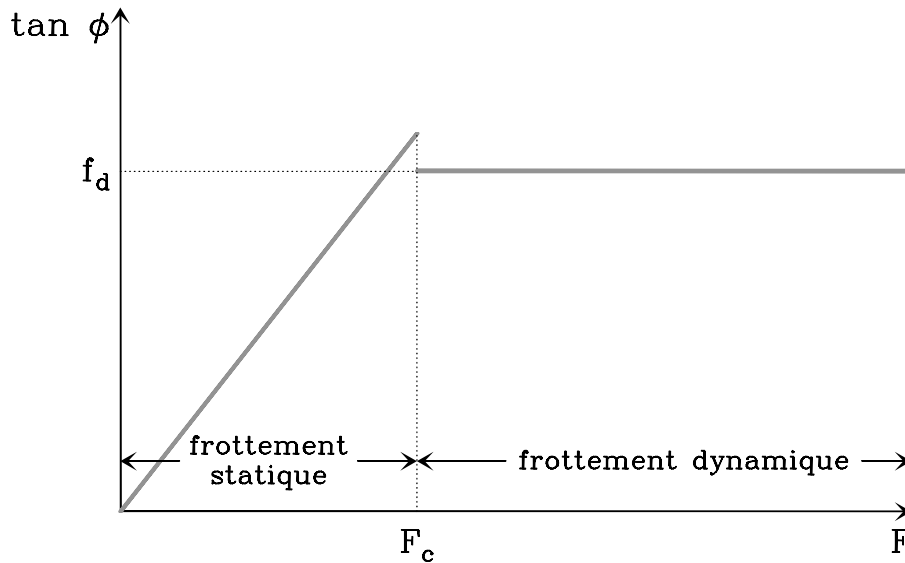


FIG. 3.4: Le coefficient de frottement en fonction de la force appliquée : régimes statique et dynamique.

Le coefficient de friction dynamique est essentiellement fonction de la nature des surfaces de contact. Il ne dépend pas de l'étendue de la surface en contact. Il peut par contre être fortement altéré en présence de liquides lubrifiants (huiles...).

Un dernier mot à propos des frottements en général : dans les situations usuelles, il y a *toujours* des frottements. Il n'y a guère qu'en dynamique des particules élémentaires ou à l'inverse dans le mouvement des astres les uns par rapport aux autres qu'on peut raisonnablement dire qu'il n'y en a pas. Dans les situations courantes sur Terre qui sont celles des exercices, dire qu'il n'y a pas de frottements comme c'est souvent le cas est une *approximation* plus ou moins bien justifiée. C'est par exemple le cas lorsqu'on évoque une bille glissant sans frottement le long d'un plan incliné. Même en savonnant le plan, il y aura toujours des frottements. Seulement, on s'arrange pour que ceux-ci soient suffisamment faibles pour que sur une courte échelle de temps, leur effet ne se fasse pas sentir.

Les forces de tension

La force de tension d'un fil est la résistance qu'il oppose à la force de traction $\vec{F}_e$ qu'on lui applique une fois qu'il s'est tendu. Lorsque le fil ne bouge pas, cette force est exactement opposée à la force de traction. Elle s'aligne bien évidemment dans la direction du fil et a la même valeur sur toute la longueur du fil. Si la force exercée est trop grande, bien sûr le fil casse.

Dans le cas où le fil est élastique (ce qui est entre autres le cas des *ressorts*), la tension est alors proportionnelle à son allongement par rapport à sa longueur à vide l_0 . La longueur à vide du ressort est sa longueur naturelle lorsqu'aucune force n'y est appliquée. Si on applique une force extérieure $\vec{F}_e$, le ressort réagit par une force $\vec{F}$ fonction de son allongement :

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u} \quad , \quad (3.9)$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'allongement, et où l est la longueur effective du ressort (voir Fig. 3.5). La constante k de proportionnalité est caractéristique du ressort considéré et est appelée *raideur* du ressort. Plus elle est grande, moins le ressort s'allongera facilement. En S.I., la raideur se mesure en N m^{-1} .

Dans le cas d'un ressort, la force $\vec{F}$ peut être une force de tension si $l > l_0$, ou de compression si on appuie sur le ressort de manière à ce que $l < l_0$ (Fig. 3.5). Ce dernier cas de figure concerne uniquement les ressorts proprement dits, et non les fils élastiques qui ne peuvent travailler qu'en étirement.

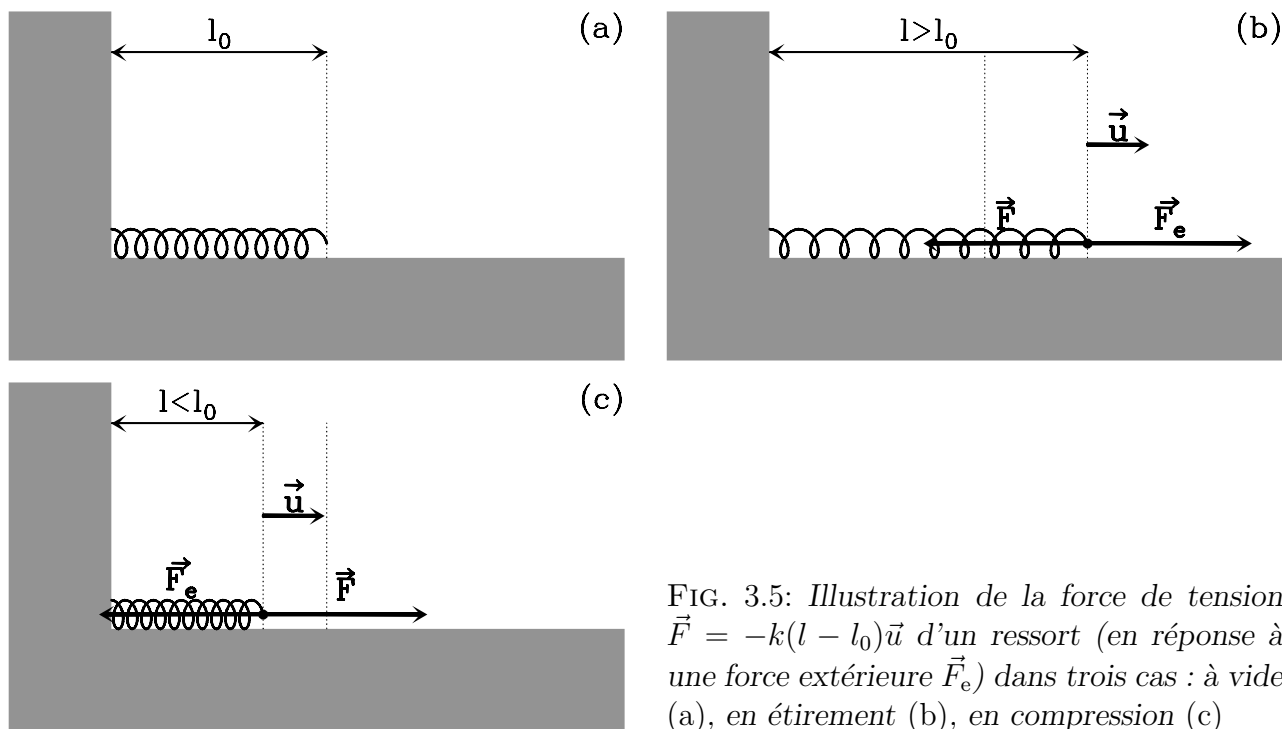


FIG. 3.5: Illustration de la force de tension $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$ d'un ressort (en réponse à une force extérieure $\vec{F}_e$) dans trois cas : à vide (a), en étirement (b), en compression (c)

Bien entendu, le domaine de validité de la formule (3.9) est forcément limité. Si on exerce sur le ressort une force de traction $\vec{F}_e$ trop importante, on risque de le déformer tellement au point qu'il ne retrouve plus ensuite sa longueur à vide l_0 une fois la tension relâchée. Si on tire même encore plus fort, on peut le casser. Dans tous les cas, on dira qu'on a *dépassé le domaine d'élasticité du ressort*. En d'autres termes, la formule (3.9) n'est valable que jusqu'à une certaine valeur de la force extérieure $\vec{F}_e$. Ceci est caractéristique de tous les phénomènes élastiques : l'élasticité d'un ressort, d'un fil, d'un matériau, etc. . . est toujours valable dans un régime borné de force extérieure appliquée, appelé domaine d'élasticité.

Les forces de pression

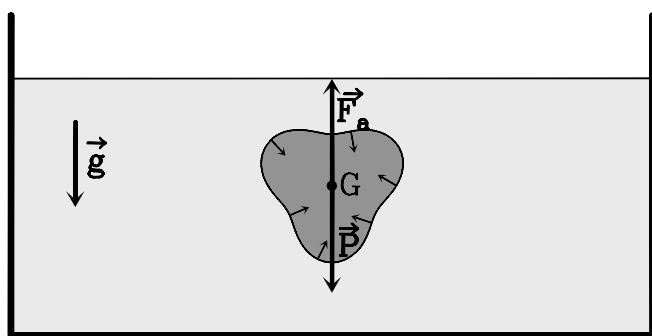


FIG. 3.6: Illustration de la poussée d'Archimède exercée sur un corps plongé dans un liquide

On pourrait classer dans les forces de pression la force de tension d'un ressort lorsque celui-ci agit en compression. Dans la pratique, on réserve ce terme pour une action exercée au sein d'un fluide (liquide ou gaz). Lorsqu'on considère une masse de fluide, les diverses actions exercées sur cette masse (forces extérieures ou de contact) ont tendance à s'homogénéiser au sein du fluide au point d'exercer sur toute surface plongée dans le fluide une force proportionnelle à la surface appelée *force de pression*. Sur une surface élémentaire dS s'exercera une force perpendiculaire à cette surface de norme $F = p dS$, où p est une constante de proportionnalité appelée *pression*. Une pression est donc dimensionnellement une *force par unité de surface* et se mesure en S.I. en $N m^{-2}$.

La pression n'a a priori aucune raison d'être homogène au sein d'un fluide. Le sens commun

montre bien que la pression augmente au fur et à mesure qu'on s'enfonce sous la surface de l'eau. Ceci est dû au poids croissant des masses d'eau situées au-dessus. Une application très classique de ce formalisme est la notion de *poussée d'Archimède* qui s'énonce ainsi depuis plus de 2000 ans :

Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée de bas en haut égale au poids du volume d'eau qu'il déplace.

Cette poussée est la résultante de toutes les forces de pression qui agissent sur les parois du corps (Fig. 3.6). Si la pression dans le liquide était homogène, cette résultante devrait être nulle. Or dans le champ de gravité terrestre, la pression dans le liquide est plus forte dans le fond qu'à la surface. La résultante est donc non nulle, et on montre aisément qu'elle équivaut à une force dirigée vers le haut qui s'applique au centre de gravité, valant

$$\vec{F}_a = \rho_l V \vec{k} \quad , \quad (3.10)$$

si ρ_l est la masse volumique du liquide, V le volume de corps, et $\vec{k}$ est vecteur unitaire dirigé vers le haut.

3.2 Première loi de Newton : le principe d'inertie

L'essentiel des lois de la mécanique peut être ramené à trois principes de base que nous allons introduire maintenant, appelés *lois de Newton*. Le principe d'inertie est la première d'entre elles. Si l'on veut être parfaitement rigoureux sur le plan historique, il faut préciser que cette loi avait déjà été publiée en substance par Galilée en 1632, soit plusieurs dizaines d'années avant Newton.

3.2.1 Quantité de mouvement

On considère un point matériel de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, son vecteur vitesse étant $\vec{v}$. Sa *quantité de mouvement* dans le référentiel $\mathcal{R}$ est *par définition* le vecteur $\vec{p}$ valant

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad . \quad (3.11)$$

Insistons bien sur le fait que ceci est une *définition*. La quantité de mouvement est une grandeur mathématique purement artificielle introduite pour les besoins de la dynamique. C'est un vecteur proportionnel au vecteur vitesse, mais il ne se mesure pas dans la même unité. Elle a pour dimension MLT^{-1} . En S.I., l'unité est le kg m s^{-1} . La quantité de mouvement dépend du référentiel d'étude.

Cette définition de la quantité de mouvement est valable pour la mécanique classique uniquement. En mécanique relativiste², il est nécessaire de modifier cette définition pour que les principes de la mécanique introduits plus bas continuent à s'appliquer.

3.2.2 Le principe d'inertie

Il convient d'abord de définir ce qu'est un *principe*. Il s'agit d'une propriété que nous supposerons vraie de manière universelle, sans démonstration. On parle encore de postulat. Tous les domaines de la physique reposent sur un nombre en général limité de tels principes, et la mécanique n'échappe pas à cette règle. Le principe d'inertie, pour un point matériel, s'énonce donc ainsi :

²c'est-à-dire, rappelons-le, lorsque les vitesses en jeu deviennent comparables à celle de la lumière

Dans tout référentiel galiléen, un point matériel isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme (vecteur vitesse constant).

Cette définition sous-entend l'introduction de deux notions nouvelles. Premièrement, un système matériel sera dit *isolé* si aucune force extérieure ne s'y applique. Par conséquent, le principe d'inertie implique qu'un système matériel ne subissant aucune force est appelé à rester indéfiniment en mouvement rectiligne uniforme. Cette simple constatation heurte le sens commun, car sur Terre, tout objet abandonné à lui-même finit toujours par s'arrêter. Nous savons aujourd'hui que ceci est en fait dû aux inévitables frottements. Mais à l'époque de Galilée, l'énoncé d'un tel principe n'était pas évident du fait même de ces constatations.

La masse d'un système matériel étant une constante, on voit aisément que si le principe d'inertie s'applique, un système isolé verra certes son vecteur vitesse, mais également son vecteur quantité de mouvement constants.

La deuxième notion implicitement introduite par l'énoncé du principe d'inertie est celle de *référentiel galiléen*.

3.2.3 Référentiels galiléens ou inertiels

Il est impossible de définir ce qu'est un référentiel galiléen indépendamment du principe d'inertie. Par définition donc, nous dirons :

Un référentiel galiléen (ou inertiel) est un référentiel où le principe d'inertie s'applique.

Cette définition peut ne pas paraître satisfaisante. En fait, elle sous-tend l'assertion comme quoi dans la Nature *il existe des référentiels galiléens*, et c'est là l'hypothèse principale de la mécanique Newtonienne. On suppose donc qu'il existe des référentiels « mieux que les autres » dans lesquels il sera recommandé de faire de la mécanique. Cette hypothèse est absente dans la Relativité Générale d'Einstein.

Du coup, la question qui vient immédiatement à l'esprit est la suivante : Quels sont les référentiels galiléens dans la vie courante ? Pour répondre à cette question, il suffit en toute théorie de vérifier expérimentalement que tout objet isolé se déplace en mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel donné. En fait nous ne connaissons pas de référentiel *strictement* galiléen, mais nous disposons d'*approximations* plus ou moins bonnes.

Le référentiel terrestre : C'est le référentiel lié à la Terre, celui de la vie courante. Il tourne donc avec la Terre. Ce référentiel peut être considéré comme raisonnablement galiléen tant que les effets de rotation de la Terre ne se font pas sentir, par conséquent pour des mouvements qui ne s'étendent pas sur une grande distance par rapport à la taille de la Terre et pendant une durée assez courte, c'est-à-dire petite par rapport à la journée. La plupart des phénomènes de la vie courante remplissent ces conditions, mais ce n'est par exemple plus le cas pour les phénomènes météorologiques.

Le référentiel géocentrique : C'est un référentiel toujours lié à la Terre, mais à son centre uniquement, ses axes pointant dans la direction d'étoiles lointaines qui ne bougent pour ainsi dire pas dans le ciel. Ce référentiel n'accompagne pas la Terre dans son mouvement de rotation, mais il est toujours en rotation autour du Soleil. Il n'est donc pas strictement galiléen, mais les écarts au principe ne se feront sentir que sur des durées comparables à l'année terrestre. Il permet donc d'étudier des phénomènes bien plus longs que le précédent. Ce référentiel sera celui des satellites artificiels, ou de la météorologie.

Le référentiel héliocentrique : Appelé encore *référentiel de Copernic*, c'est le référentiel lié au Soleil, ou plus exactement au centre de gravité du Système Solaire, et dont les axes pointent dans la direction d'étoiles lointaines. C'est le référentiel de base de toutes les études astronomiques liées au Système Solaire dans sa globalité : mouvement des planètes, des astéroïdes, etc. . .

Les autres référentiels : En toute rigueur, le référentiel de Copernic n'est pas plus inertiel que les autres, car le Système Solaire est en rotation autour du centre galactique, et aussi parce que centre d'inertie du Système Solaire n'est pas tout-à-fait confondu avec le Soleil. Cependant, la période de ce mouvement (250 millions d'années!) fait qu'il faut vraiment étudier des phénomènes très longs et à l'échelle de la Galaxie pour être concerné par les écarts au principe d'inertie dans le référentiel de Copernic. On définit néanmoins le *référentiel galactique* centré sur le centre de notre Galaxie, et qui sert principalement aux études liées à la Galaxie elle-même. Bien entendu, nous pouvons poursuivre les investigations sur une plus grande échelle. Notre Galaxie fait partie d'un ensemble de galaxies appelé *groupe local*, lui-même en mouvement autour d'un *superamas*³. Nous pouvons toujours définir un référentiel lié à ce superamas, qui sera « plus galiléen » que le précédent. Par ce procédé, nous voyons que le seul véritable référentiel galiléen est celui qui sera lié au centre d'inertie de l'Univers tout entier, mais cette simple affirmation n'a elle-même pas de sens, car sur des échelles de distance de l'ordre des dimensions de l'Univers, les effets de la Relativité Générale se font significativement sentir, de telle sorte qu'on ne peut plus appliquer la mécanique Newtonienne en temps que telle. Il n'y a donc pas en fait de référentiel exactement galiléen.

Supposons maintenant que nous ayons *deux* référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Nous y plaçons un mobile isolé. La formule de composition des vitesses (2.83) dans le cas général s'applique, soit rappelons-le

$$\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge O'M \quad , \quad (3.12)$$

$\vec{v}_{\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$ étant la vitesse du mobile dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Ces deux vecteurs sont constants par hypothèse d'inertie dans les deux référentiels. Par conséquent, la vitesse locale d'entraînement $\vec{v}_e + \vec{\Omega} \wedge O'M$ doit rester constante, malgré le déplacement du point M . Comme ceci doit être vrai pour tous les mouvements rectilignes uniformes, ceci n'est possible que si le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est identiquement nul, et si la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ est constante. En d'autres termes, les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, et la formule de composition des vitesses à appliquer se réduit à (2.68). Nous pouvons donc énoncer :

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres,

et inversement tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen sera lui-même galiléen. La formule de composition des vitesses (2.68) porte d'ailleurs le nom de *transformation de Galilée*. Elle cesse d'être valable lorsque les vitesses deviennent comparables à la vitesse de la lumière. On lui substitue alors la *transformation de Lorentz* issue de la Relativité Restreinte, qui sort du cadre de ce cours.

³centré sur un amas particulier appelé *Virgo*

3.3 Deuxième loi de Newton : la Relation Fondamentale de la Dynamique

Nous allons maintenant énoncer la loi fondamentale qui relie le mouvement d'un point matériel à ses causes, c'est-à-dire les forces agissant sur l'objet. Soit donc un point matériel de masse m , en mouvement *dans un référentiel galiléen*, animé de la vitesse $\vec{v}$. Il possède donc un vecteur quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$. La relation fondamentale de la dynamique s'énonce alors

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\text{effet sur le mouvement}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{ext}}}_{\text{causes du mouvement}}} \quad , \quad (3.13)$$

où $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ est la somme des forces *extérieures* au système étudié, à l'exclusion des forces *internes*. S'agissant d'un point matériel, on a du mal à imaginer des forces autres qu'extérieures, mais comme cette loi s'appliquera comme nous le verrons à des systèmes étendus, cette distinction a son importance.

La relation (3.13), encore appelée *Relation Fondamentale de la Dynamique* mérite quelques commentaires : premièrement, on remarquera qu'il s'agit d'une relation vectorielle ; deuxièmement, les deux membres de cette équation sont de nature différente. Le membre de gauche est une quantité cinématique, tandis que le membre de droite appartient au monde des forces. On relie donc par cette équation les causes du mouvement (les forces) à leurs effets (la modification de la quantité de mouvement). Cette relation nous permet au passage de rattacher dimensionnellement le concept de force aux unités fondamentales : une force est dimensionnellement équivalente à une quantité de mouvement divisée par un temps. Sa dimension est donc MLT^{-2} . Comme nous avons vu qu'en S.I. l'unité de force est de Newton, nous pouvons dire $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$.

La plupart du temps⁴, la masse m du système étudié est constante, de telle sorte que la relation (3.13) peut s'écrire

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a} \quad , \quad (3.14)$$

où $\vec{a}$ est le vecteur accélération de l'objet dans le référentiel d'étude. Ceci dit, on peut trouver des cas de systèmes de masse variables pour lesquels on n'oubliera pas d'écrire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \quad . \quad (3.15)$$

Ce peut être par exemple le cas d'une fusée qui consomme du carburant ou d'une comète qui perd de la masse par évaporation. Mentionnons enfin qu'en Relativité, la relation fondamentale de la dynamique reste valable mais uniquement sous la forme (3.13), et non (3.14), même si la masse est constante. Ceci tient à la définition de la quantité de mouvement en Relativité.

Précisons enfin que le principe d'inertie énoncé plus haut est contenu dans la relation fondamentale de la dynamique. En effet, si un système est isolé ($\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$), nous obtenons immédiatement $\vec{p} = c\vec{v}$, c'est-à-dire un mouvement rectiligne uniforme. Historiquement cependant, le principe d'inertie avait été énoncé avant la relation fondamentale.

⁴et ce sera le cas dans la quasi-totalité de vos applications...

3.4 Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

Soient deux systèmes matériels S_1 et S_2 . Si le système S_1 exerce une influence sur le système S_2 , alors simultanément le système S_2 exercera en retour une action (ou réaction) sur le système S_1 . On dit que les deux systèmes sont en *interaction*. Le principe des actions réciproques, encore appelé principe de l'action et de la réaction, dit que ces deux actions sont opposées. Nous énoncerons donc :

Lorsque deux systèmes matériels sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement, l'action du premier système sur le second est exactement opposée à la réaction de ce dernier sur le premier.

L'action de S_1 sur S_2 peut par exemple prendre la forme d'une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$; symétriquement, l'action de S_2 sur S_1 s'écrira $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Le principe de l'action et de la réaction dit alors

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad . \quad (3.16)$$

Insistons sur le fait que ce principe est véritablement universel et concerne tous les types de forces existantes. Il s'applique depuis l'échelle microscopique jusqu'aux échelles cosmiques.

3.5 Extension aux systèmes de points matériels

Les principes que nous venons de voir s'appliquent en toute rigueur à des points matériels. Nous allons voir qu'il est aisément possible de les étendre à des systèmes composés de plusieurs points matériels individuels.

3.5.1 Centre d'inertie et quantité de mouvement totale

Soit un système composé de n points matériels M_i ($1 \leq i \leq n$), chacun ayant une masse m_i . Le centre d'inertie G du système (encore appelé centre de gravité) est par définition le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i ($1 \leq i \leq n$). Si O est l'origine du repère, nous aurons donc

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad . \quad (3.17)$$

Il peut être commode de noter $M = \sum_{i=1}^n m_i$ la masse totale du système dans la formule précédente.

Supposons maintenant que les n points matériels soient en mouvement dans le référentiel d'étude, animés de vitesses $\vec{v}_i$ ($1 \leq i \leq n$). Chaque point aura donc une quantité de mouvement $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. La *quantité de mouvement totale* du système, que nous noterons $\vec{P}$, sera par définition la somme vectorielle des quantités de mouvement des points qui le composent, soit

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad . \quad (3.18)$$

Il vient donc en explicitant

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = M \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i}{M} \right) = M \vec{V}_G \quad , \quad (3.19)$$

si $\vec{V}_G$ désigne la vitesse du centre d'inertie dans le référentiel d'étude. Nous voyons donc que du point de vue de la quantité de mouvement, le système composé des n points se comporte comme s'il se réduisait à un seul, situé au centre d'inertie, et affecté de la masse totale M . La quantité de mouvement est une grandeur qui se somme sans perdre ses propriétés. Ce n'est pas le cas de la vitesse.

3.5.2 Le théorème du centre d'inertie

Reprenons notre système de n points matériels, et plaçons-nous dans un référentiel galiléen. Pour chaque point i , nous écrivons la relation fondamentale de la dynamique, soit

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad , \quad (3.20)$$

où $\sum \vec{F}_i$ est l'ensemble des forces agissant sur le point i . A ce niveau, nous allons faire la distinction parmi ces forces entre celles qui agissent sur le point i et qui sont effectivement extérieures au système des n points (que nous noterons $\sum \vec{F}_{\text{ext},i}$), et celles qui sont dues aux autres points du système, que nous pouvons en fait décomposer en une somme de forces $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ dues aux $n - 1$ autres points $j \neq i$ ($1 \leq j \leq n$), et agissant sur le point i . Nous écrivons donc

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{j \rightarrow i} \quad . \quad (3.21)$$

Nous effectuons maintenant la somme de toutes ces expressions :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{j \rightarrow i} \quad . \quad (3.22)$$

Le membre de droite de cette équation est constitué de deux sommes distinctes. La première d'entre elles représente la somme de toutes les forces extérieures agissant sur tous les points de notre système. On peut donc la réécrire $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$. La deuxième représente la somme de toutes les forces d'interaction entre les points du système. A ce niveau, nous pouvons faire la remarque capitale suivante : Pour tout couple d'indices (i, j) ($i \neq j$) nous aurons quelque part dans la somme la force $\vec{F}_{j \rightarrow i}$; nous aurons aussi nécessairement la force $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ ailleurs dans la somme. Or, *par le principe des actions réciproques*, ces deux dernières forces sont opposées. Elles s'annulent donc dans la somme. Comme il en va ainsi pour tout couple (i, j) ($i \neq j$), toutes ces forces s'annulent deux à deux et toute la somme est nulle. L'équation (3.22) se réduit donc à

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad , \quad (3.23)$$

c'est-à-dire la relation fondamentale de la dynamique pour le système entier, comme si toute sa masse était concentrée en son centre d'inertie. Nous pouvons donc énoncer le théorème du centre d'inertie :

*Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système matériel est le même que celui d'un point matériel coïncidant avec ce centre d'inertie auquel on aurait affecté la masse totale du système et auquel on appliquerait l'ensemble des forces **extérieures** agissant sur le système.*

Ce résultat est fondamental. C'est lui qui nous permettra de traiter comme des points matériels des systèmes de points, mais également des objets étendus comme des solides⁵. Il nous permet également de simplifier des problèmes relatifs à des systèmes de points matériels si on connaît le mouvement du centre d'inertie. Par exemple, on peut raisonnablement considérer avec une bonne approximation le Système Solaire comme isolé par rapport au reste de l'Univers (nous précisons cela plus loin). Du coup le mouvement du centre de gravité du Système Solaire (Soleil + planètes) est rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Dans ces conditions, il suffit de décrire le mouvement relatif de tous les corps sauf un pour tout connaître. On dit qu'on a réduit le problème.

3.6 Dynamique en référentiel non galiléen. Forces d'inertie

La relation fondamentale de la dynamique s'applique dans un référentiel galiléen⁶. Si le référentiel n'est pas galiléen, nous ne pouvons a priori rien dire. Cependant, un référentiel non galiléen sera toujours en mouvement (translation et/ou rotation) par rapport à un référentiel galiléen. Si ce mouvement est connu, on peut encore appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel d'origine, à condition d'ajouter aux forces des termes dits *forces d'inertie*. C'est ce que nous allons expliciter ici.

Supposons donc que nous cherchions à décrire le mouvement d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen, lui-même en mouvement par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Notre point matériel est soumis à un ensemble de forces. Dans $\mathcal{R}$, nous pouvons appliquer la relation fondamentale de la dynamique, soit :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_{\mathcal{R}} \quad . \quad (3.24)$$

Les accélérations dans $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$ sont reliées par une formule de changement de référentiel comme celles vues au chapitre 2. Supposons pour commencer que le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ soit un mouvement de translation pure. Dans ce cas, les accélérations sont reliées par la formule (2.69). Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m \vec{a}_{\mathcal{R}} = m \vec{a}_e + m \vec{a}_{\mathcal{R}'} \\ \Leftrightarrow \quad \left(\sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) - m \vec{a}_e &= m \vec{a}_{\mathcal{R}'} \quad . \end{aligned} \quad (3.25)$$

La dernière relation obtenue montre que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen, tout se passe comme si on pouvait appliquer la relation fondamentale de la dynamique, à condition d'ajouter aux forces auxquelles notre mobile est soumis le terme $-m \vec{a}_e$, dimensionnellement homogène à une force. Ce terme supplémentaire porte le nom de *force d'inertie*. Dans le cas présent, ce sera une force d'entraînement. Cette force est opposée à l'accélération. Dans la vie courante, c'est cette force qui nous plaque dans notre siège lorsque nous sommes dans un véhicule qui accélère brutalement, ou à l'inverse qui nous précipite vers l'avant lorsque ce dernier freine.

⁵On peut voir un solide comme un ensemble infini de points matériels élémentaires.

⁶Rappelons que le principe des actions réciproques, lui, est vrai dans tout référentiel, galiléen ou non.

Supposons maintenant que le référentiel $\mathcal{R}'$ soit animé d'un mouvement de rotation (avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$) par rapport à $\mathcal{R}$. Dans ce cas, c'est la formule (2.82) qui relie les accélérations. Il vient

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m \vec{a}_{\mathcal{R}} = 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} - m\Omega^2 P\vec{M} + m \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge O\vec{M} + m \vec{a}_{\mathcal{R}'} \\ \iff (\sum \vec{F}_{\text{ext}}) - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'} + m\Omega^2 P\vec{M} - m \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge O\vec{M} &= m \vec{a}_{\mathcal{R}'} \end{aligned} \quad (3.26)$$

où comme au chapitre précédent, P est la projection orthogonale de M sur l'axe instantané de rotation (Fig. 2.9).

Le constat est le même : on peut encore appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}'$ à condition d'adjoindre aux forces déjà connues un certain nombre de forces d'inertie. Le terme $m\Omega^2 P\vec{M} - m (d\vec{\Omega}/dt) \wedge O\vec{M}$ est une force d'entraînement. En particulier, le terme $m\Omega^2 P\vec{M}$ est appelé *force centrifuge*. On peut voir sur la figure 2.9 que c'est une force qui repousse le mobile loin de l'axe de rotation, d'où son nom. Ses effets dans la vie courante sont bien connus, en voiture ou dans un manège par exemple. On l'utilise dans une essoreuse à salade. Plus globalement sur Terre, cette force est présente parce que le référentiel terrestre de notre vie courante n'est pas galiléen : il est en premier lieu en rotation par rapport au référentiel géocentrique. Ce mouvement induit une force centrifuge qui est nulle aux pôles et maximale à l'équateur. Cette force ne dépend que de l'endroit où on se situe sur Terre. Dans la pratique, elle vient se retrancher à la gravité terrestre pour former une *gravité effective* qui du coup est plus forte aux pôles qu'à l'équateur⁷. Cependant la variation reste faible, de l'ordre de 0.5 %. En fait, si la force centrifuge à l'équateur était trop forte (en clair, si la Terre tournait trop vite), la Terre ne serait tout simplement pas stable, ce qui n'est heureusement pas le cas.

Le terme $-m (d\vec{\Omega}/dt) \wedge O\vec{M}$ est un terme d'entraînement additionnel qui n'existe que si le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ n'est pas constant. Le terme $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}$ est différent. Il est logiquement appelé *force de Coriolis*. Il apparaît lorsque le mobile se déplace dans $\mathcal{R}'$. Sur Terre, c'est cette force qui oriente les vents alizés à l'est, ou qui fait tourner les perturbations et cyclônes dans le sens trigonométrique dans l'hémisphère Nord, et dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud. En toute rigueur, cette règle de sens de rotation devrait s'appliquer à tout système fluide tourbillonnant sur Terre, à commencer par une baignoire qui se vide. Cependant, cet effet n'est sensible que si le système en question est de taille significative par rapport à la Terre. Les baignoires courantes sont beaucoup trop petites pour cela !

Dans le cas général du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ (translation et rotation), on voit que les diverses forces d'inertie introduites plus haut s'ajoutent.

3.7 Moment cinétique et rotation

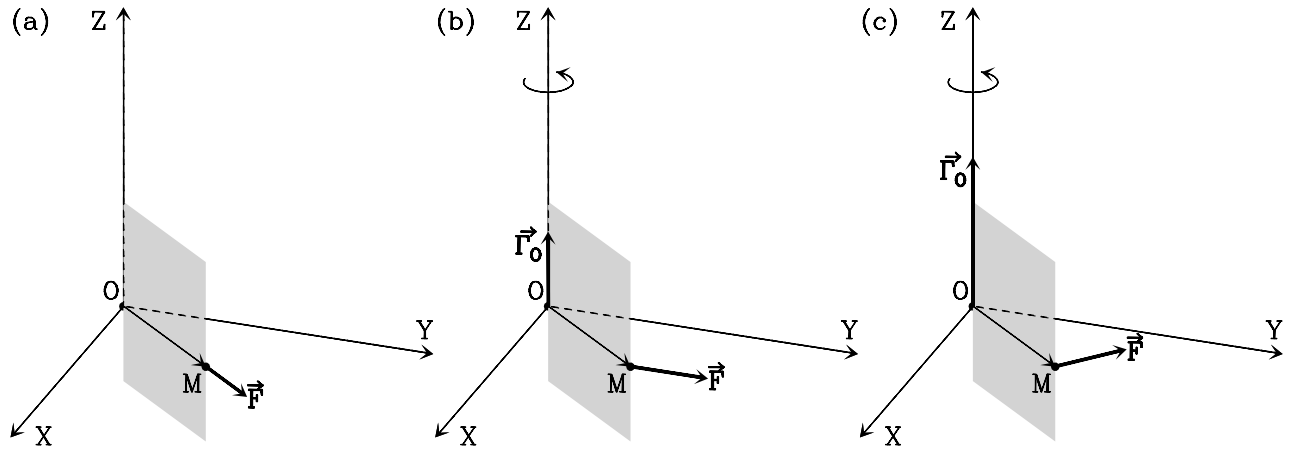
3.7.1 Moment d'une force

Soit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ un point matériel M en mouvement, soumis à une force $\vec{F}$. Si O désigne l'origine du repère utilisé dans $\mathcal{R}$, le *moment de $\vec{F}$ par rapport à O* est par définition le vecteur

$$\boxed{\vec{\Gamma}_O(\vec{F}) = O\vec{M} \wedge \vec{F}} \quad . \quad (3.27)$$

Notons au passage qu'on peut définir de la même manière le moment de $\vec{F}$ par rapport à n'importe quel autre point, mais traditionnellement on s'arrange souvent pour que le point par

⁷A ceci vient s'ajouter le fait que le rayon de la Terre est plus faible aux pôles qu'à l'équateur.

FIG. 3.7: *Moment d'une force et rotation : illustration*

rapport auquel on définit les moments coïncide avec l'origine du repère utilisé. Il est également clair que les moments d'une *même* force par rapport à deux points différents (ou deux choix d'origine différents) seront deux vecteurs différents, d'où la notation $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ qui précise bien le point par rapport auquel on compte le moment. $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ est par construction un vecteur perpendiculaire à $\vec{OM}$ et à $\vec{F}$.

La dimension du moment d'une force par rapport à un point est ML^2T^{-2} . En S.I., on le mesure en $\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$ ou encore en Nm . Il est intéressant de remarquer que cette quantité est dimensionnellement homogène à une énergie (voir chapitre suivant). Néanmoins la comparaison s'arrête là. Une énergie est un scalaire, un moment est un vecteur. Nous voyons ici un exemple de deux quantités qui tout en étant homogènes dimensionnellement, ne traduisent pas du tout la même notion physique.

Physiquement, le moment d'une force par rapport à un point est intimement lié à l'idée de *rotation* du point matériel M par rapport au point O , ou plus exactement à la capacité qu'a la force F à faire tourner M autour de O . En effet, si $\vec{OM}$ est parallèle à $\vec{F}$, $\vec{F}$ ne fera pas « tourner » M autour de O , et $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ sera nul. À l'inverse, l'effet de rotation maximal sera obtenu si $\vec{F} \perp \vec{OM}$, ce qui correspond au cas où $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ est maximal. Ceci est illustré sur la figure (3.7), où l'on schématise (en grisé) une porte pouvant tourner autour de son axe OZ , et à laquelle on applique une force $\vec{F}$ en un point M de sa tranche. Nous nous restreignons volontairement au cas où $\vec{OM}$ et $\vec{F}$ sont contenus dans le plan XOY , mais la généralisation à une force non horizontale est immédiate. Le cas (a) correspond au cas où $\vec{OM}$ et $\vec{F}$ sont parallèles. Dans ce cas $\vec{\Gamma}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ et la force $\vec{F}$ ne fait que tirer sur la porte sans la faire tourner autour de son axe. Dans le cas (b), $\vec{F}$ et $\vec{OM}$ ne sont plus parallèles et la force peut faire tourner la porte; $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ n'est pas nul et est parallèle à OZ . Le cas (c) correspond au cas $\vec{F} \perp \vec{OM}$, et à l'efficacité maximale de l'effet de rotation à $\|\vec{F}\|$ constant; $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ est maximal.

Nous constatons au passage que par construction (produit vectoriel), $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ est parallèle et de même sens que le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la porte. Par ailleurs, le sens commun nous indique qu'il est d'autant plus facile de faire tourner la porte que la force $\vec{F}$ est importante ou de manière équivalente que le point d'application M est choisi loin de l'axe de rotation OZ . Dans tous les cas, ceci correspond à une plus grande intensité du moment $\vec{\Gamma}_O(\vec{F})$. Ce vecteur décrit donc bien la capacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner la porte.

3.7.2 Moment cinétique

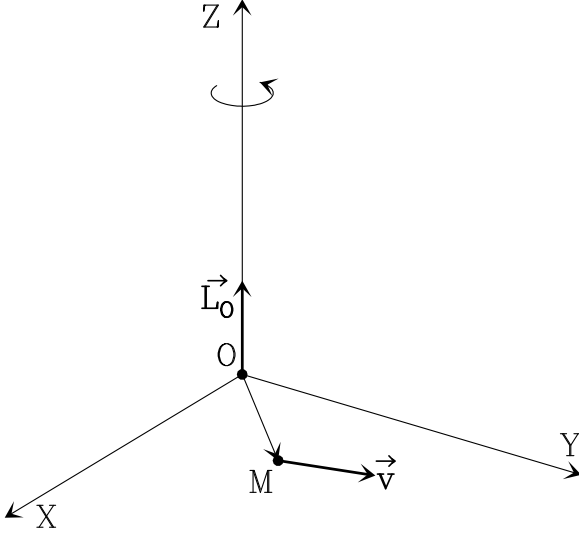


FIG. 3.8: Illustration de la notion du moment cinétique $\vec{L}_O$ d'un point M

Considérons dans un référentiel quelconque $\mathcal{R}$ un point matériel M en mouvement. Ce point animé d'une vitesse $\vec{v}$ possède un vecteur quantité de mouvement $\vec{p} = m \vec{v}$. Si O désigne l'origine du repère utilisé, le *moment cinétique* de M sera par définition le vecteur

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m \vec{OM} \wedge \vec{v}} \quad . \quad (3.28)$$

Clairement il s'agit d'un vecteur perpendiculaire à $\vec{OM}$ et à $\vec{v}$, et donc à la trajectoire du point M (Fig. 3.8). Il dépend du choix de l'origine O du repère utilisé dans le référentiel $\mathcal{R}$. La dimension du moment cinétique est ML^2T^{-1} . En S.I., on le mesure en $\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$. Comme pour le moment d'une force, on se rendra compte aisément que ce vecteur est lié à l'idée de *rotation* autour du point O : par exemple, si $\vec{v}$ est parallèle à $\vec{OM}$, $\vec{L}_O = \vec{0}$

et le point M ne « tourne » pas autour de O , il ne fait que s'en approcher ou s'en éloigner.

Examinons maintenant le cas particulier où le mobile M est en rotation autour d'un axe fixe. Dans ce cas, quitte à changer de repère, on peut supposer que l'axe de rotation correspond à l'axe OZ et que le mobile M tourne dans le plan XOY . Dans ce cas, la vitesse peut se définir à l'aide d'un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$, soit :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \quad . \quad (3.29)$$

Calculons maintenant le moment cinétique de M :

$$\vec{L}_O = m \vec{OM} \wedge \vec{v} = m \vec{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = m (\vec{OM} \cdot \vec{OM}) \vec{\Omega} - \underbrace{m (\vec{OM} \cdot \vec{\Omega})}_{=0} \vec{OM} = mr^2 \vec{\Omega} \quad , \quad (3.30)$$

où on a noté $r = ||\vec{OM}||$. Nous voyons donc que le moment cinétique est parallèle à l'axe de rotation (voir Fig. 3.8), et ceci est un résultat général. Le coefficient de proportionnalité $I = mr^2$ entre $\vec{L}_O$ et $\vec{\Omega}$ porte le nom de *moment d'inertie* de M par rapport à l'axe de rotation.

3.7.3 Le théorème du moment cinétique pour un point matériel

Ce théorème décrit la dérivée temporelle du vecteur moment cinétique dans un référentiel galiléen. Soit donc un point matériel M en mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Nous écrivons :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{m \vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0} + \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad . \quad (3.31)$$

A ce niveau nous utilisons la Relation Fondamentale de la Dynamique, soit $d\vec{p}/dt = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$. Il vient donc

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{\text{ext}} = \sum \vec{\Gamma}_O (\vec{F}_{\text{ext}})} \quad . \quad (3.32)$$

Ce résultat constitue le *théorème du moment cinétique* qui s'énonce ainsi :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point fixe O est égale à la somme (vectorielle) des moments par rapport au même point O des forces extérieures agissant sur M .

Nous avons vu que le moment cinétique est la quantité décrivant la rotation du mobile autour du point O . On peut voir dans cette formule un équivalent de la Relation Fondamentale pour la rotation. Insistons cependant sur le fait que ceci n'est pas un principe, mais un théorème, démontré à partir de la Relation Fondamentale elle-même. En fait lorsqu'on étudie le mouvement d'un simple point matériel, écrire le théorème du moment cinétique revient souvent plus ou moins à la même chose qu'écrire la Relation Fondamentale. L'intérêt de ce théorème apparaît cependant lorsqu'on se trouve dans la situation où la somme des moments des forces par rapport à un point donné (qu'on peut supposer confondu avec le point O) est nulle. Dans ce cas, le théorème du moment cinétique se réduit à $d\vec{L}_O/dt = \vec{0}$, ce qui s'intègre immédiatement en $\vec{L}_O = \text{cte}$. Le vecteur moment cinétique est donc constant. Une telle relation toute intégrée entre les variables (position, vitesse) définissant le mouvement s'appelle une *intégrale première*. Le moment cinétique est un exemple d'intégrale première lorsqu'il est constant. Nous verrons un autre exemple d'intégrale première avec l'énergie, et une application concrète de ceci dans les mouvements à forces centrales.

Les intégrales premières sont extrêmement utiles surtout lorsque qu'on ne connaît pas la solution complète du problème posé. Elles permettent en théorie de réduire la dimension de l'espace des paramètres du problèmes, et lorsque cela n'est pas le cas, on peut souvent les utiliser pour définir des régions de mouvement permis ou interdit.

3.7.4 Le théorème du moment cinétique pour un système de points

Nous reprenons notre système de n points matériels pour lequel nous avons montré le théorème du centre d'inertie. Rappelons que ce théorème est l'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique pour un ensemble de points. Nous allons chercher ici à en faire autant avec le théorème du moment cinétique.

Chaque point de notre système possède un moment cinétique $\vec{L}_{i,O}$. Nous définissons pour commencer le *moment cinétique total*

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{i,O} = \sum_{i=1}^n O\vec{M}_i \wedge \vec{p}_i \quad . \quad (3.33)$$

Dérivons ensuite par rapport au temps.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_{i,O}}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum \vec{\Gamma}_O(\vec{F}_i) \quad , \quad (3.34)$$

où comme précédemment $\sum \vec{F}_i$ est l'ensemble des forces qui agissent sur le point i . Ensuite, comme dans le cas du théorème du centre d'inertie, nous allons faire la distinction pour chaque point i entre les forces extérieures au système $\vec{F}_{\text{ext},i}$ qui agissent sur lui, et les forces internes $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ dues aux $n - 1$ autres points j du système. Nous écrivons donc (comme pour l'équation (3.22))

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum \vec{\Gamma}_O(\vec{F}_{\text{ext},i}) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n O\vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} \quad . \quad (3.35)$$

Nous faisons ici la même remarque que plus haut pour le théorème du centre d'inertie : Pour tout couple d'indices (i, j) ($i \neq j$) nous aurons quelque part dans la somme le moment $O\vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}$,

et nous aurons aussi le terme $O\vec{M}_j \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}$. Comme nous avons $\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$, nous pouvons écrire

$$O\vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + O\vec{M}_j \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = (O\vec{M}_i - O\vec{M}_j) \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = M_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} \quad , \quad (3.36)$$

de telle sorte que nous pouvons réécrire la somme totale sous la forme ⁸

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_O (\vec{F}_{\text{ext}}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n M_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} \quad . \quad (3.37)$$

Nous voyons que contrairement au cas du théorème du centre d'inertie, il reste ici une somme contenant les forces intérieures au système qui n'est a priori pas nulle. Examinons cependant la forme de ce terme. La force $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ est la force d'interaction entre le point i et le point j . Dans la quasi totalité des cas usuels, cette force est dirigée selon la direction joignant les deux points, que ce soit une force de répulsion ou d'attraction. C'est en tout cas le cas des interactions fondamentales telles que la gravitation, la force électrostatique, etc. . . mais aussi de toutes les forces de pression. Une force $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ non dirigée selon la direction joignant les deux points (nous dirons une force non radiale) traduit en fait un phénomène de *cisaillement* entre les deux points. Ceci ne peut se faire que dans le cas de *plusieurs solides* en interaction (ce qui rentre encore dans le cadre de ce formalisme), et encore pas souvent. Ces cas sont suffisamment particuliers pour qu'on puisse les considérer comme rares.

Si donc nous faisons l'hypothèse, somme toute assez peu réductrice, que les efforts internes entre les divers points du système sont *radiaux*, dans ce cas tous les termes $M_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}$ sont nuls et il vient

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_O (\vec{F}_{\text{ext}}) \quad , \quad (3.38)$$

ce qui constitue le théorème du moment cinétique pour notre système de points. Nous pouvons donc énoncer :

*Dans un référentiel galiléen, et dans le cas où les efforts internes sont radiaux, la dérivée temporelle du moment cinétique de l'ensemble est égale à la somme (vectorielle) des moments par rapport à l'origine des seules forces **extérieures** agissant sur les divers points.*

3.7.5 Le premier théorème de Koenig

Nous reprenons notre système de n points dans un référentiel donné $\mathcal{R}$ (galiléen ou non). Nous allons essayer d'explicitier plus clairement le moment cinétique de l'ensemble du système. Pour cela, nous introduisons la notion de *référentiel barycentrique* : Le référentiel barycentrique est un référentiel en translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, mais dont l'origine est à tout instant confondue avec le centre d'inertie G de notre système de points. Il s'agit donc d'un référentiel lié au centre d'inertie du système mais dont les axes restent parallèles aux axes du référentiel d'origine. Il est clairement en translation à la vitesse $\vec{V}_G$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. La notion de référentiel barycentrique nous sera utile plus loin dans le cas des systèmes à deux corps.

Pour tout point i du système, nous désignerons par $\vec{v}_i$ son vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$ et $\vec{v}'_i$ son vecteur vitesse dans le référentiel barycentrique. Les deux référentiels étant en translation, la formule de composition des vitesses (2.68) s'applique, soit

$$\vec{v}_i = \vec{V}_G + \vec{v}'_i \quad . \quad (3.39)$$

⁸On ne fait que réordonner les couples d'indices. C'est là une manœuvre très classique.

Par construction, nous avons

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_G \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \quad . \quad (3.40)$$

Cette dernière relation ne fait que traduire le fait que dans le référentiel barycentrique, la vitesse du centre d'inertie est nulle... Calculons maintenant le moment cinétique de l'ensemble *dans* $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i \wedge \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i \wedge \vec{V}_G + \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i \wedge \vec{v}'_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i \right) \wedge \vec{V}_G + \sum_{i=1}^n m_i \vec{OG} \wedge \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n m_i \vec{GM}_i \wedge \vec{v}'_i \\ &= M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G + \underbrace{\vec{OG} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i}_{=\vec{0}} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{GM}_i \wedge \vec{v}'_i \end{aligned} \quad (3.41)$$

Or le dernier terme n'est autre que le moment cinétique $\vec{L}'_G$ de l'ensemble *compté dans le référentiel barycentrique*. Il vient donc en définitive :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}'_G + M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G} \quad . \quad (3.42)$$

Ce résultat constitue le *premier théorème de Koenig* qui peut s'énoncer ainsi :

Dans un référentiel quelconque, le moment cinétique d'un ensemble de points est égal au moment cinétique compté dans le référentiel barycentrique augmenté du moment cinétique de toute la masse concentrée au centre de gravité du système.

3.7.6 Applications simples

Effectuons maintenant quelques petites applications de ce formalisme. Prenons pour ensemble de points le Système Solaire, constitué du Soleil, des planètes, des astéroïdes, etc... Les interactions entre ces objets sont de type gravitationnel. Elles sont radiales, le théorème du moment cinétique s'applique donc. Si nous considérons le Système Solaire comme isolé, alors le théorème du centre d'inertie nous montre que son centre de gravité sera animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}_G$. Le théorème du moment cinétique nous dit aussi que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de l'ensemble est également constant. Par intégration immédiate, nous avons

$$\vec{OG} = \vec{OG}_0 + t \vec{V}_G \quad \Longrightarrow \quad \vec{OG} \wedge \vec{V}_G = \vec{OG}_0 \wedge \vec{V}_G + t \vec{V}_G \wedge \vec{V}_G = \vec{OG}_0 \wedge \vec{V}_G \quad , \quad (3.43)$$

$\vec{OG}_0$ désignant le vecteur position du centre d'inertie à $t = 0$. Ce dernier calcul montre que le vecteur $M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G$ est constant. Nous en déduisons par application du premier théorème de Koenig que le moment cinétique dans le repère barycentrique⁹ $\vec{L}'_G$ est constant. On aurait pu obtenir le même résultat en remarquant que le référentiel barycentrique était dans ce cas lui-même galiléen et y appliquer directement le théorème du moment cinétique.

En fait le Système Solaire n'est pas isolé dans l'espace. Il tourne autour du centre de notre Galaxie en 250 millions d'années environ, et est donc soumis au champ gravitationnel de la

⁹encore appelé moment cinétique *propre*

Galaxie. Cette dernière est beaucoup plus grande que les dimensions propres du Système Solaire, de telle sorte qu'on peut considérer que chaque objet du Système Solaire « voit » le même champ gravitationnel $\vec{g}$, et est donc soumis à une force *extérieure* $m_i \vec{g}$. Appliquons le théorème du centre d'inertie. Il vient

$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} = M \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{g} \quad . \quad (3.44)$$

Le centre d'inertie du Système Solaire se comporte donc bien comme un point matériel dans le champ gravitationnel galactique. Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \Gamma_O(\vec{F}_{\text{ext}}) = \sum_{i=1}^n m_i O\vec{M}_i \wedge \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^n m_i O\vec{M}_i \right) \wedge \vec{g} = M O\vec{G} \wedge \vec{g} \quad . \quad (3.45)$$

Ecrivons maintenant le premier théorème de Koenig et dérivons par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}'_G + M O\vec{G} \wedge \vec{V}_G \\ \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d\vec{L}'_G}{dt} + M \frac{dO\vec{G}}{dt} \wedge \vec{V}_G + M O\vec{G} \wedge \frac{d\vec{V}_G}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}'_G}{dt} + M \vec{V}_G \wedge \vec{V}_G + M O\vec{G} \wedge \vec{g} = \frac{d\vec{L}'_G}{dt} + M O\vec{G} \wedge \vec{g} \end{aligned} \quad (3.46)$$

En égalisant les deux dernières expressions trouvées, nous en déduisons que

$$\frac{d\vec{L}'_G}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}'_G = \text{cte} \quad . \quad (3.47)$$

Nous arrivons donc au même résultat qu'auparavant : le moment cinétique propre du Système Solaire est constant. Il n'est donc pas affecté par le mouvement dans la Galaxie. En clair, les planètes tournent librement autour du Soleil. Nous aurions pu obtenir le même résultat en raisonnant dans le référentiel barycentrique, mais cela aurait été plus compliqué, car ce dernier n'est pas galiléen. Il aurait donc fallu introduire des forces d'inertie.

Ce même raisonnement est à rapprocher d'une situation physique plus parlante à l'esprit : considérons un objet solide lancé dans le champ gravitationnel terrestre constant. Nous pouvons considérer un solide comme un ensemble (infini) de points matériels avec des forces intérieures qui maintiennent la cohésion de l'ensemble, mais qui restent radiales. Le théorème du moment cinétique s'applique donc. Le raisonnement est le même que pour le Système Solaire, et nous obtenons le double résultat suivant : le centre d'inertie du solide se meut comme un point matériel et le moment cinétique propre du solide est constant. Ceci est conforme à l'intuition. Lorsque nous lançons un objet (ballon...) dans l'air, il effectue un mouvement balistique comme un point matériel, tandis que sa rotation propre reste libre¹⁰.

Prenons maintenant un exemple très classique d'illustration du théorème du moment cinétique. Considérons un patineur qui tourne sur lui-même sur la glace. Dans la mesure où nous pouvons négliger les frottements (glace), le moment des forces par rapport au centre d'inertie du patineur sera nul (forces verticales). Le moment cinétique du patineur est donc constant. Nous savons bien que lorsque le patineur ramène ses bras sur son corps, sa vitesse de rotation sur lui-même augmente. Pourquoi ? Ceci découle directement de la conservation du moment cinétique. Nous avons vu que dans le cas d'un mouvement de rotation, le moment cinétique d'un point matériel est de la forme $mr^2 \vec{\Omega}$. Dans le cas d'un système de plusieurs points, on se

¹⁰du moins tant que nous négligeons les frottements avec l'air

convaincra aisément que le moment cinétique est toujours de la forme $I \vec{\Omega}$ avec $I = \sum m_i r_i^2$ qui est le moment d'inertie du système par rapport à son axe de rotation¹¹. Dans le cas d'un système étendu comme un solide ou un patineur, la somme est virtuellement remplacée par une intégrale sur le corps du patineur ; conceptuellement c'est exactement la même chose. En ramenant ses bras le long de son corps, le patineur diminue les « r_i^2 » sur une portion non négligeable de sa masse. Il diminue donc son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation. Or le moment cinétique doit rester constant. Ce ne peut se faire que si la vitesse de rotation $||\vec{\Omega}||$ augmente.

Repartons dans l'Espace et considérons la Terre elle-même comme solide soumis au champ de gravité du Soleil. Nous obtenons par le même raisonnement que le centre de la Terre se déplace autour du Soleil comme si il était un point matériel, mais que la rotation propre de la Terre n'en est pas affectée. En d'autres termes, la durée du jour reste constante, ce que nous constatons bien. En fait, ce raisonnement trouve ses limites dans le fait qu'en tout point de la Terre, le champ gravitationnel du Soleil n'est pas *rigoureusement le même* du fait de la taille non nulle de la Terre par rapport à son orbite. Il en résulte un léger *couplage* entre mouvement orbital et rotation propre que nous ne détaillerons pas plus, mais qui est connu en physique sous le nom d'*effet de marée* solaire. La situation réelle est elle-même un peu plus compliquée car à cet effet de marée solaire s'ajoute celui, bien connu, dû à la Lune.

Similairement, il existe également un effet de marée galactique sur le Système Solaire lui-même, à cause de sa taille non ponctuelle. En fait, dans ce cas, les dimensions de la Galaxie sont vraiment beaucoup plus grandes que celles du Système Solaire, avec un rapport beaucoup plus élevé que dans le cas de l'orbite terrestre. L'approximation que nous avons faite est largement justifiée dans ce cas. Si le Système Solaire était plus grand, cela ne le serait plus. Ainsi, deux galaxies voisines génèreront l'une sur l'autre les effets de marée non négligeables bien connus des astronomes. Mais ceci est une autre histoire. . .

¹¹En fait, cette formule n'est valable que si certaines conditions de symétrie sont vérifiées, ce qui est le cas pour le patineur

Chapitre 4

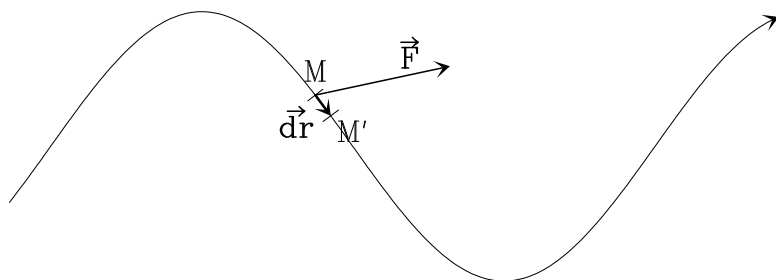
Travail et énergie

Ce chapitre est consacré à l'introduction de nouvelles grandeurs caractérisant le mouvement de tout système matériel. Il s'agit du travail d'une force, de sa puissance, ainsi que de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique d'un solide. Toutes ces grandeurs sont *scalaires*, donc plus simples à manipuler que les grandeurs vectorielles vues au chapitre précédent. Dans des situations simples (c'est-à-dire pas toujours) l'étude de ces grandeurs scalaires permet d'éviter le passage par la relation fondamentale de la dynamique.

4.1 Travail d'une force

Le travail est une forme particulière d'échange d'énergie entre deux systèmes ou deux parties d'un même système. C'est une des formes mécaniques de l'énergie, mais ce n'est pas la seule ; la chaleur est par exemple une autre forme d'énergie que nous ne considérerons pas ici.

4.1.1 Travail élémentaire d'une force



Considérons un point matériel en mouvement le long d'une trajectoire sous l'effet d'une force $\vec{F}$. Lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long de son mouvement (Fig. 4.1), le travail élémentaire associé à ce déplacement infinitésimal est par définition

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad (4.1)$$

FIG. 4.1: Illustration de la notion de travail élémentaire d'une force

Le travail est associé à la force $\vec{F}$.

En présence de plusieurs forces, il y aura un travail associé à chacune d'entre elles.

4.1.2 Travail d'une force le long d'un trajet. Puissance

Lors d'un déplacement macroscopique du mobile d'un point A à un autre point B le long de sa trajectoire, le travail d'une force $\vec{F}$ sera par définition la somme des travaux élémentaires associés à chaque instant. Nous écrirons donc

$$\boxed{W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt} \quad , \quad (4.2)$$

où dans la dernière expression on a utilisé la définition du vecteur vitesse instantanée $\vec{v} = d\vec{r}/dt$; t_A et t_B sont les instants de passage aux points A et B respectivement. Précisons que dans cette expression, la force $\vec{F}$ n'a aucune raison d'être constante. En toute rigueur nous devrions écrire $\vec{F}(t)$. La quantité $\vec{F} \cdot \vec{v}$ qui apparaît dans la dernière expression est appelée *puissance instantanée* de la force $\vec{F}$, notée $\mathcal{P}$. Nous avons donc

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt}} \quad \text{ou} \quad \boxed{W_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t) dt} \quad . \quad (4.3)$$

Le travail d'une force est une *énergie*. A partir de la formule (4.1), on voit que la dimension de cette quantité est ML^2T^{-2} . En S.I., l'unité officielle d'énergie est le *Joule* (J). Nous avons donc

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad . \quad (4.4)$$

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, le moment d'une force par rapport à un point est dimensionnellement équivalent, mais il s'agit de quantité ayant un contenu physique différent.

La dimension de la grandeur puissance est ML^2T^{-3} . L'unité S.I. est le *Watt* (W). Nous avons donc

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \quad . \quad (4.5)$$

Il existe bien d'autres unités d'énergie que le Joule. Citons entre autres l'*électron-volt* ($1 \text{ eV} = 1.6021773349 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) et le *Watt-heure* ($1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J}$).

4.1.3 Travail moteur et résistant

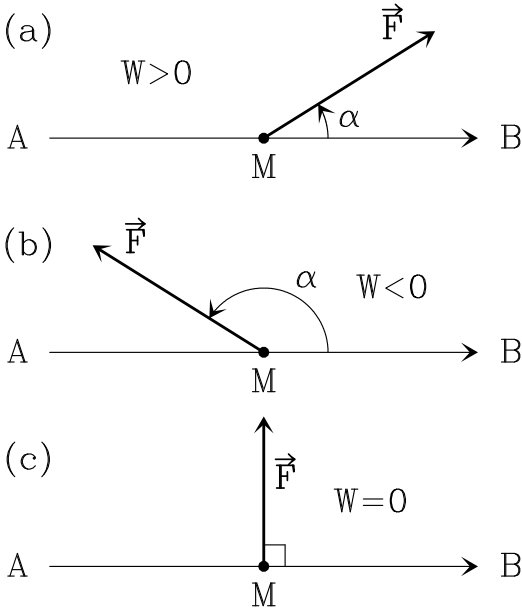


FIG. 4.2: Travail moteur (a), résistant (b), et nul (c) : Illustration.

Le travail d'une force le long d'un trajet est une intégrale qui n'est pas forcément calculable aisément dans tous les cas. Il existe au moins un cas très simple où ce calcul est possible, celui d'une force *constante* au cours d'un déplacement *rectiligne* (Fig. 4.2)¹ Dans ce cas, il vient

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{AB} \quad . \quad (4.6)$$

Soit α l'angle entre les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{F}$. Nous avons clairement $W_{A \rightarrow B} = ||\vec{F}|| ||\vec{AB}|| \cos \alpha$. Si $\alpha < \pi/2$, alors $W_{A \rightarrow B} > 0$ (Fig. 4.2a). Le travail est dit *moteur*, car la force $\vec{F}$ participe au mouvement. Si $\alpha > \pi/2$, $W_{A \rightarrow B} < 0$ (Fig. 4.2b). Le travail est dit *résistant*, car la force $\vec{F}$ s'oppose au mouvement. Enfin, si $\alpha = \pi/2$ (Fig. 4.2c), clairement $W = 0$. Le force ne travaille pas. Ce sera par exemple le cas de la réaction d'un plan horizontal, lors d'un déplacement d'un objet en l'absence de frottements. Ces définitions s'étendent à tout type de mouvement et de force : un travail positif sera moteur, un travail négatif sera résistant.

Ceci dit, dans le cas général, la nature du travail d'une force peut changer au cours du mouvement, même si la force est constante. Prenons juste l'exemple d'un projectile qu'on lance

¹Le résultat qui suit reste d'ailleurs vrai même si le déplacement n'est pas rectiligne.

en l'air. Cet objet est soumis à son poids $\vec{P}$. Tant que l'objet monte, le travail de $\vec{P}$ est résistant ; il devient moteur à la redescente. De nombreuses forces peuvent fournir un travail moteur ou résistant suivant la situation. C'est en particulier par construction le cas de toutes les forces qui dérivent d'une énergie potentielle (voir plus loin dans le chapitre). A l'inverse, il existe certains type de forces qui ne peuvent fournir de travail que d'un seul type. Ainsi, les forces de frottement fourniront *toujours* un travail résistant.

4.1.4 Exemples de travaux de forces

Travail du poids

Plaçons nous dans le référentiel terrestre, dans un repère cartésien $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où les axes OX et OY sont horizontaux et où l'axe OZ est vertical et pointe vers le haut. Considérons un mobile de masse m . Il est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur terrestre. Dans notre repère, nous avons $\vec{P} = -mg\vec{k}$.

Nous supposons ici le champ $\vec{g}$ uniforme, ce qui est une approximation très raisonnable pour des mouvements de faible ampleur à la surface de la Terre, comme nous le verrons au chapitre 6². Considérons maintenant un déplacement élémentaire du mobile $d\vec{r}$ de coordonnées cartésiennes (dx, dy, dz) . Le travail élémentaire du poids $\vec{P}$ lors de ce déplacement élémentaire est

$$dW = \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg dz \quad . \quad (4.7)$$

Lors d'un déplacement macroscopique d'un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) vers un point B de coordonnées (x_B, y_B, z_B) , le travail total vaut

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_{z_A}^{z_B} -mg dz = mg(z_A - z_B) \quad , \quad (4.8)$$

puisque $\vec{g}$ a été supposé uniforme. On obtient une expression explicite, et au passage on retrouve bien que le travail du poids est moteur si l'objet descend et résistant s'il monte.

Travail d'une force élastique

Prenons maintenant l'exemple d'une masse attachée au bout d'un ressort et pouvant se mouvoir le long d'un axe OX . Elle est soumise de la part du ressort à la force élastique de tension (3.9) $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$, où l est la longueur du ressort, l_0 sa longueur à vide, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dans la direction de l'allongement. Nous choisissons pour simplifier l'axe OX de notre repère dans la direction de l'allongement, de telle sorte que $\vec{u} = \vec{i}$. Nous fixons l'origine $x = 0$ comme correspondant à la position de la masse lorsque le ressort est au repos, à $l = l_0$. Nous avons donc $\vec{F} = -kx\vec{i}$. Le travail élémentaire lors d'un déplacement dx le long de l'axe s'en déduit :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx dx \quad (4.9)$$

On en tire le travail global lors du déplacement d'un point A d'abscisse x_A vers un point B d'abscisse x_B :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) \quad . \quad (4.10)$$

On obtient encore une expression explicite du travail de la force exercée par le ressort, qui peut là aussi être positive ou négative suivant les points de départ et d'arrivée.

²En toute rigueur, $\vec{g}$ varie en direction et en norme suivant le point considéré, mais ces variations sont très faibles à l'échelle humaine.

Travail de la force magnétique

Nous avons vu qu'une particule de charge q en mouvement dans un champ magnétique $\vec{B}$ subissait une force magnétique (3.2) $\vec{F}_{\text{magn}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$. Calculons le travail élémentaire associé à cette force lors d'un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$:

$$dW = \vec{F}_{\text{magn}} \cdot d\vec{r} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad , \quad (4.11)$$

puisque $\vec{F}_{\text{magn}}$ est par construction toujours perpendiculaire au vecteur vitesse. Par intégration immédiate, on en déduit que le travail associé à tout déplacement macroscopique sera aussi nul. En d'autres termes, *la force magnétique n'effectue jamais aucun travail* !

Travail d'une force de frottement visqueux

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un objet se déplaçant dans un fluide subissait de sa part une force de frottement visqueux, et que pour des vitesses faibles, nous avons $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et α un coefficient positif. Le travail élémentaire associé à cette force vaut :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\alpha \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\alpha v^2 dt \quad . \quad (4.12)$$

Nous constatons que nous ne pouvons pas effectuer le calcul d'intégration plus loin, car il reste ici l'expression de la vitesse qui nous est inconnue dans le cas général. Écrivons quand même le travail associé à un déplacement macroscopique :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_{t_A}^{t_B} -\alpha v(t)^2 dt = -\alpha \int_{t_A}^{t_B} v(t)^2 dt \quad . \quad (4.13)$$

Nous ne pouvons pas effectuer le calcul plus loin³, mais la remarque capitale ici est que compte tenu de la prescription de signe sur α , *nous avons forcément $W < 0$* . Cette force, comme toutes les forces de frottement, effectue *toujours un travail résistant*, quel que soit le déplacement.

4.2 Énergie cinétique

4.2.1 Définition

Considérons un point matériel de masse m en mouvement dans un référentiel donné. Soit $\vec{v}$ son vecteur vitesse. Son *énergie cinétique* est par définition le scalaire

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2} \quad , \quad (4.14)$$

où l'on a noté comme à l'accoutumée $v = ||\vec{v}||$. On vérifie aisément que cette quantité a bien la dimension d'une énergie telle que nous l'avons définie plus haut. On peut aussi écrire l'énergie cinétique sous la forme

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad (4.15)$$

où p est la quantité de mouvement.

Signalons ici que l'expression (4.14) de l'énergie cinétique n'est plus valable dans le cas relativiste, c'est-à-dire lorsque les vitesses deviennent comparables à la vitesse c de la lumière.

³à moins de préciser complètement les données du problème...

On montre en fait que l'expression (4.14) constitue un développement limité au premier ordre⁴ de la formule relativiste lorsque $v \ll c$.

On pourrait se poser la question du sens du facteur $1/2$ apparaissant dans (4.14). Il s'explique naturellement par le théorème qui suit.

4.2.2 Le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

Considérons un point matériel en mouvement dans un référentiel inertiel, soumis à un ensemble de forces $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$. La relation fondamentale de la dynamique nous dit

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad , \quad (4.16)$$

avec les notations habituelles. Considérons maintenant un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ et calculons dW^T , la somme des travaux élémentaires de toutes les forces agissant sur notre point matériel :

$$\begin{aligned} dW^T = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} &= \left(\sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \frac{d(\vec{v}^2)}{dt} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \frac{dE_c}{dt} dt \quad . \quad (4.17) \end{aligned}$$

Intégrons maintenant cette relation pour exprimer le travail total W^T lors d'un déplacement macroscopique du point A au point B :

$$W_{A \rightarrow B}^T = \int_A^B dW^T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_c}{dt} dt = [E_c]_{t_A}^{t_B} = E_{c,B} - E_{c,A} \quad , \quad (4.18)$$

$E_{c,A}$ et $E_{c,B}$ étant l'énergie cinétique de la particule aux points A et B respectivement. En résumé donc

$$\boxed{W_{A \rightarrow B}^T = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_{c,B} - E_{c,A}} \quad . \quad (4.19)$$

Ce résultat constitue le *théorème de l'énergie cinétique* que nous pouvons énoncer ainsi :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures agissant sur le point le long de ce trajet.

Ce théorème⁵ suffit dans bien des cas à lui tout seul pour résoudre un problème, sans avoir à écrire la relation fondamentale de la dynamique. En fait, lorsque le problème est *monodimensionnel*, c'est-à-dire que le mouvement de la particule peut se décrire à l'aide d'une seule variable spatiale (longueur, angle, peu importe...), écrire le théorème de l'énergie cinétique équivaut à écrire la relation fondamentale de la dynamique, mais en évitant la formulation vectorielle. On ne manipule que des grandeurs scalaires, ce qui simplifie grandement le problème. Il est donc très avantageux de passer par le théorème de l'énergie cinétique quand c'est possible.

Néanmoins, dès que le mouvement de la particule se décrit à l'aide de plusieurs variables d'espace (quand par exemple il y a une *trajectoire* dans l'espace à déterminer), alors le théorème de l'énergie cinétique ne suffit plus. Il faut passer par la relation fondamentale de la dynamique. En fait, dans la pratique on arrive quand même à s'en passer et à tout exprimer à partir de l'énergie cinétique. Mais ceci nécessite d'utiliser la théorie du *Lagrangien* qui sort du cadre de ce cours...

⁴La formule relativiste montre que l'énergie cinétique devient infinie lorsque v s'approche de c , ce que la formule (4.14) ne montre pas.

⁵et plus encore sa variante que nous verrons plus loin sous le nom de théorème de l'énergie mécanique

4.2.3 Le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de points

Nous reprenons notre système de n points matériels qui nous a déjà servi pour le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique. Nous allons chercher maintenant à y appliquer le théorème de l'énergie cinétique. Chaque point de notre système possède sa propre énergie cinétique $E_{c,i}$. L'énergie cinétique totale E_c est bien sûr la somme de toutes ces énergies :

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{c,i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad . \quad (4.20)$$

Calculons maintenant la dérivée temporelle de cette quantité :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dE_{c,i}}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_i) \quad , \quad (4.21)$$

où chaque point est soumis à un ensemble de forces $\sum \vec{F}_i$ et où on a appliqué le théorème de l'énergie cinétique à chacun d'entre eux. Comme précédemment, nous allons séparer pour chaque point i les forces extérieures au système $\vec{F}_{\text{ext},i}$ qui agissent sur lui, et les forces $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ dues aux autres points du système. Il vient donc

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{ext},i}) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{j \rightarrow i}) = \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{ext}}) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i \quad . \quad (4.22)$$

Comme précédemment pour le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique, nous groupons dans la deuxième somme les termes symétriques en tenant compte de $\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$. Il vient

$$\vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}_j = \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad (4.23)$$

En reportant dans la somme, nous obtenons

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{ext}}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad . \quad (4.24)$$

Nous constatons ici que la deuxième somme ne s'annule pas. Dans le cas du théorème du moment cinétique, la deuxième somme s'annule dans la quasi totalité des cas. Ici ce n'est pas ce cas. $\vec{v}_i - \vec{v}_j$ est la vitesse relative entre les deux points i et j . Elle n'a aucune raison d'être perpendiculaire à $\vec{F}_{j \rightarrow i}$, même si $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ est parallèle à $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ (efforts radiaux). Par conséquent le travail des efforts internes ne s'annule pas. Si nous intégrons l'équation (4.24) sur un trajet macroscopique, nous obtenons le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de points, qui peut s'énoncer ainsi :

*Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un ensemble de points lors d'un déplacement est égale à la somme des travaux des forces **extérieures** et **intérieures** au système de points.*

Cherchons à quel condition le travail des efforts internes peut s'annuler. Commençons par supposer que les forces $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ sont radiales, donc proportionnelles à $\vec{r}_i - \vec{r}_j$. Les termes $\vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$ seront nuls si $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = 0$. Or nous avons

$$\frac{d}{dt} (||\vec{r}_i - \vec{r}_j||^2) = 2 (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad . \quad (4.25)$$

Par conséquent, le travail des efforts internes sera nul si les toutes distances relatives $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ sont constantes. En clair, ceci signifie que notre système de points est un *solide* en mouvement. Dans ce cas donc, les efforts internes ne contribuent pas à l'énergie cinétique globale. Ce cas particulier, même s'il est important, est loin de concerner tous les cas possibles. Le Système Solaire par exemple, pris comme ensemble de points, ne rentre pas dans ce cas. Les distances mutuelles entre les planètes varient !

4.2.4 Le second théorème de Koenig

Nous reprenons notre système de n points dans un référentiel donné $\mathcal{R}$ (galiléen ou non). Nous allons maintenant essayer de décomposer l'énergie cinétique comme nous l'avons fait avec le moment cinétique. Nous reprenons le référentiel barycentrique et les notations que nous avons introduites pour le premier théorème de Koenig : $\vec{V}_G$ est la vitesse du centre d'inertie dans $\mathcal{R}$, $\vec{v}_i$ le vecteur vitesse du point i dans $\mathcal{R}$, $\vec{v}'_i$ son vecteur vitesse dans le référentiel barycentrique. Rappelons que nous avons

$$\vec{v}_i = \vec{V}_G + \vec{v}'_i \quad . \quad (4.26)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \quad . \quad (4.27)$$

L'énergie cinétique globale s'écrit

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_G + \vec{v}'_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i V_G^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_G \cdot \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) V_G^2 + \vec{V}_G \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i}_{=\vec{0}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} M V_G^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad , \end{aligned} \quad (4.28)$$

ce qui peut se résumer par

$$\boxed{E_c = E'_c + \frac{1}{2} M V_G^2} \quad , \quad (4.29)$$

où E'_c est l'énergie cinétique *dans le référentiel barycentrique*. Ce résultat constitue le *second théorème de Koenig* que nous énoncerons ainsi :

Dans un référentiel quelconque, l'énergie cinétique d'un ensemble de points est égale à l'énergie cinétique comptée dans le référentiel barycentrique augmentée de l'énergie cinétique de toute la masse concentrée au centre de gravité du système.

4.2.5 Applications simples

Nous reprenons ici les exemples d'application que nous avons utilisé pour illustrer le théorème du moment cinétique et le premier théorème de Koenig. Pour l'essentiel, cela consistait à examiner le moment cinétique global d'un ensemble de points placé dans un champ de pesanteur constant $\vec{g}$. Ceci s'applique au Système Solaire dans le champ gravitationnel galactique ou à tout objet solide lancé dans le champ de pesanteur terrestre. Nous avons déjà vu [Eq. (3.44)] que le mouvement du centre de masse était caractérisé par

$$\frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{g} \quad , \quad (4.30)$$

de par le théorème du centre d'inertie. Ecrivons maintenant le théorème de l'énergie cinétique (sous sa forme différentielle) pour l'ensemble

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{ext}}) + \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{int}}) \quad , \quad (4.31)$$

où les $\vec{F}_{\text{int}}$ sont les forces intérieures au système qu'il nous est inutile de détailler plus ici. Explicitons maintenant le travail des forces extérieures :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dW}{dt} (m_i \vec{g}) + \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{int}}) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{g} + \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{int}}) = M \vec{V}_G \cdot \vec{g} + \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{int}}) . \quad (4.32)$$

Nous écrivons maintenant le second théorème de Koenig et nous dérivons par rapport au temps :

$$\begin{aligned} E_c &= E'_c + \frac{1}{2} M V_G^2 \\ \Rightarrow \quad \frac{dE_c}{dt} &= \frac{dE'_c}{dt} + M \vec{V}_G \cdot \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{dE'_c}{dt} + M \vec{V}_G \cdot \vec{g} \quad . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nous égalisons les deux dernières expressions trouvées et il vient

$$\frac{dE'_c}{dt} = \sum \frac{dW}{dt} (\vec{F}_{\text{int}}) \quad (4.34)$$

On voit bien sur cette expression que contrairement au moment cinétique, la contribution des forces intérieures ne s'élimine pas. L'énergie cinétique interne (barycentrique) de notre système de points n'est donc pas conservée, contrairement au moment cinétique propre, et ce sont bien les effort internes qui la font varier. Ce sera en particulier le cas du Système Solaire dans le champ galactique. Dans le cas du solide lancé dans le champ terrestre, la situation est plus simple, car nous avons vu plus haut que dans ce cas, le travail des efforts internes s'annule. Il en résulte que l'énergie cinétique barycentrique de notre solide se conserve. On peut montrer aisément que cette énergie cinétique est celle qui est liée à la rotation propre du solide, alors que de manière claire le terme $1/2 M V_G^2$ est lié au mouvement d'ensemble. Nous retrouvons bien l'idée intuitive qu'un objet lancé en l'air tourne librement et uniformément sur lui-même.

Nous pouvons également reprendre l'exemple du patineur qui ramène ses bras sur lui-même pour accélérer sa rotation. Il conserve son moment cinétique, mais pas son énergie cinétique. On peut montrer aisément que dans ce cas son énergie cinétique a *augmenté* dans le rapport des moments d'inertie initiaux et finaux. La raison physique de cette variation est qu'en ramenant ses bras sur lui-même, le patineur a exercé à l'intérieur de son corps des forces internes dont le travail n'a pas été nul. On peut dire aussi qu'en bougeant ses bras, le patineur ne s'est pas comporté comme un solide, et que donc l'énergie cinétique n'avait aucune raison de se conserver.

4.3 Energie potentielle et énergie mécanique

Nous avons vu que dans des systèmes à plusieurs points, le théorème de l'énergie cinétique avait quelque chose de non satisfaisant en ce sens qu'il y restait une contribution du travail des forces internes impossible à éliminer. Nous allons introduire ici d'autres fonctions scalaires d'énergie qui vont nous permettre de contourner souvent cette difficulté, et de dégager dans le cas général une nouvelle intégrale première du mouvement.

4.3.1 Forces conservatives

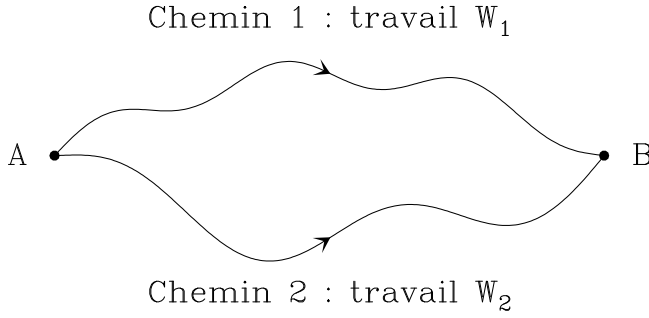


FIG. 4.3: *Chemins et travaux : $W_1 = W_2$ en cas de forces conservatives*

Considérons un point matériel en mouvement, soumis à une force $\vec{F}$ (qui n'a aucune raison d'être constante). Le mobile peut avoir toutes sortes de mouvements. Soient deux points A et B de l'espace, et supposons qu'un certain jeu de conditions initiales amène le mobile à passer par le point A et ensuite par le point B en suivant un certain chemin n° 1, c'est-à-dire une certaine trajectoire à une certaine vitesse. Imaginons maintenant qu'un autre jeu de conditions initiales amène également le mobile à aller de A à B , mais en

suivant un autre chemin n° 2 (Fig. 4.3). On peut imaginer par exemple un sujet lançant un caillou dans le but d'atteindre une cible. Il y a a priori plusieurs manières de lancer le caillou, donc plusieurs trajectoires possibles, qui toutes permettront d'atteindre la cible.

A chaque chemin est associé un certain travail de la force $\vec{F}$. Nous aurons W_1 pour le chemin n° 1, et W_2 pour le chemin n° 2. A priori W_1 et W_2 n'ont aucune raison d'être égaux, car ce sont des intégrales le long de chemins différents. Notre force $\vec{F}$ sera dite *conservative* si nous avons $W_1 = W_2$ quel que soit le chemin suivi, et ce pour tout choix de points de référence A et B , le travail ne dépendant que du choix de ces points. Nous donnerons donc la définition suivante :

Une force conservative est une force dont le travail entre deux points quelconques ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

Nous verrons plusieurs exemples de forces conservatives. Le plus simple qu'on puisse imaginer est celui d'une force constante. Dans ce cas, nous avons vu que quel que soit le chemin suivi nous avons toujours

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} \quad . \quad (4.35)$$

Cette force est donc clairement conservative. Il y a bien entendu des exemples plus compliqués.

Toutes les forces ne sont pas conservatives ; donnons un exemple de force *non* conservative. Pour cela, reprenons l'exemple de la force de frottement visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. Prenons un déplacement en ligne droite de A à B à vitesse constante $\vec{v}$, et calculons le travail associé.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\alpha\vec{v} \cdot d\vec{r} = -\alpha\vec{v} \cdot \int_A^B d\vec{r} = -\alpha\vec{v} \cdot \vec{AB} = -\alpha v \|\vec{AB}\| \quad . \quad (4.36)$$

Si pour aller de A vers B nous empruntons un demi-cercle de diamètre $\|\vec{AB}\|$ dans un mouvement circulaire uniforme à vitesse v , nous obtenons

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\alpha\vec{v} \cdot d\vec{r} = -\alpha v \cdot \int_A^B dr = -\frac{\pi}{2} \alpha v \|\vec{AB}\| \quad . \quad (4.37)$$

De manière générale, pour un chemin allant de A à B à vitesse constante, nous trouverons

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\alpha v l \quad , \quad (4.38)$$

où l est la longueur du chemin. Ce travail dépend donc clairement du chemin parcouru pour aller de A à B . Il dépend aussi de la vitesse à laquelle le chemin est parcouru. La force $\vec{F}$ n'est donc pas conservative. Lorsqu'une force n'est pas conservative, on dit aussi qu'elle est *dissipative* pour des raisons qui apparaîtront claires plus loin.

4.3.2 Énergie potentielle

Commençons par définir la notion d'énergie potentielle :

Une force $\vec{F}$ est dite dériver d'une énergie potentielle s'il existe une fonction scalaire E_p , ne dépendant que du point considéré, dite énergie potentielle associée à $\vec{F}$, telle que

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p} \quad . \quad (4.39)$$

Rappelons que $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient. Compte tenu de la définition (1.56) du gradient, cette définition implique

$$\boxed{dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad . \quad (4.40)$$

Or la dernière expression n'est autre que $-dW$, où dW est le travail élémentaire associé à $\vec{F}$. Par conséquent il est *équivalent* de dire qu'une force dérive d'une énergie potentielle et de dire que *le travail élémentaire à cette force peut s'exprimer comme la différentielle exacte d'une fonction scalaire* dépendant des variables d'espace. Cette fonction scalaire, lorsqu'elle existe, n'est autre que $-E_p$.

Quelles sont les forces qui dérivent d'une énergie potentielle? Déjà, toutes les forces qui dépendent de la vitesse de quelque manière que ce soit ne peuvent pas dériver d'une énergie potentielle. En effet, si $\vec{F}$ est le gradient d'une fonction qui ne dépend que des variables d'espace (x, y, z par exemple), il ne peut pas y figurer les coordonnées de la vitesse. Ceci exclut d'emblée la force visqueuse vue plus haut, ou par exemple la force de Lorentz.

Supposons qu'une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle. Calculons le travail de cette force lors d'un déplacement macroscopique du point A vers le point B :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dE_p = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_p}{dt} dt = -[E_p]_A^B = E_p(A) - E_p(B) \quad . \quad (4.41)$$

Cette expression peut en fait servir à définir l'énergie potentielle à partir de $\vec{F}$. C'est la définition *intégrale* de cette notion. On rencontre aussi l'écriture

$$\boxed{W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -[E_p(B) - E_p(A)] = -\Delta E_p} \quad . \quad (4.42)$$

Cette expression nous montre aussi que quel que soit le chemin suivi, $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ ne dépend que des points A et B , puisqu'il s'exprime comme la différence entre la valeur prise en A et la valeur prise en B d'une fonction des variables d'espace. Par conséquent, *une force qui dérive d'une énergie potentielle est nécessairement conservative*.

A l'inverse, supposons la force $\vec{F}$ conservative, et prenons un point de référence, par exemple l'origine O du repère. Nous définissons alors pour tout point A de l'espace

$$E_p(A) = -W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) \quad . \quad (4.43)$$

Cette définition a un sens puisque $W_{O \rightarrow A}(\vec{F})$ ne dépend pas du chemin suivi pour aller de O à A . Considérons maintenant un chemin qui part de O , va à A et revient à O . Ce chemin peut être vu comme la juxtaposition de deux chemins, l'un qui va de O à A et l'autre faisant le trajet inverse. Le travail associé à l'ensemble sera donc $W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow O}(\vec{F})$. Or pour aller de O à O , on peut imaginer un chemin trivial qui consiste à ne pas bouger. Le travail associé à ce non-déplacement sera forcément nul. La force étant conservative, les deux chemins sont équivalents en terme de travail. Il vient donc

$$W_{A \rightarrow O}(\vec{F}) = -W_{O \rightarrow A}(\vec{F}) = E_p(A) \quad . \quad (4.44)$$

Cherchons maintenant à calculer $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$. Pour aller de A à B , nous allons prendre un chemin qui passe par O , de manière à décomposer le chemin en un chemin qui va de A à O et un autre qui va de O à B . Nous en déduisons :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow O}(\vec{F}) + W_{O \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) \quad . \quad (4.45)$$

La fonction E_p que nous avons défini se comporte donc bien comme une énergie potentielle. En fait, dans cette dernière expression, si nous considérons deux point A et B infiniment voisins, nous obtenons bien $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$, c'est-à-dire l'équation (4.40). (4.40) et (4.39) sont équivalentes si $\vec{F}$ ne dépend que des coordonnées spatiales (et pas de la vitesse). Notre force dérive donc d'un potentiel si ceci est vérifié. Nous pouvons donc énoncer :

Les forces qui dérivent d'une énergie potentielle sont les forces conservatives qui ne dépendent que des variables d'espace.

Un dernier point d'importance : lorsque nous avons construit notre fonction énergie potentielle pour une force conservative, nous avons pris un point de référence, en l'occurrence l'origine O pour lequel $E_p(O) = 0$. Nous aurions pu choisir tout autre point comme référence, par exemple un point O' . Si tel était le cas, nous aurions défini une autre fonction énergie potentielle E'_p tout aussi valable. Quel est le rapport entre les deux fonctions ? Il est facile de voir que pour tout point A , nous aurions

$$E'_p(A) - E_p(A) = W_{O \rightarrow O'}(\vec{F}) = \text{constante} \quad , \quad (4.46)$$

le terme « constante » signifiant qu'il s'agit là d'une quantité qui ne dépend pas du point A . Les deux fonctions énergie potentielle sont donc les mêmes à une constante près. Inversement si E_p est une fonction énergie potentielle valide pour $\vec{F}$, la même fonction à laquelle on ajoute ou soustrait une constante est toute aussi valide, en vertu de la définition (4.39). Tout ceci montre que *la fonction énergie potentielle, lorsqu'elle existe, est toujours définie à une constante près*. Ceci est lié au fait que lors d'un déplacement du mobile, seules comptent les *variations* de l'énergie potentielle et non sa valeur absolue.

Enfin, si un mobile est soumis à plusieurs forces, et si chacune d'entre elles dérive d'une énergie potentielle, la résultante de ces forces dérive aussi d'une énergie potentielle qui n'est autre que la somme des énergies potentielles de chacune des forces.

4.3.3 Exemples d'énergie potentielle

Nous reprenons ici les exemples de forces pour lesquels nous avons effectué plus haut le calcul du travail. Cherchons si on peut associer à ces forces une énergie potentielle. Ce ne peut déjà pas être le cas de la force de frottement visqueux qui, comme nous l'avons vu plus haut, n'est pas conservative. Ce n'est pas non plus le cas de la force de Lorentz. Cette force ne travaille pas, mais elle contient la vitesse dans son expression. Examinons maintenant le cas du poids et de la force de rappel d'un ressort.

Energie potentielle de pesanteur

Reprenons l'exemple du poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ auquel est soumis tout corps pesant dans le champ de pesanteur terrestre. Si cette force dérive d'une énergie potentielle E_p , alors pour tout déplacement d'un point A vers un point B , l'équation (4.42) doit être vérifiée, soit $W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$. Dans le même temps, nous avons déjà calculé plus haut $W_{A \rightarrow B}$ (Eq. 4.8). L'examen de cette équation conduit à proposer

$$E_p = mg(z - z_0) \quad , \quad (4.47)$$

où z_0 est une constante représentant une altitude de référence pour laquelle $E_p = 0$. On peut prendre $z_0 = 0$ mais ce n'est en rien obligatoire. À l'inverse, on voit bien en coordonnées cartésiennes que si on définit l'énergie potentielle de cette manière, on a bien $\vec{P} = -\vec{\nabla} E_p$. La fonction proposée est donc valide.

Energie potentielle élastique

Passons maintenant à l'exemple de la force élastique de rappel d'un ressort $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}$. Notant $x = l - l_0$, nous avons vu que le travail entre deux points A et B s'exprimait

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) \quad . \quad (4.48)$$

Si nous cherchons à vérifier la formule (4.42), ceci conduit à proposer comme fonction énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte} \quad . \quad (4.49)$$

À l'inverse, si on définit l'énergie potentielle de cette manière, on vérifie immédiatement qu'on a bien $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$. La force élastique dérive donc bien de cette énergie potentielle. On peut fixer la constante à 0 de manière à ce que l'énergie potentielle du ressort soit nulle lorsqu'il a sa longueur à vide, mais encore une fois, cela n'a aucun caractère obligatoire.

4.3.4 Energie mécanique

Définition et théorème de l'énergie mécanique

Considérons un point matériel soumis à un certain nombre de forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext}}$. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique pour un déplacement d'un point A vers un point B :

$$E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^C) + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}}) \quad , \quad (4.50)$$

où parmi les diverses forces nous avons fait la distinction entre les forces conservatives⁶ (C) et les forces non-conservatives (NC). Chacune des forces conservatives dérive d'une énergie potentielle. Leur somme dérive donc d'une énergie potentielle E_p qui est la somme des énergies potentielles individuelles. Nous écrivons alors :

$$E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}}) \quad , \quad (4.51)$$

ce que nous pouvons réécrire sous la forme

$$(E_{c,B} + E_{p,B}) - (E_{c,A} + E_{p,A}) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}}) \quad . \quad (4.52)$$

Nous voyons apparaître ici une nouvelle fonction scalaire, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, appelée *énergie mécanique*, et que nous noterons simplement E :

$$\boxed{E = E_p + E_c} \quad . \quad (4.53)$$

Cette définition nous permet de réécrire le théorème de l'énergie cinétique sous la forme

$$\boxed{E_B - E_A = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{NC}})} \quad . \quad (4.54)$$

Ceci constitue le *théorème de l'énergie mécanique* :

⁶Nous ne ferons pas ici la distinction entre forces conservatives et forces dérivant d'un potentiel.

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un système matériel entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures non-conservatives agissant sur ce système.

Notons bien que même si nous appelons cette relation « théorème de l'énergie mécanique », ce n'est en fait rien d'autre qu'une réécriture du théorème de l'énergie cinétique. Elle apporte cependant quelque chose de nouveau. Le travail des forces non-conservatives étant toujours résistant (voir les forces de friction), la variation d'énergie mécanique est forcément négative. *L'énergie mécanique de tout système matériel ne peut que diminuer au cours du temps, à moins d'un apport d'une autre forme d'énergie (explosion. . .)*

Signalons que le théorème de l'énergie mécanique, tel que nous l'avons écrit pour un point matériel, s'applique également tel quel pour un ensemble de n points matériels, à condition de compter dans l'énergie potentielle globale l'énergie potentielle de toutes les forces conservatives (intérieures ou extérieures), et de considérer de même les travaux de toutes les forces non-conservatives. Il suffit pour cela de reprendre la somme (4.24), de séparer forces conservatives et non-conservatives, qu'elles soient extérieures ou intérieures, et d'intégrer sur un déplacement macroscopique.

Systèmes matériels mécaniquement isolés

Un système sera dit *mécaniquement isolé* si toutes les forces (intérieures ou extérieures) auquel il est soumis sont conservatives. Dans ce cas, comme il n'y a pas de forces dissipatives, le théorème de l'énergie mécanique se réduit à

$$E_A - E_B = 0 \quad . \quad (4.55)$$

A et B étant quelconques, on en tire

$$\boxed{E = \text{constante}} \quad . \quad (4.56)$$

L'énergie mécanique de tout système mécaniquement isolé est donc constante au cours du temps. Il s'agit d'une quantité qui se conserve, et c'est cette propriété qui a donné leur nom aux forces conservatives (elles conservent l'énergie).

La fonction énergie mécanique s'exprime a priori en fonction de la position et de la vitesse du mobile, ou des positions et vitesses des divers points s'il s'agit d'un système de plusieurs points. L'équation (4.56) constitue donc une *intégrale première* du mouvement. Nous avons déjà vu que le moment cinétique pouvait constituer une intégrale première vectorielle du mouvement dans certains cas. L'énergie mécanique, lorsqu'elle se conserve, en est une autre, scalaire cette fois, et très classique.

Reprenons maintenant l'exemple du Système Solaire dans le champ galactique là où nous l'avons laissé, c'est-à-dire à l'équation (4.34) donnant la variation de l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique en fonction du travail des seules forces intérieures. Nous sommes désormais capables d'aller plus loin. En effet, les forces intérieures sont les interactions gravitationnelles entre les divers objets du Système Solaire, elles dérivent toutes d'une énergie potentielle comme nous le verrons au chapitre 6. Nous pouvons donc définir une énergie potentielle E'_p associée à la somme de ces forces, puis une énergie mécanique $E' = E'_c + E'_p$ dans le référentiel barycentrique. Du coup, l'équation (4.34) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{dE'_c}{dt} = -\frac{dE'_p}{dt} \quad \implies \quad \frac{dE'}{dt} = 0 \quad \implies \quad E' = \text{constante} \quad . \quad (4.57)$$

L'énergie mécanique du Système Solaire dans son référentiel barycentrique, et où on ne compte que les forces intérieures, est donc constante, tout comme son moment cinétique propre. En fait tout se passe du point de vue interne comme si le Système Solaire était rigoureusement isolé dans l'espace. La présence du champ gravitationnel galactique ne change rien à l'affaire. Les mouvements internes du Système Solaire sont totalement *découplés* de son mouvement d'ensemble autour du centre galactique⁷. Ceci permet d'étudier la dynamique du Système Solaire sans avoir à se préoccuper des forces extérieures. Nous disposons de deux intégrales premières, le moment cinétique et l'énergie mécanique. Il faut savoir que ce sont malheureusement les seules dont nous disposons, et ceci est la cause de bien des difficultés pour les astronomes. . .

Prenons maintenant pour « ensemble de points » les différents objets se situant à l'intérieur d'une navette spatiale en orbite autour de la Terre. La situation décrite plus haut avec le Système Solaire autour de la Galaxie est exactement transposable. Les éléments de la navette sont tous soumis au champ gravitationnel terrestre, que l'on peut très largement considérer comme constant à l'échelle de la taille de la navette ! Dans ces conditions, l'étude précédente montre que dans le référentiel barycentrique du système, c'est-à-dire le référentiel intérieur à la navette, tout se passe comme si les divers objets étaient isolés dans l'espace. Ceci n'est rien d'autre que l'*apesanteur* ressentie par les occupants du vaisseau. On entend parfois dire, on lit même que l'apesanteur dans les vaisseaux spatiaux vient du fait qu'on est trop loin de la Terre pour ressentir son attraction gravitationnelle. Il n'y a rien de plus faux. Après tout, la Lune elle-même est soumise à cette attraction tout en étant bien plus éloignée de la Terre. C'est le mouvement orbital qui crée l'apesanteur. Si on raisonne dans le référentiel de la navette, les occupants sont effectivement soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre, mais ce référentiel *n'est pas galiléen*. Il faut ajouter les forces d'inertie pour pouvoir appliquer la relation fondamentale de la dynamique. Ces forces d'inertie se trouvent compenser très exactement l'attraction terrestre et c'est ce qui crée l'apesanteur.

4.4 Diagrammes d'énergie et puits de potentiel

Nous allons dans cette section nous intéresser plus particulièrement aux systèmes mécaniquement isolés.

4.4.1 Contrainte d'énergie

Les systèmes mécaniquement isolés sont caractérisés par une énergie mécanique E constante

$$E = E_c + E_p = \text{constante} \quad . \quad (4.58)$$

Or de par sa définition, l'énergie cinétique E_c est une quantité positive ou nulle. Par conséquent, *quelle que soit l'évolution du mouvement*, nous aurons toujours à chaque instant

$$\boxed{E_p \leq E} \quad . \quad (4.59)$$

Cette remarque peut paraître anodine, mais elle peut être riche d'enseignements sur le mouvement. Elle signifie que *toutes* les régions de l'espace des paramètres du mouvement où l'énergie potentielle est supérieure à la constante E seront *interdites* au mouvement. Si les équations du mouvement sont solubles et si donc on connaît la solution, cela ne nous apporte pas grand chose

⁷Rappelons que ceci est dû au fait que tous les objets du Système Solaire voient le même champ galactique avec un très bon niveau d'approximation.

de plus. Mais il faut savoir que la plupart du temps *on ne peut pas résoudre* analytiquement⁸ le problème posé. Dans ce cas, disposer d'une contrainte d'énergie disant que tel ou tel domaine des paramètres ne sera quoi qu'il arrive jamais accessible est une information précieuse, dans la mesure où nous n'avons pas explicitement la solution du problème.

Le développement de ce concept amène naturellement à la notion de diagramme d'énergie pour étudier les mouvements possible d'un système mécaniquement isolé. Nous allons illustrer ici cette notion sur deux exemples concrets.

4.4.2 L'oscillateur harmonique

Nous reprenons ici le problème de la masse attachée à un ressort pouvant se déplacer horizontalement sans frottement, tel qu'il est représenté sur la figure (3.5). La masse est soumise à la force de rappel $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}$ que nous avons déjà vue. Il peut être commode de noter $x = l - l_0$. L'accélération de la masse est $m \vec{a} = m \ddot{x} \vec{u}$. L'application de la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad m \ddot{x} + kx = 0 \quad . \quad (4.60)$$

En toute rigueur, la masse est aussi soumise à son poids et à la réaction du support, mais comme le glissement est horizontal et sans frottement, on voit facilement que ces deux forces se compensent exactement. Il peut être commode de poser

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad (4.61)$$

de telle sorte que l'équation (4.60) devient

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (4.62)$$

Cette équation se résout aisément. La solution générale est

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad , \quad (4.63)$$

où A et ϕ sont deux constantes d'intégration. Le mouvement de la masse est donc une oscillation sinusoïdale entre $x = -A$ et $x = +A$ autour de la position d'équilibre $x = 0$, à la fréquence ω_0 . A est l'amplitude du mouvement. Ce système est traditionnellement appelé *oscillateur harmonique*.

Étudions maintenant ce même système par le biais de l'énergie. Nous avons vu que la force $\vec{F}$ dérivait de l'énergie potentielle $1/2 kx^2$. Notre système est bien mécaniquement isolé. Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E = \text{constante} = E_p + E_c = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad . \quad (4.64)$$

Dérivons cette dernière expression par rapport au temps. Nous obtenons

$$0 = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x} (m\ddot{x} + kx) \quad , \quad (4.65)$$

c'est-à-dire à un facteur $\dot{x}$ près l'équation (4.60)! L'approche énergétique est donc équivalente à l'approche vectorielle.

⁸C'est-à-dire exprimer la solution à l'aide de fonctions numériques connues

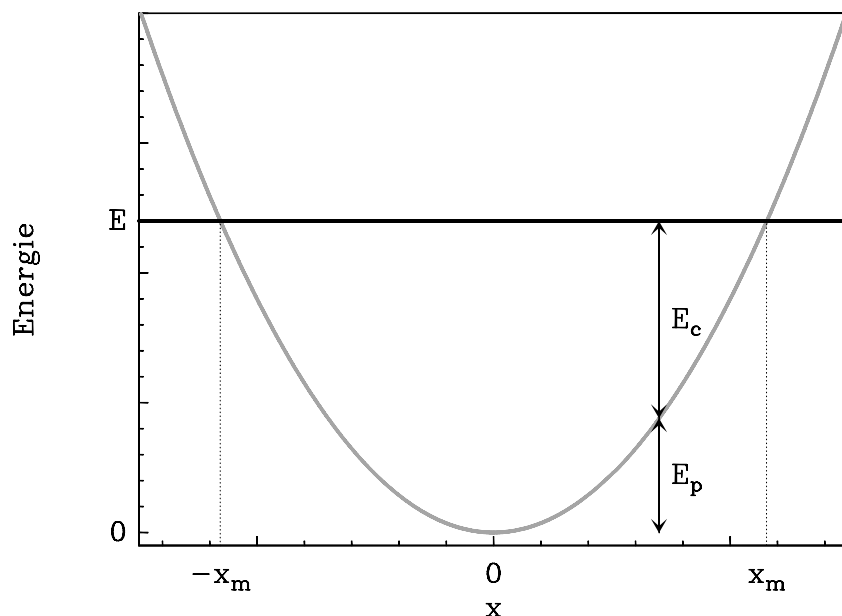


FIG. 4.4: Diagramme d'énergie de l'oscillateur harmonique. La courbe en gris représente l'énergie potentielle en fonction de x . Le mouvement est confiné entre $x = -x_m$ et $x = +x_m$.

Imaginons cependant que nous ne connaissions pas la solution explicite du problème. Nous allons porter dans un diagramme la courbe E_p en fonction de x (ici c'est une parabole) et y superposer pour une valeur de E la droite horizontale à la hauteur E (Fig. 4.4). Ceci est appelé un *diagramme d'énergie*. Du fait de la condition (4.59), toutes les valeurs de x pour lesquelles la courbe de E_p est au-dessus de la droite E sont interdites au mouvement. Pour toute valeur de x qui convient l'énergie cinétique et l'énergie potentielle se lisent comme indiqué sur la figure 4.4. La courbe coupe la droite en deux points d'abscisse $-x_m$ et x_m . Nous voyons que les seules valeurs de x acceptables se situent entre $x = -x_m$ et $x = +x_m$. Nous savons donc sans résoudre le problème que le mouvement se fait nécessairement entre ces deux bornes. On dit que la particule est confinée dans un *puits de potentiel*, ce qui signifie qu'elle est contrainte à rester dans un voisinage d'un minimum d'énergie potentielle⁹.

On peut montrer toujours sans résoudre le problème que le mouvement est nécessairement oscillatoire entre $x = -x_m$ et $x = +x_m$. En fait x_m n'est rien d'autre que l'amplitude du mouvement A que nous avons introduite plus haut. Ceci peut se voir aisément en calculant l'énergie mécanique E à partir de la solution explicite (4.63), et en remarquant que nécessairement $E = 1/2 k x_m^2$.

4.4.3 Le pendule simple

Le problème que nous abordons ici est aussi un grand classique. Considérons une masse m suspendue à une tige sans masse (ou un fil) de longueur l dans le champ de pesanteur terrestre, elle-même accrochée par son extrémité à un point O fixe. La tige peut pivoter librement dans un plan, de telle sorte que le système livré à lui-même va sous certaines conditions avoir tendance à effectuer des oscillations. C'est un *pendule*.

La masse m est soumise à son poids $m \vec{g}$, et à la tension de la tige $\vec{T}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc

$$\vec{T} + m \vec{g} = m \vec{a} \quad . \quad (4.66)$$

Nous repérerons la position du pendule par l'angle θ que fait la tige à chaque instant avec la verticale au repos (voir Fig. 4.5). En fait, nous utilisons ici un système de coordonnées polaires

⁹Un minimum d'énergie potentielle correspond toujours à une situation d'équilibre stable.

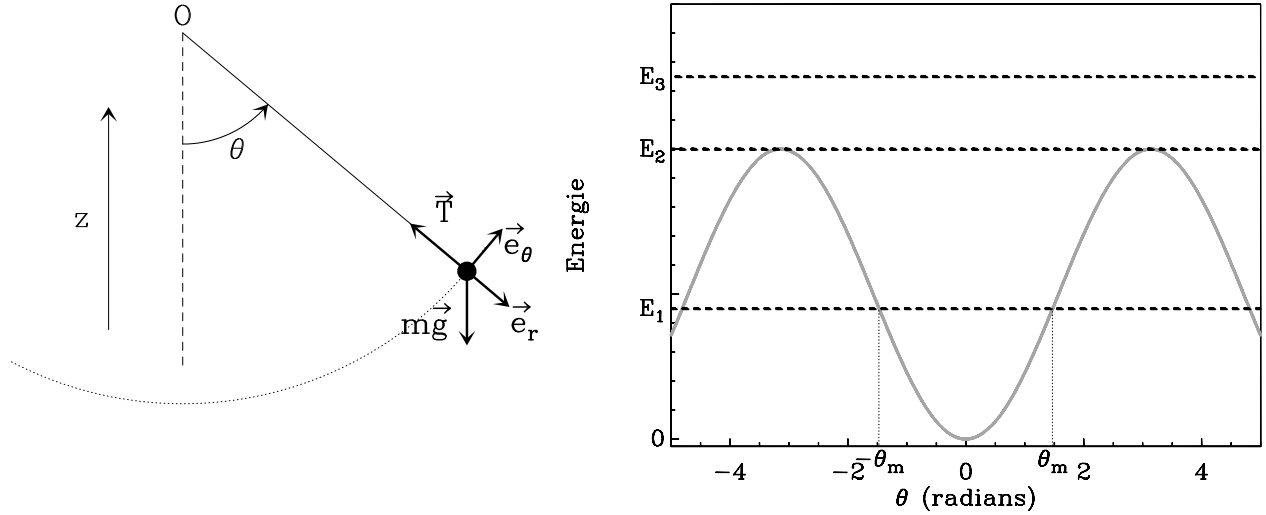


FIG. 4.5: Le pendule pesant : schéma (à gauche) et diagramme d'énergie (à droite). Les conventions pour le diagramme d'énergie sont les mêmes que pour la figure 4.4.

de centre O et où le rayon ρ est constant et vaut l . Pour l'accélération dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, nous utiliserons les formules (2.15), mais en tenant compte du fait que $\rho = l$ et que donc $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$. Nous allons projeter (4.66) sur $\vec{e}_\theta$, de manière à faire disparaître $\vec{T}$. Il vient

$$-mg \sin \theta = ma_\theta = m l \ddot{\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad . \quad (4.67)$$

En procédant comme pour l'oscillateur harmonique, nous posons

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad , \quad (4.68)$$

de telle sorte que l'équation du problème se simplifie en

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad . \quad (4.69)$$

Cette équation *ne possède pas* de solution analytique. Néanmoins, une approximation très classique consiste à dire que dans le cas de faibles oscillations, l'angle θ reste petit. Dans ce cas, nous avons (en radians) $\sin \theta \simeq \theta$. On remplace $\sin \theta$ par θ dans (4.69), et on obtient une équation similaire à (4.60) pour l'oscillateur harmonique. La solution est donc une oscillation sinusoïdale à la fréquence ω_0 . Au passage, nous retrouvons la formule (1.60) donnée plus haut.

Nous allons maintenant examiner le problème sous l'angle énergétique, et ce *sans faire l'approximation des petites oscillations*. Parmi les forces agissant sur la masse, l'une ne travaille pas ($\vec{T}$) et l'autre dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $mg(z - z_0)$. Nous allons fixer ici comme origine des énergies potentielles (le z_0) la hauteur correspondant à la position de la masse au repos, à $\theta = 0$. Dans ce cas, il est facile de voir que l'énergie potentielle vaut

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \quad . \quad (4.70)$$

La vitesse est uniquement orthoradiale (l est constant). L'énergie cinétique vaut donc $1/2 ml^2 \dot{\theta}^2$ en vertu des formules (2.13). Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E = \text{constante} \quad . \quad (4.71)$$

On vérifie qu'en dérivant cette équation par rapport au temps, on retombe bien sur (4.69). Le diagramme d'énergie correspondant (E_p en fonction de θ) est tracé sur la figure 4.5. On

y a tracé trois droites $E = \text{constante}$ correspondant à trois situations physiques distinctes. Dans le cas 1 (Energie E_1), le mouvement apparaît confiné comme dans le cas de l'oscillateur harmonique entre deux bornes $\theta = -\theta_m$ et $\theta = +\theta_m$. Le système est dans un puits de potentiel. On montre que là aussi nous avons bien un régime d'oscillations entre ces deux bornes, même si la solution explicite en fonction du temps ne nous est pas accessible (sauf dans le cas limite des petites oscillations). Il s'agit d'un oscillateur *non* harmonique. L'amplitude des oscillations θ_m se calcule. En effet, en ce point, la vitesse est nulle (donc $\dot{\theta}$ aussi) ; en reportant cette condition dans (4.71), on tire θ_m en fonction de E . On voit donc la puissance du théorème de l'énergie mécanique : il nous permet ici de calculer l'amplitude des oscillations dans le cas général, alors que dans ce même cas nous sommes dans l'impossibilité d'explicitier la solution en fonction du temps.

Le cas 2 est un cas limite, correspondant à $E_2 = 2mgl$, et où l'amplitude θ_m atteint la valeur π . Le pendule remonte jusqu'à la verticale. On peut montrer qu'il met en fait un temps infini à arriver à $\theta = \pi$.

Le cas 3 correspond à $E = E_3 > E_2$. Dans ce cas, on voit sur le diagramme d'énergie que la droite correspondant à E_3 reste toujours au-dessus de la courbe d'énergie potentielle. L'énergie cinétique n'est donc jamais nulle. Le mouvement n'est pas confiné dans un puits de potentiel. Que se passe-t-il donc ? Tout simplement, il n'y a pas d'oscillations. Le pendule a suffisamment d'élan (d'énergie...) pour monter à la verticale avec une vitesse non nulle et tourner indéfiniment. On dit que l'angle θ *circule* alors que dans le cas des oscillations il *libre* autour de la position $\theta = 0$.

On voit sur cet exemple simple que le théorème de l'énergie mécanique est ici extrêmement précieux pour distinguer différents régimes de mouvements possibles et exprimer les bornes du mouvement lorsqu'il y en a. C'est d'autant plus intéressant que le problème ne possède pas de solution analytique.

On n'hésitera donc pas à effectuer ce type d'étude et à tracer des diagrammes d'énergie chaque fois que c'est possible. Il faut cependant garder à l'esprit que le théorème de l'énergie mécanique ne résout pas tout. En particulier, les deux exemples que nous venons de donner sont *monodimensionnels*, en ce sens que le problème ne dépend à chaque fois que d'une seule variable d'espace (x ou θ ici). Dans ce cas, toute l'information sur l'énergie potentielle se lit dans une courbe donnant E_p en fonction du seul paramètre libre. Dans de nombreux cas, il y a *plusieurs* variables d'espace. Dans ce cas, l'énergie mécanique donne des renseignements sur le mouvement, mais plus parcellaires. Ce serait par exemple le cas si, combinant les deux exemples précédents, nous remplaçons la tige du pendule par un ressort. Dans ce cas, outre l'angle θ , le rayon l pourrait varier, et E_p serait une fonction de *deux* variables, l et θ . Si on voulait tracer un diagramme d'énergie, c'est une surface qu'il faudrait dessiner, et voir comment elle se coupe avec un plan $E = \text{constante}$. On peut encore en tirer des régions permises ou interdites, mais plus dire quel type d'oscillations on a. On n'échappe pas dans ce cas à la relation fondamentale de la dynamique.

Chapitre 5

Chocs et systèmes à deux corps

A ce niveau du cours, toutes les notions générales importantes de la mécanique du point ont été introduites. Les chapitres suivants vont être consacrés à des applications de ce formalisme à quelques situations importantes. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux propriétés des systèmes composés de *deux* points matériels. Nous allons commencer par décrire la notion de choc entre deux particules, qui rentre dans le cadre de ce formalisme, mais il faut bien garder à l'esprit que les principes généraux concernant les systèmes à deux corps que nous allons développer après s'appliquent bien au-delà du strict cadre de la notion de choc.

5.1 Chocs

5.1.1 Définition et propriétés de conservation

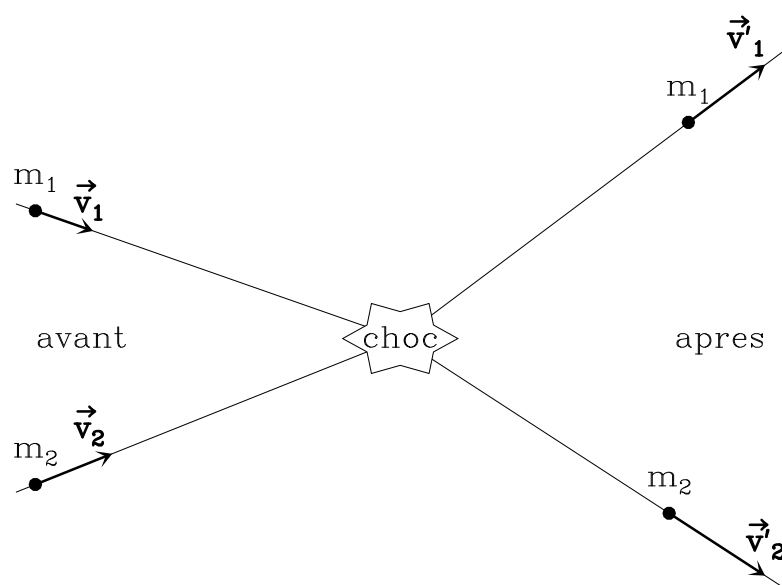


FIG. 5.1: Illustration de la notion de choc entre deux particules

La notion de choc entre deux particules est illustrée sur la figure 5.1. On considère deux particules de masses respectives m_1 et m_2 , initialement sans interaction qui sont amenées à un instant donné à entrer en contact ou à être suffisamment proches l'une de l'autre pour qu'une très forte interaction s'établisse entre elles. Cette interaction ne dure pas longtemps et ensuite les deux particules repartent chacune de son côté. Le *choc* proprement dit est l'instant de l'interaction. L'importante hypothèse sous-jacente est que le choc est censé durer suffisamment

peu de temps pour qu'on puisse considérer que le système constitué des deux particules est *isolé* de l'extérieur le temps de la collision. Il n'y aura donc pas de forces extérieures au système.

Nous considérerons la situation du système à l'instant *juste avant* la collision et la situation *juste après*. En fait ce sont les vecteurs vitesses des deux particules dans ces deux situations qui nous intéressent. Nous désignerons par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vecteurs vitesses des deux particules avant le choc, et par $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ leurs vecteurs après le choc. S'il n'y avait pas de choc, nous aurions nécessairement $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1$ et $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2$. Le choc induit une variation brutale des vitesses des particules.

Au moment du choc, des forces entre les deux particules, donc intérieures au système, sont à l'œuvre. Cependant, pendant le même temps, aucune force extérieure n'agit sur le système. Le théorème du centre d'inertie (3.23) nous montre alors que la quantité de mouvement totale reste inchangée au cours de la collision. Nous avons donc une première relation de conservation :

$$\boxed{\vec{P} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2} \quad . \quad (5.1)$$

Au cours de l'interaction, la force d'interaction entre les deux particules peut être supposée radiale. Dans ce cas, le théorème du moment cinétique nous dit que le moment cinétique total $\vec{L}_O$ reste inchangé au cours de la collision. Supposons que la collision ait lieu en un point M de l'espace. Vu de l'origine O , on peut considérer que juste avant la collision comme juste après, toutes les particules sont au point M . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m_1 O\vec{M} \wedge \vec{v}_1 + m_2 O\vec{M} \wedge \vec{v}_2 = O\vec{M} \wedge (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \\ &= m_1 O\vec{M} \wedge \vec{v}'_1 + m_2 O\vec{M} \wedge \vec{v}'_2 = O\vec{M} \wedge (m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2) \quad . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il ressort que cette équation ne nous apprend rien de plus. Elle est trivialement vraie comme conséquence immédiate de (5.1). En fait, il faudrait considérer que pendant la collision, les particules ne sont pas exactement au même endroit. Le moment cinétique est utile pour étudier la physique interne de la collision uniquement.

Lors de la collision, la force d'interaction entre les deux particules travaille. Dans ce cas, nous savons par le théorème de l'énergie cinétique que le travail de cette force interne intervient dans le bilan d'énergie cinétique de la collision. Par conséquent, contrairement à la quantité de mouvement, l'énergie cinétique *n'a aucune raison de se conserver* dans le choc. L'énergie cinétique initiale $E_{c,1} + E_{c,2}$ n'est a priori pas égale à l'énergie cinétique finale $E'_{c,1} + E'_{c,2}$. Nous avons en toute généralité

$$E'_{c,1} + E'_{c,2} = E_{c,1} + E_{c,2} + W(\vec{F}_{\text{int}}) \quad , \quad (5.3)$$

$W(\vec{F}_{\text{int}})$ désignant le travail de la force intérieure lors de la collision. Ce travail peut être nul mais rien ne l'impose. Nous en tirons immédiatement la définition suivante :

- Un choc est dit *élastique* si $W(\vec{F}_{\text{int}}) = 0$, autrement dit si l'énergie cinétique totale du système de deux particules est conservée lors de la collision ;
- il est dit *inélastique* dans les autres cas.

Lorsque le choc est inélastique, la plupart du temps, le travail de la force interne est résistant, donc négatif. Dans ce cas, l'énergie cinétique a diminué lors de la collision. En termes de bilan d'énergie, une partie de l'énergie cinétique a été utilisée dans la collision pour déformer les deux mobiles (choc de véhicules...), en élever la température ou même les détruire. Nous verrons plus loin quelle quantité d'énergie peut être ainsi prélevée. Il se peut aussi (c'est plus rare) que la collision fournisse de l'énergie, auquel cas le travail de la force intérieure est moteur, et

le système se retrouve avec une énergie cinétique plus grande après la collision. Ce sera par exemple le cas si la collision s'accompagne d'une explosion entre les particules.

Dans quel cas le choc peut-il être élastique ? Sauf cas très particuliers, on peut déjà imaginer que le choc sera difficilement élastique si la force interne $\vec{F}_{\text{int}}$ n'est pas conservative. Supposons donc que la force interne dérive d'une énergie potentielle $E_{\text{p,int}}$. Dans ce cas, nous avons

$$W(\vec{F}_{\text{int}}) = -\Delta E_{\text{p,int}} \quad \implies \quad E'_{\text{c},1} + E'_{\text{c},2} = E_{\text{c},1} + E_{\text{c},2} - \Delta E_{\text{p,int}} \quad , \quad (5.4)$$

le symbole Δ étant utilisé ici comme abréviation de « variation lors de la collision ». La dernière relation peut s'écrire

$$\Delta E_{\text{c}} = \Delta E_{\text{c},1} + \Delta E_{\text{c},2} = -\Delta E_{\text{p,int}}. \quad (5.5)$$

Le choc sera élastique si $\Delta E_{\text{p,int}} = 0$. On peut trouver de nombreuses situations où ceci sera réalisé, mais il en existe au moins une très classique, à savoir celle où l'énergie potentielle $E_{\text{p,int}}$ ne dépend que de la distance séparant les centres des deux particules. Dans ce cas, $E_{\text{p,int}}$ a la même valeur avant et après la collision, celle correspondant à la limite de $E_{\text{p,int}}$ lorsque la distance entre les deux particules tend vers l'infini. Le choc est clairement élastique dans ce cas qui recouvre déjà une fraction non négligeable des situations physiques. On notera que *pendant* la collision, $E_{\text{p,int}}$ peut et doit changer (les deux particules d'approchent), mais après, on retrouve la valeur initiale. Ceci ne signifie pas pour autant que les particules ont gardé les mêmes vitesses qu'avant la collision, comme nous allons le voir sur des exemples concrets.

5.1.2 Exemple : choc linéaire

Nous allons traiter ici en exemple le cas d'un choc linéaire frontal, c'est-à-dire un choc qui a lieu le long d'une droite. Les vitesses initiales des deux particules sont colinéaires avant le choc et restent portées par la même droite après le choc. On peut penser par exemple à deux boules de billard entrant en collision frontale. Cet exemple est bien sûr un cas particulier, mais son traitement illustre bien ce qu'on peut tirer des relations de conservation données plus haut.

Les deux particules possèdent donc avant le choc les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et après le choc les vitesses $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$. Dans la mesure où par hypothèse, toutes ces vitesses sont portées par la même droite, nous allons les projeter sur un vecteur unitaire directeur de cette droite. Ceci revient à remplacer dans les équations de conservation les vecteurs vitesses par leur composante unique le long de ce vecteur, en valeur *algébrique* (avec le signe). Ainsi, (5.1) devient

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad . \quad (5.6)$$

Dans le cas général, c'est tout ce dont nous disposons. Supposons maintenant le choc *élastique*. Dans ce cas, (5.4) s'écrit

$$m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 = m_1 v^2_1 + m_2 v^2_2 \quad , \quad (5.7)$$

où on a simplifié le facteur $1/2$. La combinaison des deux dernières relations permet de tirer v'_1 et v'_2 en fonction des conditions initiales, donc de connaître la dynamique des particules après le choc. Nous pouvons réécrire

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) &= m_2 (v'_2 - v_2) \\ m_1 (v^2_1 - v'^2_1) &= m_2 (v'^2_2 - v^2_2) \end{cases} \quad (5.8)$$

Ce système d'équations possède bien sûr la solution triviale ($v'_1 = v_1, v'_2 = v_2$) mais cette solution ne nous intéresse pas. Elle correspondrait à une absence de choc, auquel cas quantité

de mouvement et énergie cinétique seraient bien entendu conservées. Il y a cependant une autre solution et c'est celle-là que nous cherchons. Pour cela, divisons la deuxième équation par la première. En simplifiant, on tire

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \quad . \quad (5.9)$$

En combinant avec la première équation du dessus, nous obtenons un système linéaire dont la résolution donne la solution cherchée. On obtient en définitive

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad (5.10)$$

Nous ne commenterons pas en détail ces formules dont l'intérêt se limite au problème posé. Faisons juste quelques applications : Supposons $v_2 = 0$ et $m_2 \ll m_1$. Nous obtenons $v'_1 = -v_1$ et $v'_2 \ll v_1$. La particule 1 rebondit contre la 2 qui ne bouge pratiquement pas. Ceci est conforme à l'intuition. Supposons toujours $v_2 = 0$ mais $m_2 = m_1$. On déduit $v'_1 = 0$ et $v'_2 = v_1$. La particule 1 prend la place de la 2 qui part avec la vitesse d'arrivée de l'autre. En termes de pétanque, on appelle cela un carreau...

Plus sérieusement, reprenons l'équation (5.9) que nous avons obtenue plus haut. Nous pouvons la réécrire

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = 1 \quad . \quad (5.11)$$

Cette relation n'est valable que si le choc est élastique, puisque c'est l'hypothèse que nous avons faite pour l'obtenir. Dans le cas plus général où le choc n'est pas élastique, nous définirons le *coefficient de restitution*¹, noté e par

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = e \quad . \quad (5.12)$$

Si $e = 1$, le choc est élastique. Dans le cas général, si on reprend le calcul jusqu'au bout, on obtient

$$v'_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1 + e)m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{(1 + e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad (5.13)$$

ce qui avec $e = 1$ redonne bien les formules du dessus. Un cas particulier survient si $e = 0$. Dans ce cas $v'_2 = v'_1$. Les deux particules restent collées l'une à l'autre après le choc. Le choc est dit *mou* dans ce cas. Cette définition s'étend d'ailleurs à tout type de choc, pas forcément linéaire. Un choc sera qualifié de mou dès que les particules restent collées après le choc.

5.2 Propriétés générales des systèmes à deux corps

Après cette première étude des chocs, nous allons introduire maintenant les principes généraux qui prévalent à l'étude de tous les systèmes à deux corps, quelle que soit la nature de leur interaction mutuelle. Ces principes sont une particularisation à deux corps des lois physiques vues dans les chapitres précédents. Il trouveront leur application dans l'étude des chocs mais de manière générale dès qu'il sera question d'un système à deux corps.

¹La raison de cette appellation apparaîtra clairement plus loin.

5.2.1 Référentiel barycentrique

Nous avons déjà introduit plus haut la notion de référentiel barycentrique dans le cas plus général d'un système de n points matériel. Rappelons qu'il s'agit d'un référentiel qui se déplace avec le centre d'inertie G du système, et dont les axes restent parallèles à tout instant aux axes du référentiel de base $\mathcal{R}$. Il est équivalent de dire que c'est un référentiel en translation à la vitesse $\vec{V}_G$ par rapport à $\mathcal{R}$. On conviendra de choisir G comme origine du repère dans ce référentiel. Dans le cas d'un système à deux corps, nous aurons

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \vec{V}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} . \quad (5.14)$$

Nous choisirons de noter $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les vitesses des particules dans le référentiel barycentrique. Par application simple de la formule de composition des vitesses (3.39), nous avons

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_G + \vec{V}_1 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \vec{V}_G + \vec{V}_2 \quad (5.15)$$

De la définition de $\vec{V}_G$, on tire immédiatement

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = \vec{0} , \quad (5.16)$$

qui est une simple application de la relation (3.40) pour $n = 2$. Cette relation exprime que la quantité de mouvement totale est nulle dans le référentiel barycentrique. Ceci reste vrai quel que soit le nombre de corps n . Dans le cas $n = 2$ qui nous intéresse, elle contient quelque chose de plus. En effet nous pouvons réécrire $m_1 \vec{V}_1 = -m_2 \vec{V}_2$. Les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont nécessairement *colinéaires* et de sens opposé. On voit donc l'intérêt de se placer dans le référentiel barycentrique. Cela permet de simplifier l'étude.

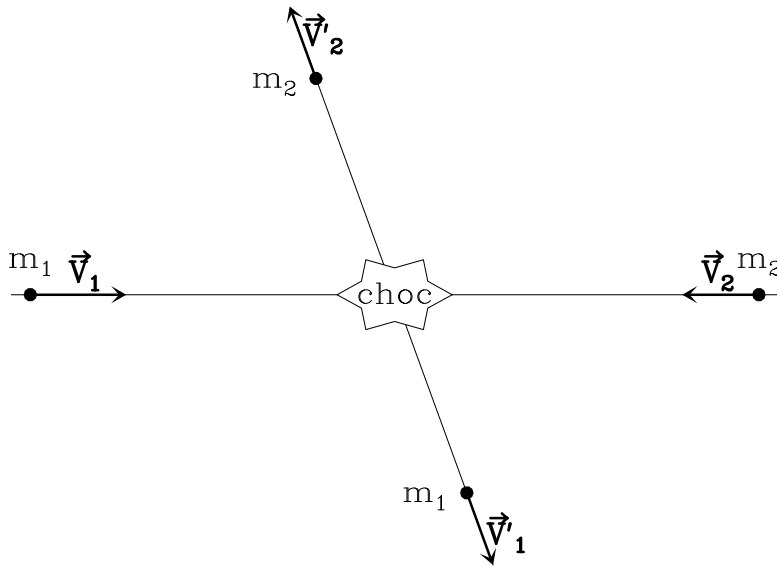


FIG. 5.2: Géométrie d'un choc dans le référentiel barycentrique

Reprenons le cas d'un choc. Plaçons-nous dans le référentiel barycentrique. Nous avons les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ avant le choc, et les vitesses $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ après. Nécessairement,

$$\boxed{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2 = \vec{0}} , \quad (5.17)$$

Les vitesses des deux particules sont donc colinéaires avant le choc ; elles le sont encore après, et dans le même rapport. Attention cependant, $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ n'ont aucune raison d'être colinéaires à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Les particules peuvent être déviées, comme suggéré sur la figure 5.2 qui illustre un choc vu dans le référentiel barycentrique. En fait, lorsque toutes les vitesses restent colinéaires, nous sommes alors dans le cas particulier du choc frontal que nous avons traité plus haut.

5.2.2 Mouvement relatif. Masse réduite

Dans le référentiel initial $\mathcal{R}$, la position de la particule 1 est repérée par un point mobile M_1 et la particule 2 par un point mobile M_2 . Nous désignerons par $\vec{r}$ le vecteur joignant M_1 à M_2 , soit

$$\boxed{\vec{r} = M_1\vec{M}_2 = O\vec{M}_2 - O\vec{M}_1} \quad . \quad (5.18)$$

Nous appellerons *mouvement relatif* la description de la variation au cours du temps de la quantité vectorielle $\vec{r}$. C'est le mouvement qu'a la particule 2 dans un référentiel lié à la particule 1, en translation par rapport à $\mathcal{R}^2$. Appelons maintenant $\vec{v}$ la dérivée de $\vec{r}$ par rapport au temps. Il vient

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dO\vec{M}_2}{dt} - \frac{dO\vec{M}_1}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1} \quad . \quad (5.19)$$

On peut remarquer que compte tenu des relations (5.15), nous avons aussi $\vec{v} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$, ce qui signifie que la description du mouvement relatif est la *même* dans le référentiel $\mathcal{R}$ et dans le référentiel barycentrique. On remarquera que si la position des particules est entièrement décrite par la donnée des vecteurs $O\vec{M}_1$ et $O\vec{M}_2$, elle l'est tout autant par les vecteurs $O\vec{G}$ et $\vec{r}$. On passe de l'une à l'autre formulation par les formules suivantes :

$$\begin{cases} m_1 O\vec{M}_1 + m_2 O\vec{M}_2 = (m_1 + m_2) O\vec{G} \\ O\vec{M}_2 - O\vec{M}_1 = \vec{r} \end{cases} \iff \begin{cases} O\vec{M}_1 = O\vec{G} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \\ O\vec{M}_2 = O\vec{G} + \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \end{cases} , \quad (5.20)$$

avec les formules correspondantes pour les vitesses :

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}_G \\ \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{V}_G - \frac{m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2} = \vec{V}_G + \vec{V}_1 \\ \vec{v}_2 = \vec{V}_G + \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2} = \vec{V}_G + \vec{V}_2 \end{cases} . \quad (5.21)$$

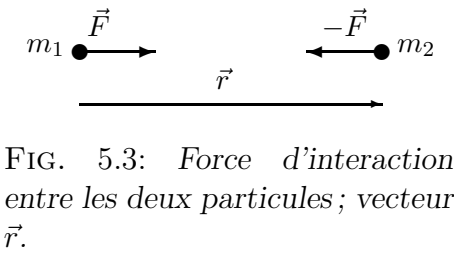


FIG. 5.3: Force d'interaction entre les deux particules; vecteur $\vec{r}$.

Supposons le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, et appelons $\vec{F}$ la force que la particule 1 exerce sur la particule 2. Par le principe des actions réciproques, la force que la particule 2 exerce sur la 1 est $-\vec{F}$. Nous pouvons supposer $\vec{F}$ radiale, c'est-à-dire colinéaire à $\vec{r}$, comme représenté sur la figure 5.3, mais ce n'est pas nécessaire au raisonnement qui suit. Nous supposons également que le système des deux particules est isolé. Ecrivons dans $\mathcal{R}$ la relation fondamentale de la dynamique pour les deux particules :

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -\vec{F} \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F} \quad . \quad (5.22)$$

Combinons alors ces deux équations pour dériver une équation d'évolution pour le mouvement relatif :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_2}{dt} - \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}}{m_2} + \frac{\vec{F}}{m_1} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F} \quad . \quad (5.23)$$

²Nous aurions pu tout aussi bien définir $\vec{r}$ comme $M_2\vec{M}_1$, ce qui aurait conduit aux mêmes propriétés. C'est juste une question de convention de numérotation des particules

Nous introduisons maintenant la *masse réduite* du système, notée traditionnellement μ , et définie par :

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad (5.24)$$

L'équation d'évolution du mouvement relatif peut alors s'écrire

$$\boxed{\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}} \quad . \quad (5.25)$$

Cette équation est en fait la relation fondamentale de la dynamique écrite pour une particule de masse μ , de vecteur vitesse $\vec{v}$ et soumise à la force $\vec{F}$. Par conséquent, la description du mouvement relatif en fonction du temps est équivalente à la description du mouvement d'une *particule fictive* à laquelle on aurait affecté la masse réduite μ , et qui serait soumise à la force d'interaction $\vec{F}$ entre les deux particules.

L'analogie va plus loin. Calculons le moment cinétique de l'ensemble, et pour cela appliquons le premier théorème de Koenig (3.42)

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m_1 O\vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 O\vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2 = \vec{L}'_G + (m_1 + m_2) O\vec{G} \wedge \vec{V}_G \\ &= m_1 G\vec{M}_1 \wedge \vec{V}_1 + m_2 G\vec{M}_2 \wedge \vec{V}_2 + (m_1 + m_2) O\vec{G} \wedge \vec{V}_G \\ &= m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \wedge \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \right) + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \wedge \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \right) \\ &\quad + (m_1 + m_2) O\vec{G} \wedge \vec{V}_G \\ &= \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \wedge \vec{v} + (m_1 + m_2) O\vec{G} \wedge \vec{V}_G \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge \vec{v} + (m_1 + m_2) O\vec{G} \wedge \vec{V}_G \quad . \end{aligned} \quad (5.26)$$

On résume le tout sous la forme

$$\boxed{\vec{L}_O = m_1 O\vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 O\vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2 = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} + M O\vec{G} \wedge \vec{V}_G} \quad , \quad (5.27)$$

où nous notons comme à l'accoutumée $M = m_1 + m_2$. Le moment cinétique de l'ensemble est bien la somme du moment cinétique de toute la masse (M) concentrée au point G et du moment cinétique propre, compté dans le référentiel barycentrique. Le moment cinétique propre apparaît comme équivalent à celui qu'aurait la particule fictive introduite plus haut, de masse μ , et dont le mouvement serait le mouvement relatif, décrit par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$.

Faisons de même avec l'énergie cinétique, en partant du second théorème de Koenig (4.29) :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_c + \frac{1}{2} M V_G^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} M V_G^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \right)^2 + \frac{1}{2} M V_G^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 + \frac{1}{2} M V_G^2 \quad . \end{aligned} \quad (5.28)$$

En définitive donc nous retombons sur une formule du même genre que pour le moment cinétique :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} M V_G^2} \quad . \quad (5.29)$$

On voit sur les deux formules donnant le moment cinétique et l'énergie cinétique que la description du système à deux corps se fait de manière équivalente dans deux formulations : dans un cas, on considère les deux particules physiques, entièrement décrites par $(m_1, \vec{O}\vec{M}_1, \vec{v}_1)$ et $(m_2, \vec{O}\vec{M}_2, \vec{v}_2)$; dans l'autre on considère le centre d'inertie du système auquel on affecte la masse totale, décrit par $(M, \vec{O}\vec{G}, \vec{V}_G)$, et la particule fictive du mouvement relatif, décrite par $(\mu, \vec{r}, \vec{v})$. Nous appellerons ces deux descriptions (m_1, m_2) et (M, μ) respectivement. On voit que dans les deux formulations les expressions (5.27) et (5.29) sont parfaitement symétriques, tout en décrivant les mêmes grandeurs dynamiques.

Les deux formulations sont donc équivalentes mais chacune a ses avantages. La description (m_1, m_2) a l'avantage d'être plus parlante à l'esprit car elle fait référence aux particules physiques. La description (M, μ) peut apparaître comme un artifice de calcul³, elle est cependant nettement plus pratique pour l'étude dynamique du système. En effet, dans les expressions correspondantes dans (5.27) et (5.29), moment cinétique et énergie cinétique y sont naturellement séparés en une partie relevant du mouvement d'ensemble du système et une autre relevant du mouvement propre, interne. Mieux, le mouvement du centre de masse n'est pas affecté par la force interne d'interaction $\vec{F}$. Si l'ensemble est isolé comme nous l'avons supposé, son mouvement dans $\mathcal{R}$ est rectiligne uniforme. Il en résulte que le moment cinétique et l'énergie cinétique correspondants sont constants. S'il y a variation du total, ce ne peut être dû qu'à la particule fictive.

La particule fictive est affectée par $\vec{F}$ par le biais de l'équation (5.25). Il ressort que dans la description (M, μ) les mouvements des deux « particules » considérées sont totalement *découplés*, ce qui n'est bien sûr pas le cas dans la description (m_1, m_2) . Du coup, toutes les relations de conservation (quantité de mouvement, moment cinétique...) apparaissent beaucoup plus naturellement dans la formulation (M, μ) . Si enfin comme ce sera souvent le cas, la force $\vec{F}$ est radiale, c'est-à-dire colinéaire à $\vec{r}$, l'étude du mouvement de la particule fictive par le biais de (5.25) s'en trouvera facilitée. On se trouve effectivement dans le cadre des mouvements dits à *force centrale* que nous décrirons au chapitre 7. En attendant, nous allons appliquer la formulation (M, μ) à la description des chocs.

5.3 Retour sur les chocs

5.3.1 Aspect énergétique

Nous reprenons maintenant l'examen des chocs dans le cadre de la description (M, μ) , c'est-à-dire centre de gravité et particule fictive. Nous avons déjà vu que la description d'un choc se trouve facilitée quand on se place dans le référentiel barycentrique. Dans la pratique, il est encore plus commode de considérer le mouvement relatif, tout en gardant à l'esprit que toutes ces descriptions sont parfaitement équivalentes.

Nous avons précédemment décrit un choc entre deux particules de masse m_1 et m_2 au moyen de leurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ juste avant le choc et de leurs vitesses $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ juste après. Le même choc sera donc décrit par une vitesse relative $\vec{v}$ avant le choc devenant $\vec{v}'$ après. Ceci concerne la particule fictive de masse μ . Le centre d'inertie du système est lui animé de la vitesse $\vec{V}_G$ qui *ne change pas* lors de la collision. Ceci résulte de la conservation de la quantité de mouvement globale (5.1). Dans la formulation (M, μ) , cette relation se traduit tout simplement par le fait que $\vec{V}_G$ reste constant.

La façon dont $\vec{v}$ va se changer en $\vec{v}'$ dépend des propriétés du choc. De ce point de vue,

³et de fait elle l'est...

chaque cas est particulier. Remarquons toutefois que dans notre formulation, nous n'avons plus qu'à décrire la variation d'un seul vecteur vitesse et non de deux. Examinons le problème sous un angle énergétique. Compte tenu de la conservation de $\vec{V}_G$, il est évident d'après (5.29) que la variation d'énergie cinétique s'écrit

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu (v'^2 - v^2) \quad . \quad (5.30)$$

Si on prête attention à la formule (5.29), on voit que dans l'énergie cinétique seule la partie $1/2\mu v^2$ peut varier, la partie $1/2V_G^2$ ne changeant pas. Toute la variation d'énergie cinétique est dans le mouvement relatif. L'énergie $1/2\mu v^2$ est la seule partie de l'énergie cinétique globale E_c qui puisse être prélevée lors de la collision. C'est pourquoi on la qualifie parfois d'*énergie disponible* E_{disp} . On voit donc à l'inverse qu'une collision ne peut pas prélever *toute* l'énergie cinétique d'un système.

Nous avons défini plus haut le coefficient de restitution e dans le cas d'un choc linéaire. Nous définirons ici ce même coefficient de restitution dans le cas général par

$$\Delta E_c = (e^2 - 1)E_{\text{disp}} \quad \implies \quad E'_{\text{disp}} = e^2 E_{\text{disp}} \quad , \quad (5.31)$$

E_{disp} désignant l'énergie disponible avant la collision et E'_{disp} après. En termes de vitesse, nous avons

$$e^2 = \frac{v'^2}{v^2} = \frac{(\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1)^2}{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2} \quad . \quad (5.32)$$

Sous cette forme, on voit bien que le coefficient de restitution correspond bien à celui que nous avons introduit plus haut dans le cas du choc linéaire. La définition (5.31) donne tout son sens à la dénomination « coefficient de restitution » (sous entendu de l'énergie disponible). On peut examiner plusieurs cas

- $e = 0$. Dans ce cas, $v' = 0$. Les deux particules restent accrochées après le choc. C'est un choc mou. Ce cas de figure correspond à la déperdition maximale d'énergie lors d'une collision. Toute l'énergie disponible a été prélevée.
- $e = 1$. La définition (5.31) montre immédiatement que le choc est élastique au sens où nous l'avons défini plus haut. En termes de vitesses, nous tirons dans ce cas $v' = v$ (mais $\vec{v}' \neq \vec{v}$ a priori). La collision se résume à une *dévi*ation du mouvement relatif sans changer la vitesse finale en norme. La valeur de cette déviation dépend des conditions particulières de la collision. On peut la calculer dans certains cas mais il n'y a pas de formule générale. Cette déviation est aussi celle des vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le référentiel barycentrique, et non celles des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$;
- $0 < e < 1$. Le choc est inélastique et l'énergie cinétique finale est inférieure à l'énergie initiale. Une partie de l'énergie disponible a été prélevée par la collisions pour échauffer, déformer, etc... C'est le cas classique d'un choc inélastique.
- $e > 1$. L'énergie finale est supérieure à l'énergie initiale. Le choc a fourni de l'énergie au système. Ce sera par exemple le cas s'il y a eu une explosion lors de la collision. C'est bien sûr une situation plus rare.

5.3.2 Conservation du moment cinétique. Paramètre d'impact

Examinons maintenant la conservation du moment cinétique $\vec{L}_O$. Si nous supposons que la force d'interaction $\vec{F}$ entre les deux particules est radiale, $\vec{L}_O$ se conserve. Partons de l'expression (5.27) de $\vec{L}_O$. La partie $\vec{OG} \wedge \vec{V}_G$ est trivialement conservée, tout simplement parce que $\vec{V}_G$ se

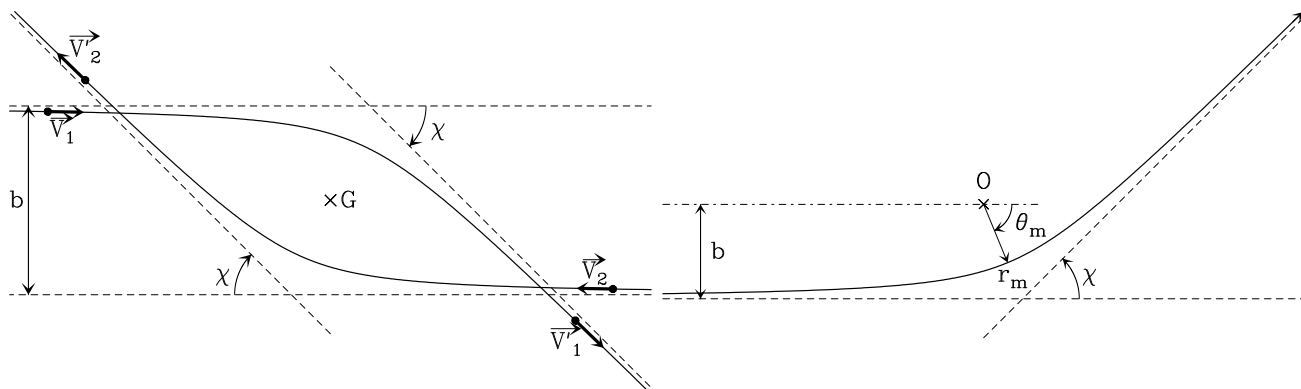


FIG. 5.4: Géométrie du détail d'une collision (ou rencontre) dans le référentiel barycentrique (à gauche) et dans le mouvement relatif (à droite)

conserve. La conservation de $\vec{L}_O$ se résume à la conservation de la quantité $\vec{r} \wedge \vec{v}$ avant et après la collision. Cette propriété n'est a priori pas triviale, et nous renseigne sur la collision. Pourquoi la décomposition (5.2) ne nous fournissait-elle alors aucun renseignement ? Parce que la décomposition (5.27) sépare naturellement le moment cinétique propre du moment cinétique d'ensemble. Le moment cinétique propre $\mu \vec{r} \wedge \vec{v}$ est a priori beaucoup plus petit que le moment d'ensemble. Savoir que cette petite quantité se conserve apporte des renseignements sur le choc. Dans la décomposition (5.2), les deux termes sont du même ordre de grandeur et chacun d'entre eux ne se conserve pas. On voit là l'intérêt de la formulation (M, μ) .

La géométrie de la collision est précisée sur la figure (5.4). Que le choc soit élastique ou non, la vitesse relative $\vec{v}$ se trouve déviée d'un angle χ . Nous définirons le *paramètre d'impact* b par (avant la collision)

$$||\vec{r} \wedge \vec{v}|| = bv \quad . \quad (5.33)$$

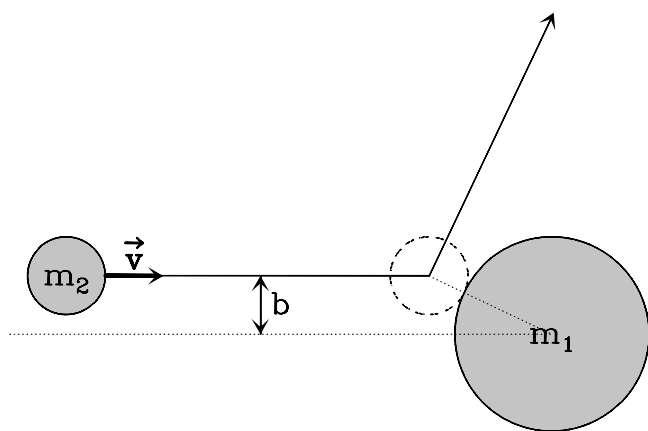


FIG. 5.5: Illustration de la notion de paramètre d'impact dans le cas d'un choc entre deux sphères

Le paramètre d'impact est une donnée de la collision. Remarquons que b est homogène à une longueur. Sa signification géométrique est montrée sur la figure 5.4. C'est dans le référentiel barycentrique la distance initiale entre les deux particules, une fois projetée perpendiculairement à la vitesse relative. Le paramètre d'impact est nul lorsque le choc est frontal comme nous l'avons traité en exemple

plus haut. La figure 5.5 illustre cette notion de paramètre d'impact dans le cas d'un choc entre deux sphères de taille différente. Nous avons représenté la sphère 1 immobile de telle sorte que le mouvement schématisé est le mouvement relatif. Le paramètre d'impact est un élément de la physique interne de la collision. Il n'intervient pas dans le bilan de quantité de mouvement.

Bien sûr, on voit bien sur la figure 5.5 il ne peut y avoir de choc à paramètre d'impact non nul que si les particules ne sont pas rigoureusement ponctuelles. Ce sera également le cas si les particules rentrent en interaction sans véritablement se toucher. Il suffit de penser à deux particules chargées se repoussant électriquement lorsqu'elles s'attirent, ou à deux étoiles passant relativement près l'une de l'autre au point de s'attirer mutuellement par interaction gravitationnelle. Tous ces cas de figure rentrent dans le cadre décrit ici. Dans ces deux exemples,

la force d'interaction dérive d'un potentiel qui ne dépend que de la distance mutuelle. On en tire facilement que le choc est nécessairement élastique. A partir de la donnée du paramètre d'impact b et de la vitesse relative initiale v , on peut dans ces exemples en partant de la conservation du moment cinétique et de l'énergie calculer explicitement la déviation χ qui caractérise entièrement la rencontre. Nous ne le ferons pas ici (c'est un peu long) mais cela n'offre pas de difficulté conceptuelle.

Chapitre 6

L'interaction de gravitation

Ce court chapitre a pour but de préciser les propriétés de l'interaction gravitationnelle que nous avons introduites au chapitre 2. Ces précisions nous seront utiles pour le traitement du problème des deux corps au chapitre suivant.

6.1 La force de gravitation

Nous avons déjà donné l'expression de la force de gravitation au chapitre 2. Nous la rappelons ici. La loi dite *de gravitation universelle*, énoncée par Newton en 1687, dit qu'entre deux masses ponctuelles s'exerce donc une action telle que la force qu'exerce la masse 1 sur la masse 2 vaut

$$\boxed{\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}} \quad , \quad (6.1)$$

$\vec{r}$ étant le vecteur joignant la masse 1 à la masse 2 et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de même direction. La constante de couplage G , appelée *Constante de la gravitation*, vaut $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

En toute rigueur, cette loi est inexacte. La théorie moderne de la gravitation est la Relativité Générale énoncée par Einstein en 1916. Cette théorie dépasse le cas de notre cours. La gravitation de Newton représente une approximation de la Relativité Générale lorsque la force de gravitation n'est pas trop forte. Dans la pratique, ce n'est que dans le cas de champs gravitationnels extrêmement puissants (au voisinage d'étoiles à neutrons ou de trous noirs...), ou lorsque les distances en jeu sont comparables aux dimensions de l'Univers que les effets relativistes se font sentir notablement.

6.2 Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ n'existe en toute rigueur que lorsque les deux masses sont présentes. Il est cependant commode de considérer que chaque masse crée en tout point de l'espace un *champ de gravitation* $\vec{g}$ tel que toute autre masse m en présence subira une force

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad . \quad (6.2)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les masses m_1 et m_2 créent chacune un champ de gravitation valant

$$\vec{g}_1 = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{g}_2 = +\frac{Gm_2}{r^3} \vec{r} \quad . \quad (6.3)$$

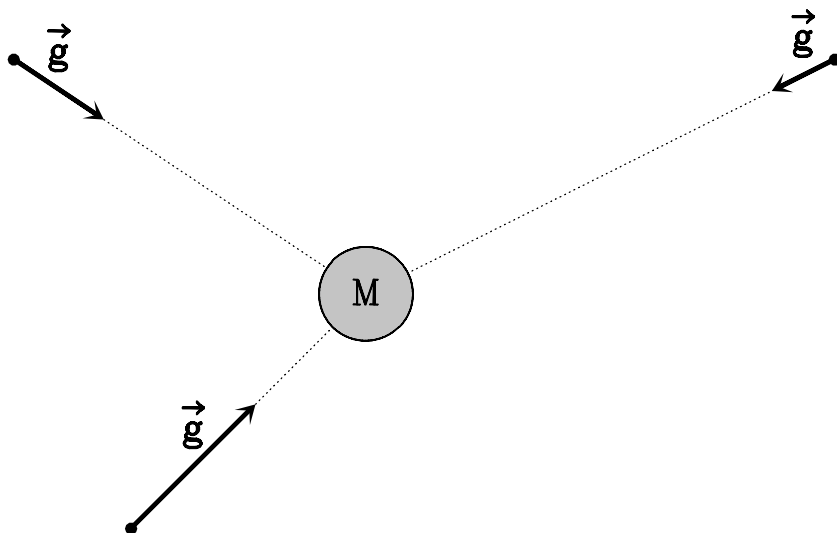


FIG. 6.1: Illustration du champ gravitationnel $\vec{g}$ créé en tout point de l'espace par une masse M . Le champ varie en direction et en norme d'un point à l'autre, mais il est toujours dirigé vers la masse M .

Dans le cas général, toute masse ponctuelle M sera supposée créer dans l'espace un champ $\vec{g}$ valant

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}} \quad , \quad (6.4)$$

où $\vec{r}$ désigne cette fois le rayon vecteur joignant la masse M au point considéré, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de même direction. Le champ $\vec{g}$ créé par la masse M n'est pas le même en tout point de l'espace. Il varie en direction et en norme; bien entendu, il est plus intense lorsque qu'on est plus proche de la masse M . Cependant, quel que soit le point considéré, le champ pointe toujours vers la masse qui en est à l'origine, comme illustré sur la figure 6.1.

Un champ gravitationnel est dimensionnellement homogène à une accélération, de dimension $L T^{-2}$.

6.3 Champ de gravitation créé par une masse étendue

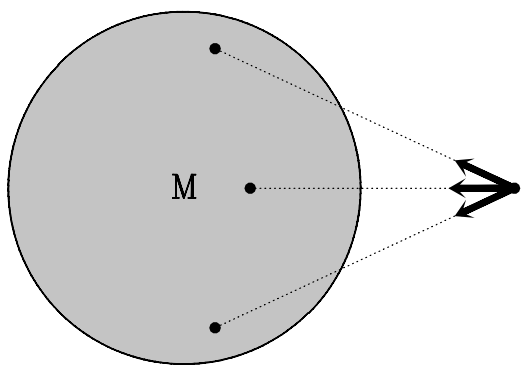


FIG. 6.2: Champ gravitationnel créé par une masse étendue : contribution de chaque point de la masse à la résultante du champ en un point de l'espace

Le champ gravitationnel (6.4) vaut en toute rigueur pour une masse *ponctuelle*. Or les corps célestes (planètes, étoiles...) usuels responsables des champs de gravitation que nous connaissons sont loin d'être ponctuels. Considérons une planète comme la Terre. On imaginera bien intuitivement qu'en un point situé suffisamment loin de sa surface, par exemple au niveau des autres planètes du Système Solaire, le champ gravitationnel engendré par la Terre sera pratiquement égal à celui qui serait créé par une masse ponctuelle de masse équivalente. Mais proche de la planète, ce n'est pas évident. En toute rigueur, le champ gravitationnel créé en un point de l'espace par une masse étendue est la somme (l'intégrale, s'il s'agit d'une distribution continue) résultante de tous les champs élémentaires créés par les différentes masses individuelles composant l'objet étendu, ce qu'illustre la figure 6.2. Sa norme et sa direction ne sont a priori pas connus. Si l'objet est à symétrie sphérique, on se doutera bien

que par symétrie, le champ résultant doit être dirigé vers le centre de l'objet (voir Fig. 6.2), mais c'est tout ce que l'intuition peut nous dire. En fait, il existe un théorème dit *théorème de Gauss*, qui tient aux propriétés mathématiques du champ de gravitation, et que nous ne démontrerons pas ici, qui montre que pour un corps à symétrie sphérique, tout se passe comme si le corps était ponctuel. Nous énoncerons donc :

Le champ gravitationnel engendré par une masse étendue de symétrie sphérique, en un point à l'extérieur de l'objet, est égal en direction et en norme à celui qui serait créé au même point par toute la masse de l'objet concentrée en son centre.

Ceci est valable jusqu'à la surface de l'objet. Ainsi, la formule (6.4) reste valable même à la surface des planètes en vertu du théorème de Gauss.

Il faut par contre bien garder à l'esprit que la formule (6.4) n'est valable que pour des corps à *symétrie sphérique*. De plus, cette symétrie sphérique doit concerner non seulement la géométrie des masses, mais également la répartition des masses. Pour un corps de forme quelconque¹, le champ de gravitation peut être quelconque. C'est le cas par exemple des astéroïdes dans le Système Solaire. On se doutera bien que si on se place suffisamment loin d'un objet de ce type, le champ ressemblera à celui d'une masse ponctuelle, mais à la surface de l'objet, c'est une autre histoire... Les planètes du Système Solaire sont elles presque sphériques, ce qui fait que l'approximation masse ponctuelle reste excellente jusqu'à la surface. Toutefois, une planète comme la Terre n'est pas rigoureusement sphérique, et il faut en tenir compte dans le mouvement de certains satellites artificiels² sur orbite basse. Mathématiquement on fait un développement limité du champ gravitationnel sur une base de fonctions dites *harmoniques sphériques*, le premier terme étant le terme (6.4). Nous n'en dirons pas plus.

6.4 Le champ gravitationnel de la Terre

Attardons nous ici sur le champ gravitationnel qui nous est le plus familier, celui créé par la Terre au niveau de sa surface. La Terre est une planète presque sphérique de masse $M_{\oplus} = 5.977 \times 10^{24}$ kg, de rayon équatorial $R_{\oplus} = 6378.16$ km. Dans le cadre de cette approximation, la formule (6.4) s'applique. Au niveau de la surface terrestre, nous obtenons un champ $\vec{g}_s$ de norme

$$||\vec{g}_s|| = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 9.80363 \text{ m s}^{-2} \quad . \quad (6.5)$$

Cette valeur est une moyenne. On sait que la Terre n'est pas tout-à-fait sphérique. Le principal écart à la sphéricité est l'aplatissement polaire dû à la rotation terrestre. Le rayon de la Terre au pôles est inférieur au rayon équatorial d'une vingtaine de kilomètres environ. De ce fait, le champ de gravitation a tendance à être naturellement un peu plus intense aux pôles qu'à l'équateur. Par ailleurs, il est courant de travailler à la surface de la Terre dans le référentiel terrestre. Ce référentiel n'est pas galiléen. Il est d'usage d'incorporer dans les applications au champ de gravitation terrestre la force centrifuge conséquence de la rotation terrestre. Les deux termes sont effectivement toujours présents et la résultante des deux est parfois dénommée *gravité effective*, ou encore *champ de pesanteur*. Cet effet va dans le même sens que précédemment, à savoir une diminution du champ de gravitation à l'équateur et une augmentation aux pôles. De fait, à l'équateur on trouve plutôt $g_s = 9.78 \text{ m s}^{-2}$ et aux pôles $g_s = 9.83 \text{ m s}^{-2}$. En France, on a $g_s = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. On remarque toutefois que la correction est minime.

¹ou même si le corps est sphérique mais avec des masses irrégulièrement réparties...

²essentiellement les satellites sur orbite polaire

On peut également se poser la question de savoir comment décroît l'intensité du champ gravitationnel terrestre lorsqu'on s'élève au-dessus de la surface. A une altitude z au-dessus de la surface, l'intensité du champ est

$$\|\vec{g}(z)\| = \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + z)^2} = \frac{\|\vec{g}_s\|}{\left(1 + \frac{z}{R_{\oplus}}\right)^2} \quad , \quad (6.6)$$

$\|\vec{g}_s\|$ étant la valeur au sol. Il faut noter que dans les applications usuelles, $z \ll R_{\oplus}$. Si on prend $z = 1$ km le champ de gravitation est diminué de 0.03 % par rapport à sa valeur au sol. Il s'agit là d'une variation bien inférieure à la variation de $\|\vec{g}_s\|$ avec la latitude. Il faut monter à $z = 32$ km (c'est-à-dire loin dans la stratosphère) pour constater une diminution de 1 %. Tout ceci montre que dans les applications usuelles à la surface de la Terre, on pourra largement considérer le champ de pesanteur $\vec{g}$ comme *uniforme*, tant en intensité qu'en direction. Rappelons que dans l'expression de ce champ de pesanteur, nous incluons dans $\vec{g}$ l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre que nous ressentons dans le référentiel terrestre.

Ce que nous appelons le *poids* d'un objet à la surface de la Terre est la force que tout objet ressent dans ce champ de pesanteur, soit

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad . \quad (6.7)$$

Dans le cadre du champ de pesanteur uniforme, cette force est constante. Cette approximation se limite à de petits déplacements à la surface de la Terre.

6.5 Principe d'équivalence

La force de gravitation que nous avons introduite fait intervenir la masse m des objets comme facteur de couplage. La masse d'un objet intervient aussi dans l'expression de la relation fondamentale de la dynamique (3.13). En toute rigueur, ces deux coefficients de couplage n'auraient aucune raison d'être égaux. Considérons par exemple les forces électriques et magnétiques subies par un corps chargé, décrites au chapitre 3. Ces forces font intervenir la *charge* q de l'objet comme coefficient de couplage. La charge n'est bien entendu pas nécessairement reliée à la masse m . Il existe des corps massifs sans charge et vice-versa. Il est tout à fait remarquable que le coefficient de couplage intervenant dans l'expression de la force de gravitation soit égal à la masse de l'objet, par ailleurs introduite dans la relation fondamentale de la dynamique.

En fait, rien ne prédispose à cette égalité, et on peut faire la distinction. La masse intervenant dans la relation fondamentale de la dynamique est appelée traditionnellement *masse inerte* (notée m_i), entendant par là que c'est le coefficient qui traduit la résistance d'un corps à la mise en mouvement. La masse intervenant dans la force de gravitation est appelée *masse grave* (ou gravitationnelle, notée m_g). C'est le coefficient de couplage de l'interaction de gravitation. L'important à saisir ici est que *rien* dans les équations de la physique *ne prédispose à l'égalité des deux masses* ainsi introduites. En introduisant la gravitation sans faire la distinction entre les deux, *nous avons implicitement supposé l'égalité entre masse grave et masse inerte*. Cette propriété ne se démontre pas, c'est une constatation expérimentale portée au rang de postulat appelé *principe d'équivalence*. On aurait pu l'introduire au chapitre 3 comme quatrième loi de Newton. Nous ne l'avons pas fait car c'est un principe spécifique à l'interaction de gravitation.

La vérification du principe d'équivalence se fait par l'expérience. Considérons un corps de masse inerte m_i et de masse grave m_g dans le champ de gravité terrestre $\vec{g}$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à cette situation s'écrit

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g} \quad . \quad (6.8)$$

Si le principe d'équivalence s'applique, nous avons $m_i = m_g$, et donc $\vec{a} = \vec{g}$. En d'autres termes, tous les corps en chute libre sur Terre doivent tomber avec la même accélération, et donc la même vitesse au bout d'un temps donné, quelles que soient leurs masses. C'est là une constatation que nous pouvons faire expérimentalement, mais qui n'est pas aussi évidente qu'il n'y paraît. En effet, nous constatons bien qu'une plume tombera moins vite qu'une pierre, mais ceci vient du fait que la plume est beaucoup plus soumise au *frottement de l'air ambiant* que la pierre. Cette idée a mis du temps à se dégager. En fait c'est Galilée, lors d'expériences célèbres du sommet de la tour de Pise à la fin du XVI^e, qui a le premier montré que la vitesse de chute des corps ne dépendait pas de leur masse. Ceci a constitué le point de départ de la mécanique moderne. Plus récemment, l'expérience a été refaite de manière très didactique par un astronaute lâchant simultanément une plume et un marteau à la surface de la Lune³ : les deux tombent à la même vitesse. Sur Terre, on s'efforce de vérifier ce principe dans des tubes vidés au mieux de leur air appelés *tubes de Newton*.

A l'inverse, soient deux corps de masses graves respectives $m_{g,1}$ et $m_{g,2}$, et masses inertes respectives $m_{i,1}$ et $m_{i,2}$. Laissons les tomber dans des tubes de Newton. Ils tombent avec les accélérations $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à chacun d'entre eux donne

$$m_{i,1} \vec{a}_1 = m_{g,1} \vec{g} \quad \text{et} \quad m_{i,2} \vec{a}_2 = m_{g,2} \vec{g} \quad . \quad (6.9)$$

Si par expérience nous constatons $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, nous en déduisons immédiatement

$$\frac{m_{i,1}}{m_{g,1}} = \frac{m_{i,2}}{m_{g,2}} \quad . \quad (6.10)$$

Le rapport entre masse grave et masse inerte est donc le même pour *tous* les corps. Du coup, rien ne nous empêche de choisir *la même unité* (par exemple le kilogramme) pour les deux, auquel cas ce rapport vaut 1. Nous aboutissons à la conclusion fondamentale

$$\boxed{m_i = m_g} \quad . \quad (6.11)$$

Il n'y a donc pas lieu de faire la distinction entre les deux types de masses. La vitesse de chute des corps est donc le moyen de base de vérification du principe d'équivalence. Aujourd'hui les physiciens s'intéressent encore à améliorer la vérification expérimentale de cette égalité, acquise pour l'heure à au moins 10^{-11} près.

Le principe d'équivalence implique qu'il est impossible de faire la distinction conceptuelle entre forces d'inertie et force de gravitation. A l'inverse de la mécanique Newtonienne qui adjoint le principe d'équivalence aux équations de base de la gravitation, la Relativité Générale a été construite en 1916 par Einstein sur la base du principe d'équivalence. Il en est résulté une théorie de l'espace-temps couplant intimement la structure topologique de l'espace à la masse qui y réside, et à l'abandon de la notion de référentiel inertiel dans l'absolu. Mais ceci dépasse de loin le cadre de notre cours. . .

6.6 Energie potentielle de gravitation

On peut se demander si la force de gravitation que nous avons introduite dérive d'une énergie potentielle. Considérons une masse m placée dans le champ de gravitation d'une masse M . Elle subit une force

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u} \quad , \quad (6.12)$$

³où il n'y a pas d'air. . .

où $\vec{r}$ et $\vec{u}$ répondent à la même définition qu'en 6.2. Cherchons s'il existe une énergie potentielle E_p dont $\vec{F}$ dérive, ce qui se traduirait par

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \quad . \quad (6.13)$$

Pour cela, plaçons nous en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en prenant pour origine le point où est placée la masse M . Dans ces conditions, en utilisant la formule (1.59), nous en déduisons que nous devons nécessairement avoir par projection sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ ⁴ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_p(r, \theta, \phi)}{\partial r} = \frac{GMm}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_p(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0 \end{array} \right. . \quad (6.14)$$

Les deux dernières équations montrent que nécessairement E_p ne dépend que de la distance au centre r . La première équation s'intègre alors immédiatement. Il vient

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r} + \text{constante} \quad . \quad (6.15)$$

Il est d'usage de considérer⁵ que l'énergie potentielle de gravitation est nulle à l'infini, c'est-à-dire pour $r \rightarrow +\infty$. Ceci fixe la constante d'intégration comme nulle. En définitive, la force $\vec{F}$ dérive bien de l'énergie potentielle

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad . \quad (6.16)$$

De manière plus générale, la force de gravitation entre deux objets ponctuels de masses m_1 et m_2 dérivera de l'énergie potentielle

$$\boxed{E_{p,\text{grav}} = -\frac{Gm_1m_2}{r}} \quad . \quad (6.17)$$

Précisons que par symétrie cette énergie potentielle est aussi valable pour la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ que pour la force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Simplement, dans chaque cas, c'est l'origine du repère qui change...

6.7 Énergie potentielle de pesanteur

Nous avons vu au chapitre 4 que le poids d'un corps de masse m dans le champ de pesanteur terrestre dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = mgz \quad , \quad (6.18)$$

où z est l'altitude au-dessus du sol. Comme nous savons que le poids n'est qu'un cas particulier de force de gravitation, on est en droit de se demander quel lien il y a entre cette énergie potentielle et l'énergie potentielle de gravitation introduite plus haut. En application de la

⁴ $\vec{u} = \vec{e}_r$

⁵C'est une pure convention...

formule (6.15), l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre la Terre de rayon $R_\oplus$ et l'objet situé à l'altitude z au-dessus de son sol vaudra

$$E_{\text{p,grav}} = -\frac{GmM_\oplus}{r} + \text{constante} = -\frac{GmM_\oplus}{R_\oplus + z} + \text{constante} \quad . \quad (6.19)$$

Convenons alors, par conformité avec l'énergie potentielle (6.18), de fixer la constante de manière à ce que l'énergie potentielle soit nulle au sol, soit pour $z = 0$. Ceci revient à écrire

$$E_{\text{p,grav}} = -\frac{GmM_\oplus}{R_\oplus + z} + \frac{GmM_\oplus}{R_\oplus} = \frac{GmM_\oplus}{R_\oplus} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\oplus}} \right] \quad . \quad (6.20)$$

Or dans les application courantes sur Terre z est très petit devant le rayon Terrestre, de telle sorte que $z/R_\oplus \ll 1$. Nous pouvons donc faire un développement limité au premier ordre de l'expression précédente, ce qui nous donne

$$E_{\text{p,grav}} \simeq \frac{GmM_\oplus}{R_\oplus} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{R_\oplus} + \dots \right) \right] = \frac{GmM_\oplus}{R_\oplus^2} z + \dots \quad . \quad (6.21)$$

Or $GM_\oplus/R_\oplus^2$ n'est autre que l'intensité g du champ de pesanteur au niveau du sol terrestre, de telle sorte que nous trouvons en définitive

$$E_{\text{p,grav}} \simeq mgz \quad . \quad (6.22)$$

Nous retrouvons donc bien l'énergie potentielle (6.18) qui apparaît donc comme une (très) bonne approximation de l'énergie potentielle de gravitation pour des altitudes faibles au-dessus du sol terrestre.

Chapitre 7

Les mouvements à forces centrales

7.1 Généralités sur les mouvements à forces centrales

7.1.1 Définition

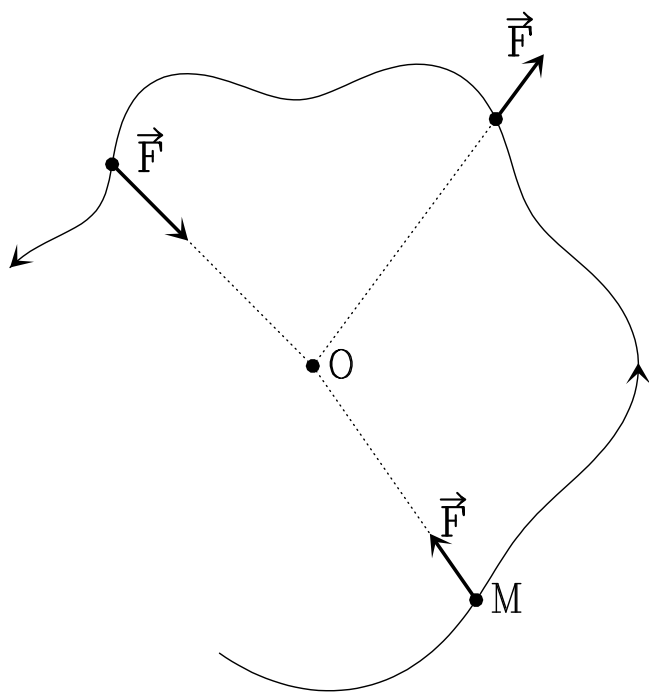


FIG. 7.1: Illustration de la notion de mouvement à force centrale

On considère un point matériel M en mouvement dans un référentiel donné, sous l'effet d'une force ou d'une résultante de forces que nous nommerons $\vec{F}$ sans plus de précisions. Précisons que la force $\vec{F}$ n'est pas considérée comme constante. Elle est dans le cas le plus général fonction du point considéré, éventuellement de sa vitesse, et du temps. En toute rigueur nous devrions écrire $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, mais nous ne le ferons pas afin de ne pas alourdir inutilement la notation, d'autant plus qu'il n'y a ici aucune ambiguïté.

Le mouvement du point M sera alors dit à *force centrale* s'il existe un point O de l'espace vers lequel la force $\vec{F}$ pointe à chaque instant depuis la position du mobile (Fig. 7.1). Cette notion est à prendre algébriquement. La force $\vec{F}$ peut effectivement « pointer » vers le point M , auquel cas la force est dite *attractive*, ou alors pointer dans la direction opposée ; dans ce dernier cas, la force est dite *répulsive*. Au cours du mouvement, la force peut très bien

passer d'attractive à répulsive ou vice-versa au cours du mouvement¹. La seule contrainte est que le vecteur force $\vec{F}$ soit à chaque instant colinéaire au vecteur $\vec{OM}$.

Le point O que nous avons introduit est bien évidemment appelé à jouer un rôle particulier dans le mouvement du point M . Pour l'instant, c'est un point quelconque de l'espace, cependant il est d'usage, en présence d'un mouvement à force centrale, de prendre O comme origine du repère utilisé, et c'est ce que nous supposons désormais.

¹C'est tout de même assez rare...

7.1.2 Moment cinétique. Loi des aires

Considérons un point M de masse m soumis à un mouvement à force centrale $\vec{F}$. Le moment cinétique du mobile par rapport à O est

$$\vec{L}_O = m \vec{OM} \wedge \vec{v} \quad , \quad (7.1)$$

où $\vec{v}$ est son vecteur vitesse. Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique (3.32) au point M :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{\Gamma}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad . \quad (7.2)$$

En effet, la force $\vec{F}$ étant à tout instant colinéaire à $\vec{OM}$, le produit vectoriel est nécessairement nul. On en tire immédiatement

$$\boxed{\vec{L}_O = \text{constante}} \quad . \quad (7.3)$$

Dans un mouvement à force centrale, le moment cinétique du mobile par rapport à l'origine O est un vecteur constant.

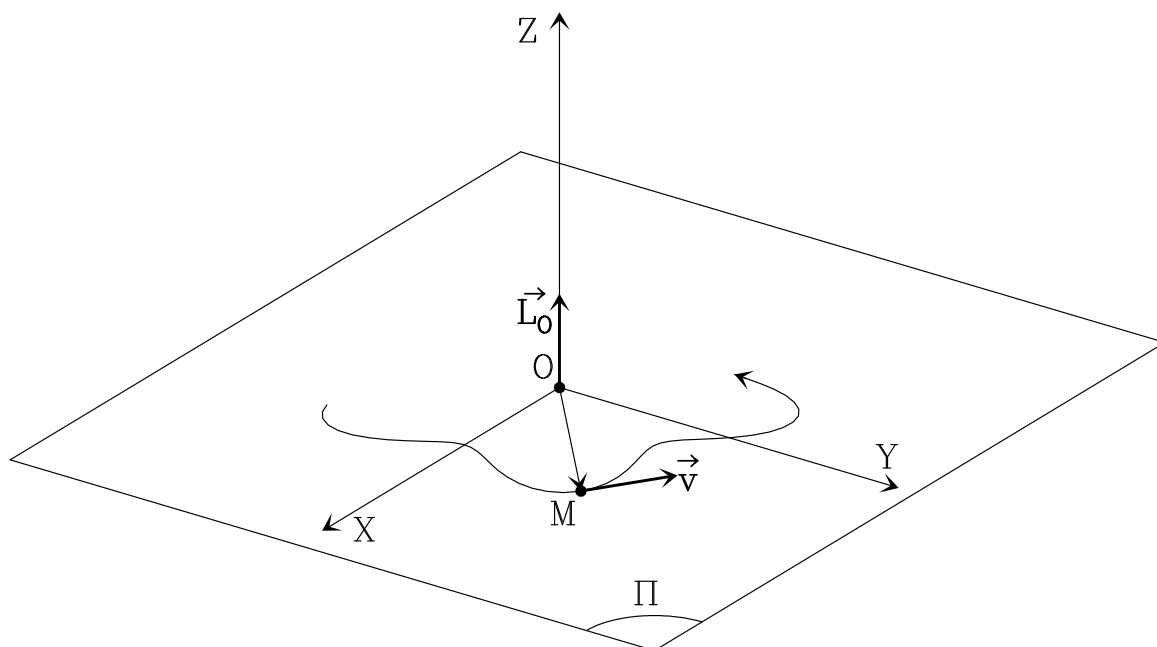


FIG. 7.2: Illustration de la conservation du moment cinétique dans un mouvement à force centrale : le mouvement est confiné dans un plan Π perpendiculaire au moment cinétique constant $\vec{L}_O$.

Cette remarque a des conséquences importantes sur la nature du mouvement, comme illustré sur la figure 7.2. Le moment cinétique $\vec{L}_O$ est donc un vecteur constant. Or par construction (produit vectoriel), le vecteur position $\vec{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}$ sont tous deux perpendiculaires à $\vec{L}_O$, et ce à chaque instant. Par conséquent, le mouvement est *nécessairement plan*, confiné à un plan Π perpendiculaire à $\vec{L}_O$, et contenant l'origine O . Nous énoncerons donc :

Un mouvement à force centrale est toujours plan. Le plan du mouvement contient l'origine O et est perpendiculaire au vecteur moment cinétique constant.

Si les données initiales du problème sont connues, le vecteur moment cinétique et le plan du mouvement le sont également. Quitte à changer de repère dans l'espace, on peut toujours supposer que ce plan est confiné avec le plan XOY , auquel cas $\vec{L}_O$ est colinéaire à OZ (Fig. 7.2).

Raisonnons alors en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . La description des deux premières coordonnées (ρ, θ) en fonction du temps constituera une description du mouvement dans le plan Π en coordonnées polaires, la coordonnée z restant identiquement nulle. En utilisant les formules (2.16) donnant l'expression de la vitesse dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $z = 0$ et $\dot{z} = 0$, on trouve aisément que les coordonnées du moment cinétique dans la base locale sont $(0, 0, m\rho^2\dot{\theta})$. On voit bien que $\vec{L}_O$ est colinéaire à OZ . Comme ce vecteur est constant, on en tire immédiatement

$$\boxed{\rho^2\dot{\theta} = C = \text{constante}} \quad . \quad (7.4)$$

Cette relation constitue une intégrale première du mouvement en coordonnées polaires. Elle est traditionnellement appelée *loi des aires* et la constante C porte le nom de *constante des aires*. On peut la retrouver à partir de la relation fondamentale de la dynamique exprimée en coordonnées polaires à l'aide des formules (2.17). En effet, la force $\vec{F}$ est centrale, donc colinéaire à $\vec{e}_\rho$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors

$$\begin{cases} -F &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ 0 &= m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \end{cases} \quad . \quad (7.5)$$

La deuxième de ces équations peut se réécrire

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\theta}) = 0 \quad \implies \quad \rho^2\dot{\theta} = \text{constante} \quad . \quad (7.6)$$

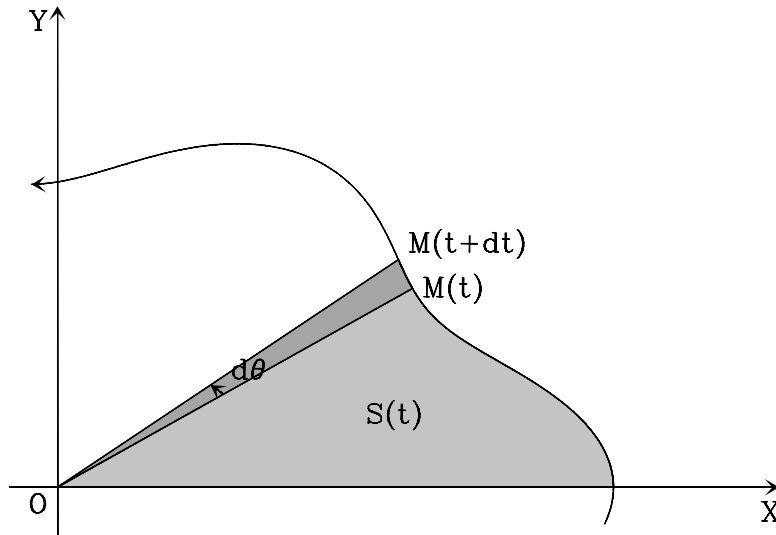


FIG. 7.3: Définition de l'aire balayée $S(t)$.

On peut trouver une interprétation géométrique de cette relation en coordonnées polaires. A un instant donné t , on définit l'aire balayée $S(t)$ comme l'aire enfermée par l'axe OX^2 , la trajectoire et le rayon vecteur $O\vec{M}$ (voir Fig. 7.3). L'instant d'après $(t + dt)$, cette aire s'est accrue de la surface du triangle élémentaire $OM(t)M(t + dt)$. L'aire de ce triangle élémentaire vaut $(1/2) OM \cdot OM' \cdot \sin(d\theta)$ (On note M' pour $M(t + dt)$). Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} dS(t) &= \frac{1}{2} OM \cdot OM' \cdot \sin(d\theta) \\ &= \frac{1}{2} \|O\vec{M} \wedge O\vec{M}'\| \quad . \quad (7.7) \end{aligned}$$

Compte tenu de $O\vec{M}' = O\vec{M} + M\vec{M}'$,

il vient alors

$$dS(t) = \frac{1}{2} \|O\vec{M} \wedge M\vec{M}'\| = \frac{1}{2} \|O\vec{M} \wedge d\vec{M}\| = \frac{1}{2} \|O\vec{M} \wedge \vec{v}\| dt = \frac{1}{2} \|\vec{L}_O\| dt = \frac{1}{2} C dt \quad . \quad (7.8)$$

²ou n'importe quel autre axe fixe...

En définitive, il vient donc

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C} \quad . \quad (7.9)$$

La quantité dS/dt porte le nom de *vitesse aréolaire*. Compte tenu de ce que nous avons démontré plus haut, cette quantité est constante. Par intégration nous en déduisons

$$S(t) = \frac{1}{2} Ct + S(0) \quad . \quad (7.10)$$

L'aire balayée $S(t)$ est donc proportionnelle au temps, et la constante des aires C se relie très simplement à la vitesse aréolaire, justifiant ainsi son nom.

Ceci constitue une interprétation géométrique de la loi des aires. Dans la pratique, la relation $\rho^2 \dot{\theta} = C$ signifie que le mobile « tourne » d'autant plus vite autour de l'origine qu'il en est proche. Elle a été découverte *expérimentalement* par Kepler au début du XVII^e siècle pour les mouvements des planètes autour du Soleil³, et c'est à partir de cette loi empirique que Newton pu bâtir sa théorie de la gravitation.

7.1.3 Les formules de Binet

Les formules de Binet, au nombre de deux, sont un artifice technique de calcul très classique qui nous sera utile pour la résolution du problème des deux corps. Pour les établir, repartons du système traduisant la relation fondamentale de la dynamique en coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan du mouvement :

$$\begin{cases} -F &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ 0 &= m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \end{cases} \implies \rho^2\dot{\theta} = C \quad . \quad (7.11)$$

Nous avons écrit « $-F$ » dans la première équation car nous considérons ici F comme positive lorsque la force centrale est attractive, donc dirigée vers O . Il s'agit bien sûr d'une convention, toutefois classique. Introduisons maintenant la variable

$$u = \frac{1}{\rho} \quad , \quad (7.12)$$

et cherchons à réécrire les équations précédentes en fonction de u et de ses dérivées au lieu de ρ . Pour commencer, nous avons de manière claire

$$\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2} = Cu^2 \quad , \quad (7.13)$$

puis

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -C \frac{du}{d\theta} \quad . \quad (7.14)$$

Exprimons maintenant le carré de la vitesse v . Nous avons de manière claire

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 = C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{u^2} C^2 u^4 \quad , \quad (7.15)$$

³Et pour cette raison on l'appelle aussi *deuxième loi de Kepler*, comme nous le verrons plus loin

où nous avons utilisé les résultats précédents. Nous en déduisons la *première formule de Binet* :

$$\boxed{v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]} \quad . \quad (7.16)$$

Cette formule est la moins utilisée des deux. Son intérêt est de fournir une expression de la vitesse en fonction de données relatives à la trajectoire seulement. La deuxième formule est relative à l'accélération, c'est-à-dire à la force F . Pour cela nous avons besoin de $\ddot{\rho}$:

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = -C \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -C \times \frac{d^2u}{d\theta^2} \times Cu^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad . \quad (7.17)$$

Nous en tirons

$$F = -m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = mC^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + mC^2 u^3 = mC^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \quad . \quad (7.18)$$

Ceci constitue la *deuxième formule de Binet*, que l'on peut réécrire avec le vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{a} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_\rho} \quad . \quad (7.19)$$

7.1.4 Énergie Potentielle

Jusqu'à présent dans ce chapitre, nous n'avons rien supposé sur la forme de la force $\vec{F}$ responsable du mouvement, si ce n'est qu'elle est centrale. En particulier nous n'avons pas dit si cette force dérive ou non d'une énergie potentielle. Si c'est le cas, alors nécessairement l'énergie potentielle vérifie en coordonnées sphériques un système différentiel du type (6.14), à savoir

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial r} = F \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad . \quad (7.20)$$

Les deux dernières équations montrent que E_p ne peut pas dépendre des angles ϕ et θ . E_p ne peut donc dépendre que de la distance au centre r . Du coup, la première de ces équations montre que ce doit aussi être le cas de la force $\vec{F}$. À l'inverse, si la force $\vec{F}$ ne dépend que de r , on définit aisément E_p en prenant une primitive (en r) de la fonction F :

$$E_p = \int F(r) dr + \text{constante} \quad . \quad (7.21)$$

Dans la pratique, lorsque c'est possible⁴, on s'arrange pour que l'énergie potentielle soit nulle à l'infini, ce qui permet de redéfinir E_p comme suit :

$$E_p(r) = - \int_r^{+\infty} F(s) ds \quad . \quad (7.22)$$

⁴ce n'est pas toujours le cas...

En définitive, une force centrale dérive d'une énergie potentielle lorsqu'elle ne dépend que de la distance au centre. La plupart des cas classiques de forces centrales rentrent dans ce cadre.

Si ceci est vérifié, la seule force agissant étant conservative, l'énergie mécanique E est conservée. En coordonnées cylindriques, cela s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + E_p(\rho) \quad , \quad (7.23)$$

en se souvenant que comme le mouvement est confiné au plan XOY , le ρ des coordonnées cylindriques et le r des coordonnées sphériques coïncident. On utilise alors la constante des aires $C = \rho^2\dot{\theta}$ pour réécrire ceci sous la forme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{\rho^2} + E_p(\rho) \quad . \quad (7.24)$$

On aurait pu utiliser la première formule de Binet (7.16) pour obtenir cette formule. Il est alors d'usage de définir l'énergie potentielle effective comme la somme des deux derniers termes de cette expression, à savoir

$$\boxed{E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{\rho^2} + E_p(\rho)} \quad , \quad (7.25)$$

de telle sorte que l'énergie mécanique peut se réécrire

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + E_{p,\text{eff}}(\rho) \quad . \quad (7.26)$$

Cette formulation est intéressante, car elle permet une réduction à une dimension de l'étude du mouvement. En effet, même une fois qu'on sait que le mouvement est plan, il reste fonction de deux variables d'espace, ρ et θ . L'utilisation de la constante des aires permet d'éliminer θ . En introduisant l'énergie potentielle effective et en écrivant l'énergie mécanique sous la forme (7.26), on fait comme si le mouvement était monodimensionnel, et ne dépendait que de la variable ρ . L'énergie potentielle serait alors $E_{p,\text{eff}}$. Ramener le problème à une dimension est toujours intéressant, car même lorsque on ne sait pas résoudre explicitement le mouvement, la discussion sur l'énergie mécanique permet de distinguer les mouvements possibles ou non suivant la valeur de l'énergie. Conceptuellement le terme additionnel dans $E_{p,\text{eff}}$ par rapport à E_p est l'énergie potentielle attachée à la *force centrifuge* qui s'exerce sur la particule dans le référentiel tournant qui lui est attaché.

Supposons que nous ayons réussi à exprimer l'énergie potentielle E_p sous une forme qui la rend nulle lorsque $r \rightarrow +\infty$. Il est alors facile de voir ce sera aussi le cas pour l'énergie potentielle effective. Nous pouvons alors distinguer les cas suivants :

- $E < 0$: Dans ce cas, comme $E_{p,\text{eff}}$ s'annule à l'infini, on tombe sur une impossibilité pour $r \rightarrow +\infty$, car $1/2m\dot{\rho}^2$ est nécessairement positif. Dans ce cas, le mobile *ne peut pas aller à l'infini* et reste confiné autour du centre sans pouvoir s'en éloigner au-delà d'une certaine distance maximale. On parle d'*état lié* ;
- $E \geq 0$: Dans ce cas, le mobile peut aller à l'infini. On parle d'état non lié, et plus précisément d'*état de diffusion* si $E > 0$ et d'*état de libération* si $E = 0$. Dans ce dernier cas (limite), l'infini est atteint avec une vitesse nulle.

Nous retrouverons cette distinction dans le cas du mouvement Képlérien.

7.2 Le problème des deux corps

7.2.1 Introduction

Le problème des deux corps est l'exemple le plus classique d'application du formalisme des mouvements à forces centrales. Il régit pour l'essentiel la plupart des mouvements astronomiques. D'un point de vue historique, c'est autour de ce problème, et plus généralement de la dynamique du Système Solaire, que s'est forgée toute la mécanique classique de Kepler à Newton.

Il va sans dire que la démarche déductive que nous utilisons ici pour présenter ce mouvement ne correspond en rien à la démarche historique de Newton qui avait en fait devant lui le problème inverse, à savoir trouver la forme de l'interaction gravitationnelle connaissant la solution du problème des deux corps.

Le problème des deux corps se pose simplement de la manière suivante :

Soient deux corps ponctuels et massifs de masses respectives m_1 et m_2 , s'attirant l'un l'autre selon la loi de gravitation universelle de Newton. Trouver leur mouvement.

Il convient avant toute chose de préciser les limites d'application de ce problème dans la réalité. En tout premier lieu, remarquons que nous avons vu au chapitre 6 que le champ gravitationnel créé par une masse à symétrie sphérique était à l'extérieur identique à celui créé par une masse ponctuelle de même masse. Par conséquent, le mouvement relatif de deux corps à symétrie sphérique rentrera grâce à cette propriété dans le cadre d'application du problème des deux corps, tant qu'une collision sera évitée bien sûr ! En toute rigueur cependant, ce n'est pas vrai. Si l'un des deux corps est à symétrie sphérique et l'autre ponctuel⁵, on est encore dans ce cadre, mais plus tout à fait si les *deux* corps sont de tailles non nulles, par l'exemple la Terre et la Lune. Le problème vient du fait qu'à cause de la taille pas si ridicule que cela de la Lune au regard de sa distance à la Terre, le champ gravitationnel créé par la Terre en divers points de la Lune n'est pas le même partout. Il en résulte des tensions internes dans la Lune qui finissent par affecter son mouvement orbital selon un mode que nous ne décrirons pas. Ces effets (mineurs) rentrent dans le cadre des *effets de marée* qui viennent s'ajouter au strict cadre du problème des deux corps. Ces effets sont dans le cas présent minimes et le mouvement relatif de la Terre et de la Lune peut cependant être décrit dans le cadre du problème des deux corps avec un assez bon degré d'approximation.

Nous avons également vu dans les chapitres précédents que les mouvements internes d'un système de points placé dans un champ gravitationnel uniforme n'était en rien affectés par ce champ. Ceci est encore une fois important ici, car reprenant l'exemple de la Terre et de la Lune, les deux sont plongés dans le champ gravitationnel du Soleil. Leur mouvement relatif pourra cependant être décrit dans le cadre du problème des deux corps. Bien entendu il s'agit là encore d'une approximation, car la Lune et la Terre ne voient pas tout-à-fait le *même* champ de la part du Soleil. C'est encore un problème d'effet de marée...

Quoi qu'il en soit, pour l'étude du problème des deux corps, nous pouvons utiliser le formalisme relatif aux systèmes à deux corps vu au chapitre 5. Nous introduisons donc naturellement la masse réduite μ , la masse totale M et le rayon vecteur $\vec{r}$ allant de la masse 1 à la masse 2 ($\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$). Le mouvement relatif (c'est lui qui nous intéresse) obéit alors à l'équation (5.25), soit

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad , \quad (7.27)$$

⁵Un satellite artificiel autour de la Terre par exemple...

où $\vec{F}$ est la force exercée par la masse 1 sur la masse 2 (Fig. 5.3). La force $\vec{F}$ est une force d'interaction gravitationnelle entre les deux masses. Compte tenu de la définition de $\vec{r}$, nous pouvons donc écrire

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \quad . \quad (7.28)$$

En reportant dans l'équation du dessus et en explicitant μ , il vient

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3} \vec{r} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}} \quad . \quad (7.29)$$

Ceci constitue l'équation de base du mouvement relatif des deux corps. Nous pouvons l'obtenir alternativement à partir de la relation fondamentale de la dynamique appliquée directement aux deux corps :

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \quad \text{et} \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \quad . \quad (7.30)$$

En divisant les deux dernières équations par m_2 et m_1 respectivement et en soustrayant membre à membre, nous réobtenons bien l'équation de base (7.29).

Cette équation est celle du *mouvement Képlérien* tel qu'il a été décrit au début du XVII^e siècle pour le mouvement des planètes autour du Soleil.

7.2.2 Le mouvement Képlérien. Etude énergétique

Le mouvement Képlérien est celui de la particule fictive du système à deux corps, de masse μ , et obéissant à l'équation (7.29). C'est le mouvement d'une particule soumise à l'attraction gravitationnelle d'un centre de masse M . Il s'agit clairement d'un mouvement à force centrale, et nous allons pouvoir y appliquer le formalisme qui a été développé plus haut. Nous pouvons d'ores et déjà donc affirmer que le mouvement (en $\vec{r}$) est plan et obéit à la loi des aires.

Remarquons à ce niveau que nous avons une relation de proportionnalité évidente entre $\vec{r}$ et les vecteurs positions des deux corps dans le repère barycentrique, à savoir $\vec{r}_1 = -m_2/M \vec{r}$ et $\vec{r}_2 = m_1/M \vec{r}$. Par conséquent les mouvements absolus se déduisent du mouvement relatif par simple homothétie. Les deux corps gravitent donc nécessairement dans le même plan fixe (le même que celui de $\vec{r}$), en obéissant chacun à la loi des aires.

Plaçons-nous donc dans le plan du mouvement et raisonnons en coordonnées polaires. Par continuité avec ce qui précède, nous continuerons à appeler r la norme de $\vec{r}$ au lieu de ρ , mais que l'on se rassure, cela ne change rien. . .

La première intégrale première du mouvement que nous connaissons est celle de la constante des aires, soit

$$r^2 \dot{\theta} = C \quad . \quad (7.31)$$

Rappelons que la norme du moment cinétique total vaut μC . La force $\vec{F}$ d'interaction dérive d'une énergie potentielle comme nous l'avons vu au chapitre 6 [Eq. (6.17)], valant :

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{G\mu M}{r} \quad . \quad (7.32)$$

Par conséquent le système est mécaniquement isolé, et l'énergie mécanique totale se conserve, ce qui constitue notre deuxième intégrale première :

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G\mu M}{r} \quad , \quad (7.33)$$

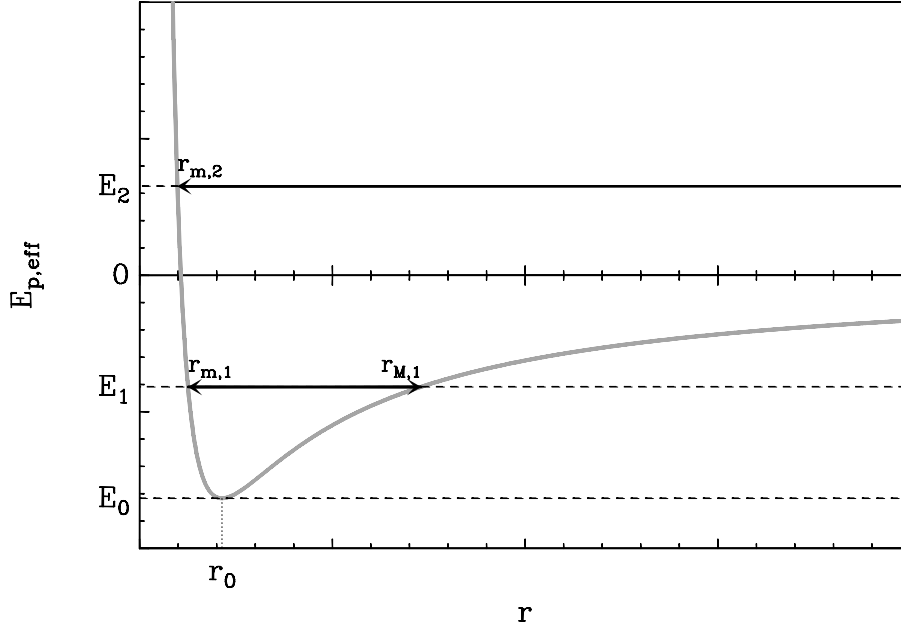


FIG. 7.4: Diagramme d'énergie du mouvement képlérien utilisant l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}$. On y lit les différents régimes du mouvement.

où v est la vitesse relative. Remarquons que dans cette dernière expression on peut factoriser μ de telle sorte que E/μ se conserve également. E/μ est l'énergie par unité de masse.

Avant de résoudre explicitement le mouvement, nous allons effectuer une étude énergétique qui nous renseignera sur les bornes du mouvement, et ce sans le moindre calcul. Nous pouvons écrire l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}$ et réécrire l'énergie sous la forme (7.26) :

$$E_{p,eff} = \frac{1}{2}\mu \frac{C^2}{r^2} - \frac{G\mu M}{r} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + E_{p,eff} \quad . \quad (7.34)$$

Nous pouvons maintenant dresser un diagramme d'énergie du mouvement comme nous l'avons vu au chapitre 4, mais en traçant l'énergie potentielle effective en fonction de r . Un tel diagramme est représenté sur la figure 7.4. L'énergie potentielle effective en fonction de r est représentée par la courbe en gris. L'allure de cette courbe est toujours la même. Pour r petit, elle est positive, décroissante (le terme $\propto 1/r^2$ domine) ; elle passe ensuite par un minimum négatif E_0 pour $r = r_0$ ⁶, puis se remet à croître tout en restant négative. Pour $r \rightarrow +\infty$, $E_{p,eff}$ tend vers 0.

Suivant la valeur de l'énergie totale E , nous pouvons aisément distinguer plusieurs cas. Rappelons que par construction de (7.26), nous devons toujours avoir $E_{p,eff} \leq E$. Il ne peut donc y avoir de mouvement possible que si $E \geq E_0$. Nous distinguerons 3 cas :

- Si $E = E_0$, alors la seule valeur de r garantissant $E_{p,eff} \leq E$ est $r = r_0$. r reste fixé à r_0 et le mouvement est circulaire autour du centre. Il est même circulaire uniforme en vertu de la conservation de l'énergie. Ceci signifie que pour une constante des aires C donnée, le mouvement circulaire correspondant est celui qui a l'énergie minimale ;
- Si $E_0 < E < 0$ ($E = E_1$ sur la figure 7.26), la droite $E = E_1$ coupe la courbe en deux points $r_{m,1}$ et $r_{M,1}$. Nécessairement le mouvement ne peut se faire qu'entre ces deux valeurs. Il est facile de voir r oscille entre $r_{m,1}$ et $r_{M,1}$ pendant que le mobile tourne autour du centre selon la loi des aires. La plus petite de ces valeurs est appelée *périastre*, et représente la valeur d'approche maximale des deux corps, la plus grande s'appelle *apoastre*. Les deux corps ne peuvent pas s'éloigner de plus de cette valeur. Nous retrouvons bien un état lié ;

⁶Les valeurs de r_0 et E_0 , ainsi que celles de $r_{m,1}$, $r_{M,1}$ et $r_{m,2}$ se calculent aisément. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ce calcul.

- Si $E \geq 0$ ($E = E_2$ sur la figure 7.26), la droite $E = E_2$ ne coupe plus la courbe qu'en un seul point $r_{m,2}$ (toujours appelé périastre), et la seule contrainte est que $r \geq r_{m,2}$ au cours du mouvement. On voit bien dans ce cas que suivant les conditions initiales, les deux corps peuvent ou non passer par un périastre, mais finiront ensuite par s'éloigner jusqu'à l'infini. On a bien un état non-lié.

Remarquons à ce niveau que le diagramme d'énergie ne nous renseigne en rien sur la nature et la forme de la trajectoire. Comme nous l'avons dit plus haut, cela tient au fait que le mouvement n'est pas monodimensionnel. Nous verrons plus loin que les divers cas évoqués plus haut correspondent à des trajectoires circulaires, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques suivant les cas, mais le diagramme d'énergie ne nous le dit pas pour l'instant. Il nous donne toutefois les bornes radiales du mouvement et sa nature (lié ou non), et ce sans avoir à résoudre le mouvement.

7.2.3 Le mouvement Képlérien. Résolution

Obtention de l'équation polaire de la trajectoire

Pour aller plus loin, il est nécessaire de résoudre complètement le mouvement, c'est-à-dire l'équation (7.29). Il y a plusieurs manières d'y parvenir. Nous utiliserons ici les formules de Binet que nous avons introduites plus haut. Nous définissons donc $u = 1/r$ et nous écrivons la deuxième formule (7.18), à savoir

$$F = \mu C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad , \quad (7.35)$$

avec pour convention $F > 0$ si la force est attractive, ce qui est le cas ici. Nous explicitons maintenant la forme de F :

$$\mu C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \frac{G\mu M}{r^2} = G\mu M u^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}} \quad . \quad (7.36)$$

Cette dernière équation différentielle se résout aisément. C'est en effet une équation linéaire avec second membre. L'équation sans second membre (sans GM/C^2) est celle d'un oscillateur harmonique de fréquence 1. La solution est $u = A \cos(\theta - \theta_0)$ où A et θ_0 sont des constantes d'intégration. La solution de l'équation complète (7.36) s'obtient en ajoutant cette solution générale à une solution particulière de l'équation complète, par exemple la solution constante $u = GM/C^2$. En définitive, la solution complète de (7.36) s'écrit

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{C^2} \quad . \quad (7.37)$$

Nous repassons maintenant à $r = 1/u$, ce qui donne

$$r = \frac{1}{A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{C^2}} = \frac{C^2}{GM} \frac{1}{1 + \frac{AC^2}{GM} \cos(\theta - \theta_0)} \quad , \quad (7.38)$$

ce qui constitue une équation polaire (r en fonction de θ) de la trajectoire.

Remarquons à ce niveau qu'il est toujours possible de choisir $\theta_0 = 0$. En effet, il suffit pour cela de changer de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, en faisant tourner les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'un angle θ_0 autour de l'axe OZ . Ceci ne change rien à la distance r mais décale l'angle polaire θ de la valeur

θ_0 ⁷. L'angle θ_0 ne traduit que l'orientation de la trajectoire dans le plan du mouvement. Nous ne faisons que choisir les nouveaux axes OX et OY en suivant cette orientation. On définit maintenant les variables

$$p = \frac{C^2}{GM} \quad \text{et} \quad e = \frac{AC^2}{GM} = Ap \quad , \quad (7.39)$$

de telle sorte que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}} \quad . \quad (7.40)$$

Signalons qu'en astrométrie traditionnelle, on appelle souvent r *rayon vecteur* et θ *anomalie vraie*. Il est intéressant de déterminer la dimension des quantités e et p . Nous vous le laissons en exercice. A partir des diverses quantités introduites plus haut, on trouve facilement que p est homogène à une longueur et que e est une quantité sans dimension. p est clairement une quantité positive, et il est toujours possible de s'arranger pour que e le soit aussi. En effet si $e < 0$ il suffit de choisir $\theta_0 = \pi$ au lieu de $\theta_0 = 0$ pour en changer le signe, ce qui revient en fait à faire faire une rotation d'angle π aux axes OX et OY .

Discussion sur la nature des courbes

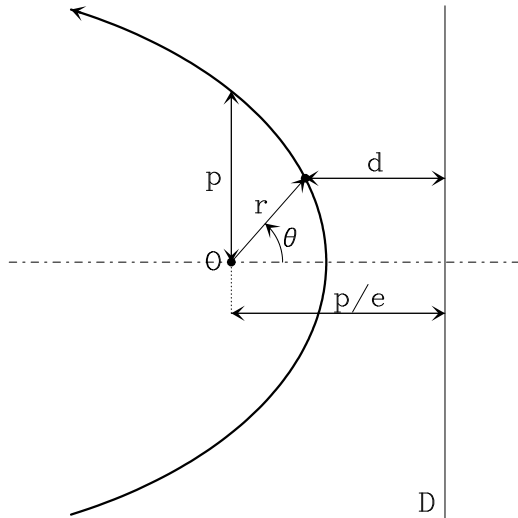


FIG. 7.5: Définition géométrique d'une conique de paramètre p et d'excentricité e en fonction de son foyer et de sa directrice.

L'équation polaire (7.40) est celle d'une conique d'excentricité e et de paramètre p , rapportée à un de ces foyers. Géométriquement, une telle conique peut se définir dans un plan comme le lieu des points tels que la distance r au foyer O et la distance d à une droite directrice D vérifie

$$\frac{r}{d} = e = \text{constante} \quad , \quad (7.41)$$

la distance du foyer O à la directrice D valant p/e . Cette définition est illustrée sur la figure 7.5. Un raisonnement trigonométrique simple à partir de cette figure assorti de la condition $d = r/e$ montre aisément⁸ que la courbe vérifie l'équation polaire (7.40).

Le paramètre p détermine les dimensions de la courbe. Leur nature dépend quant à elle de l'excentricité e , et plus précisément de sa position par rapport à 1. Les diverses formes sont schématisées sur la figure 7.6. Nous allons détailler cela maintenant. Il y a quatre cas :

- Si $e = 0$, il est facile de voir que dans ce cas r ne dépend plus de θ . C'est donc une constante du mouvement. La trajectoire est un cercle. Nous nous retrouvons dans le cas d'orbite circulaire vu plus haut ;

⁷Le nouvel axe OX est placé dans la direction θ_0 .

⁸On a de manière claire $p/e = r \cos \theta + d$.

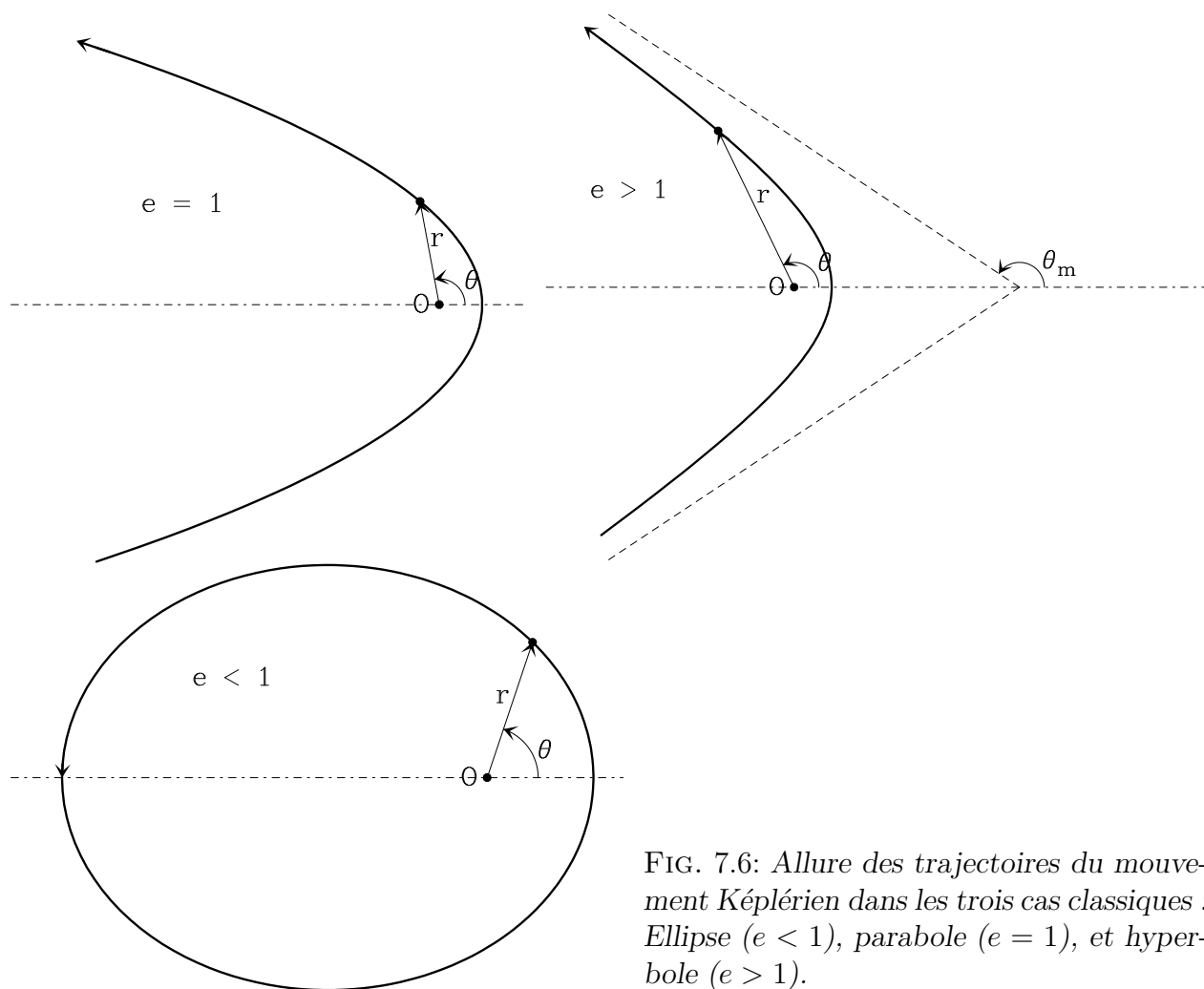


FIG. 7.6: Allure des trajectoires du mouvement képlérien dans les trois cas classiques : Ellipse ($e < 1$), parabole ($e = 1$), et hyperbole ($e > 1$).

- Si $e < 1$, nous voyons que le dénominateur dans (7.40) ne s'annule jamais. La courbe ne possède pas de branche infinie. La trajectoire est une courbe fermée, et le mobile parcourt indéfiniment la même orbite, r passant alternativement d'un minimum (périastre) pour $\theta = 0$ à un maximum (apoastre) pour $\theta = \pi$. Nous retrouvons bien l'état lié. La trajectoire est en fait une *ellipse* (Fig. 7.6). C'est bien entendu le type d'orbite qui correspond aux cas usuels des planètes autour du Soleil, de la Lune et des satellites artificiels autour de la Terre, etc. . . Nous reviendrons plus en détail sur ce mouvement plus bas ;
- Si $e = 1$, dans ce cas la courbe possède une branche infinie pour $\theta \rightarrow \pi$. La trajectoire est une *parabole* qui n'est parcourue qu'une fois⁹, La distance r passe toujours par un périastre (valant ici $p/2$) en $\theta = 0$. C'est un état non lié. Dans la nature, de nombreuses comètes ont des orbites autour du Soleil très proches de cet état particulier ;
- Si $e > 1$, le courbe possède aussi des branches infinies. En fait, il existe un angle θ_m compris entre $\pi/2$ et π ($\cos \theta_m = -1/e$) qui annule le dénominateur dans (7.40). Comme le rayon vecteur r est une quantité essentiellement positive, la courbe n'a de réalité physique que pour $-\theta_m < \theta < \theta_m$. Il s'agit d'une *branche d'hyperbole*, r tendant vers l'infini au voisinage de $\theta = \pm\theta_m$. La particularité de cette courbe est de posséder des *asymptotes* en $\theta = \pm\theta_m$ (En pointillé sur la figure 7.6). Mathématiquement, l'hyperbole possède également une autre branche symétrique par rapport au point de concours des asymptotes, mais elle

⁹Ceux qui connaissent les paraboles sous la forme d'équation cartésienne de type $y^2 = \alpha x + \beta$ n'ont qu'à dériver une telle équation à partir de l'équation polaire pour s'en convaincre. C'est un excellent exercice !

n'a pas de réalité physique dans le mouvement¹⁰. Les directions des asymptotes sont déterminées par l'angle θ_m . Plus l'excentricité est grande, plus θ_m est proche de $\pi/2$, et plus l'hyperbole est ouverte. Bien entendu la trajectoire n'est parcourue qu'une fois, avec un passage au périastre en $\theta = 0$. Il s'agit d'un état non lié. Dans la pratique, compte tenu de l'existence des asymptotes, le mouvement mutuel des deux astres est en fait proche d'un mouvement rectiligne uniforme loin du périastre (on confond la courbe avec l'asymptote). Après le passage au périastre, le mouvement se confond de nouveau avec un mouvement rectiligne uniforme, mais sur l'autre asymptote, et au final, le passage au périastre se traduit par une *dévi*ation angulaire χ du mouvement des deux astres ($\chi = \pi - 2\theta_m$), et c'est là le paramètre le plus important de ce type de mouvement. Vu de loin donc, le mouvement est en fait un *choc élastique* entre les deux objets (l'énergie se conserve) tel que nous l'avons décrit en 5.3, et schématisé sur la figure 5.4. Bien sûr il n'y a pas de contact physique entre les deux corps mais il y a quand même interaction lorsqu'ils se rapprochent ce qui justifie l'appellation « choc » (ou rencontre). Ce type de mouvement se trouve dans la Galaxie lorsqu'au gré de leur mouvement autour du centre, deux étoiles viennent à passer (moyennement) proches l'une de l'autre. Il en résulte alors une déviation des deux étoiles, et ce phénomène est à l'origine de l'évolution à long terme de la Galaxie appelée *relaxation*. Plus proche de nous, nous retrouvons un mouvement hyperbolique lorsque qu'une sonde spatiale se voit passer au voisinage d'une planète et être déviée par sa gravité.

Retour sur l'étude énergétique

Il est intéressant de calculer l'énergie mécanique (constante) du mouvement en fonction des paramètres géométriques de la trajectoire. Ainsi nous ferons le lien avec l'étude énergétique faite plus haut. L'énergie se calcule à partir de l'équation (7.33). Il y a plusieurs manières d'y parvenir. Il nous faut calculer le carré de la vitesse v^2 . Un bon moyen pour y parvenir, puisque nous connaissons l'équation polaire de la trajectoire, est d'utiliser la première formule de Binet (7.16) :

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{1 + e \cos \theta}{p} \right)^2 + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right] \quad \text{car} \quad u = \frac{1 + e \cos \theta}{p} \quad . \quad (7.42)$$

Une fois simplifié, et en tenant compte de $C^2 = pGM$ (Eq. 7.39), il vient

$$v^2 = \frac{GM(1 + 2e \cos \theta + e^2)}{p} \quad . \quad (7.43)$$

Il n'y a plus alors qu'à reporter dans (7.33). On en tire après simplification :

$$\boxed{E = \frac{G\mu M(e^2 - 1)}{p}} \quad . \quad (7.44)$$

Nous retrouvons bien au passage le fait que E est une constante du mouvement, car l'expression trouvée ne dépend pas de θ , et rappelons également que le moment cinétique vaut quant à lui μC , par définition de C . Mais surtout, nous faisons là le lien entre l'étude énergétique faite plus haut et la discussion sur la forme des trajectoires : le cas $e < 1$ (orbite elliptique) correspond

¹⁰Cette autre branche est celle qui se trouve parcourue dans le cas d'un mouvement Képlérien *répulsif* (Force $\vec{F}$ toujours $\propto 1/r^2$ mais répulsive). Ce ne sera jamais le cas pour la gravitation, mais correspondra par exemple au mouvement mutuel de deux particules chargées de même signe.

bien à l'état lié $E < 0$; le cas $e = 1$ (orbite parabolique) correspond à $E = 0$, c'est à dire à l'état de libération. C'est la transition entre l'état lié et l'état non lié ; enfin, le cas $e > 0$ correspond à $E > 0$, donc à l'état non lié de diffusion. Toutes les conclusions de l'étude énergétique sont retrouvées.

7.2.4 Le mouvement Képlérien. Mouvement elliptique

Demi-grand axe et excentricité

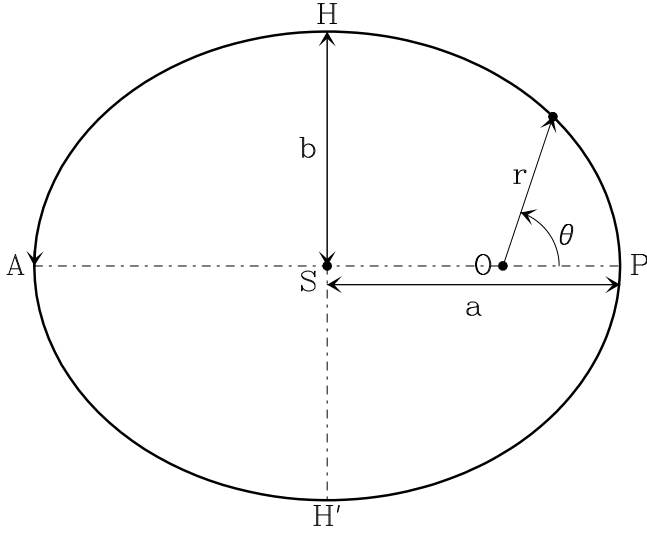


FIG. 7.7: La trajectoire elliptique : points importants et grandeurs géométriques

Nous allons nous focaliser ici plus particulièrement sur le mouvement elliptique, car c'est celui qui concerne la plupart des astres qui nous sont familiers. Comme on peut le constater sur la figure 7.6 et plus précisément sur la figure 7.7, la courbe possède un centre de symétrie S qui *ne coïncide pas* avec le centre O du mouvement (sauf dans le cas $e = 0$), et ce fait ne pouvait pas être prévu auparavant.

Une ellipse est avant tout caractérisée par son excentricité et son *demi-grand axe*, noté traditionnellement a ($a = SP = SA$ sur la figure 7.7). On introduit aussi le *demi-petit axe* b ($b = SH = SH'$ sur la figure 7.7), avec pour rapport entre les deux

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad . \quad (7.45)$$

La mouvement est quant à lui surtout caractérisé par son *périastre* $q = OP$ et son *apoastre* $Q = OA$. Ces deux grandeurs s'obtiennent indépendamment par application de (7.40) pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, soit

$$q = \frac{p}{1 + e} \quad \text{et} \quad Q = \frac{p}{1 - e} \quad . \quad (7.46)$$

En faisant la somme des deux, on trouve le lien entre demi-grand axe a et paramètre p :

$$\frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = q + Q = OP + OA = AP = 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = a(1 - e^2)} \quad . \quad (7.47)$$

Périastre et apoastre peuvent alors s'exprimer en fonction du demi-grand axe a . On trouve

$$\boxed{q = a(1 - e)} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = a(1 + e)} \quad . \quad (7.48)$$

La relation entre a et b illustre bien géométriquement à quoi correspond l'excentricité. Si $e = 0$, on a $a = b$, et on voit bien que l'orbite est un cercle. Si e est faible, l'ellipse restera proche d'un cercle avec $a \approx b$, et $q \approx Q$. S est pratiquement confondu avec O . C'est le cas des orbites de presque toutes les planètes du Système Solaire autour du Soleil. L'excentricité de l'orbite terrestre est par exemple de 0.0167. Il n'empêche, même avec une excentricité aussi faible, même si vue de dessus l'orbite terrestre ressemble à s'y méprendre à un cercle, la distance de la Terre au Soleil passe tout de même de 147 millions de kilomètres au périastre (appelé dans ce cas *périhélie*) à 152 à l'apoastre (ici *aphélie*), ce qui induit une variation de l'ordre de 6.7 % dans le flux de rayonnement solaire reçu au niveau de la Terre. Ce n'est donc pas négligeable.

Si à l'inverse e est proche de 1, l'ellipse est très aplatie, car $b \ll a$. Dans ce cas $q \ll Q$. Ce cas de figure sera celui des comètes périodiques dans le Système Solaire, comme la célèbre comète de Halley qui suit autour du Soleil une orbite d'une période de 75 ans, avec un périhélie bien à l'intérieur de l'orbite terrestre, et un aphélie proche de l'orbite de la planète Neptune, soit près de 40 fois plus loin. Rappelons également que le mouvement sur la trajectoire ne se fait pas à vitesse constante, mais obéit à la loi des aires $r^2\dot{\theta} = C$. En conséquence, la comète va beaucoup plus vite lorsque r est faible, c'est à dire au périhélie, qu'à l'aphélie. En fait, dans le cas d'une orbite très elliptique comme celle de la comète de Halley, le temps de passage aux alentours du périhélie est une petite fraction de l'ensemble de la période orbitale, l'objet passant le plus clair de son temps à faible vitesse autour de son aphélie.

Evidemment tous les cas intermédiaires entre $e = 0$ et $e = 1$ existent dans l'Univers. Ce n'est qu'au-delà de $e \simeq 0.4$ qu'une ellipse prend véritablement une forme ovale. A titre indicatif, l'ellipse représentée sur la figure 7.7 a une excentricité égale à 0.6.

Dans le cas des orbites elliptiques, on préfère en général exprimer les caractéristiques de l'orbite en fonction du demi-grand axe a plutôt que du paramètre p . C'est ainsi qu'à partir de (7.47), on réécrit volontiers l'équation paramétrique (7.40) sous la forme

$$\boxed{r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}} \quad . \quad (7.49)$$

De même, l'énergie (7.44) peut se réécrire

$$\boxed{E = -\frac{G\mu M}{2a} = -\frac{Gm_1 m_2}{2a}} \quad . \quad (7.50)$$

La constante des aires s'écrit

$$C = \sqrt{pGM} = \sqrt{aGM(1 - e^2)} \quad . \quad (7.51)$$

Nous retrouvons bien au passage que $E < 0$, mais il y a plus. Il est tout à fait remarquable que l'expression de l'énergie ne dépende que du demi-grand axe a sans faire intervenir l'excentricité e . C'est une des caractéristiques mécaniques importantes du mouvement Képlérien¹¹. Le demi-grand axe fixe l'énergie de l'orbite, ensuite l'excentricité est fixée par la constante des aires, c'est-à-dire le moment cinétique.

Lois de Kepler

Au début du XVII^e siècle, c'est-à-dire avant la découverte de la Gravitation Universelle par Newton (1687), Johannes Kepler (1571–1630) publia, sur la base d'une étude précise de l'orbite de la planète Mars, trois lois censées régir les mouvements orbitaux des planètes autour du Soleil. Insistons bien sur le fait que ces lois étaient au départ *empiriques*, c'est-à-dire découvertes sur la simple base de l'observation. Ces trois lois sont les suivantes :

1. Les planètes du Système Solaire décrivent autour du Soleil des ellipses dont ce dernier occupe un des foyers ;
2. lors de ce mouvement, les planètes balayent des aires proportionnelles au temps ;
3. sur l'ensemble des planètes du Système Solaire, les carrés des périodes de révolution autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes orbitaux.

¹¹Mathématiquement, c'est une forme de dégénérescence.

Ces lois représentaient à l'époque un progrès et une simplification considérables par rapport aux combinaisons compliquées de mouvements circulaires utilisées auparavant pour rendre compte des observations. C'est sur la base de ces lois que Newton a développé sa théorie de la gravitation. Dans ce cours nous avons adopté une démarche déductive à partir de la théorie de la gravitation, nous devons donc retrouver ces lois.

Nous venons d'examiner la première loi, qui ne fait que traduire le mouvement d'orbite elliptique que nous avons trouvé. La deuxième loi n'est rien d'autre que la loi des aires, et est en fait valable pour tout mouvement à force centrale ; elle traduit la conservation du moment cinétique. Reste à établir la troisième loi, ce qui revient à déduire la période orbitale du mouvement elliptique. Pour cela, nous revenons sur la loi des aires, et en particulier sur la vitesse aréolaire (7.9). Supposons qu'à $t = 0$ les deux corps passent au périastre¹². Nous avons alors

$$S(t) = \frac{1}{2}Ct \quad , \quad (7.52)$$

où S est l'aire balayée et C la constante des aires. Au bout d'une période orbitale ($t = T$), l'aire balayée est égale à la surface totale de l'ellipse

$$S_{\text{ell}} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad , \quad (7.53)$$

où a et b sont, rappelons-le, le demi-grand axe et demi-petit axe. En reportant, nous en déduisons

$$S_{\text{ell}} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2}CT = \frac{T}{2} \sqrt{aGM(1 - e^2)} \quad , \quad (7.54)$$

compte tenu de (7.51). Cette dernière équation peut se réécrire sous la forme

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}} \quad . \quad (7.55)$$

Or $M = m_1 + m_2$. Pour chaque planète du Système Solaire, l'un des astres est la planète, et l'autre le Soleil. Or la masse du Soleil est largement plus grande que celle de toutes les planètes, de telle sorte qu'on ait toujours $M \simeq M_{\odot}$ (masse du Soleil). Ainsi on en déduit que T^2/a^3 est pratiquement une constante pour toutes les planètes, ce qui constitue bien l'énoncé de la troisième loi de Képler. La encore, on remarquera que la période orbitale ne dépend que du demi-grand axe et non de l'excentricité.

Cette loi est d'un intérêt pratique considérable, car elle permet de calculer la masses de corps célestes une fois que leurs mouvements relatifs (demi-grand axe et période orbitale) sont déterminés.

Orbites réelles et éléments d'orbite

Pour des corps de masse connue, la forme et les dimensions d'une orbite elliptique sont entièrement fixées par la donnée du demi-grand axe a et de l'excentricité e . Mais pour que l'orbite soit entièrement connue, il nous faut connaître un certain nombre d'autres paramètres qui aident à positionner l'orbite dans l'espace. Au cours du raisonnement des pages précédentes, nous avons dit « nous placer dans le plan du mouvement », et « considérer que le périastre était dans la direction de OX ($\theta_0 = 0$) ». On peut toujours faire cela, mais à condition de connaître le plan du mouvement et la direction du périastre par rapport à un repère fixe. C'est l'objet des autres paramètres que nous devons introduire. Supposons donc que nous ayons un repère fixe

¹²Il suffit pour cela de fixer convenablement l'origine des temps.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui servira de référence, et que nous cherchons à y préciser entièrement une orbite Képlérienne donnée dans l'espace autour de O . Nous supposons connus le demi-grand axe a et l'excentricité e . Précisons la position du plan de l'orbite. Il coupe le plan (OXY) en une droite (NON') appelée ligne des nœuds (Fig. 7.8). N désignera par convention celui des deux points où l'orbite coupe (OXY) où la coordonnées z de l'objet croît. C'est le nœud ascendant.

- L'angle $\Omega = (\vec{OX}, \vec{ON})$ est appelé *longitude du nœud ascendant*.
- L'angle $i = (\vec{OZ}, \vec{k})$ est appelé *inclinaison*; i est compté de 0 à 180° .
- L'angle $\omega = (\vec{ON}, \vec{u}_0)$ est appelé *argument du périastre* et sert à préciser la position de l'orbite dans son plan. Il correspond en gros à l'angle θ_0 introduit plus haut.
- Finalement, il est d'usage de donner un temps de passage au périastre t_p pour distinguer plusieurs objets sur la même orbite.

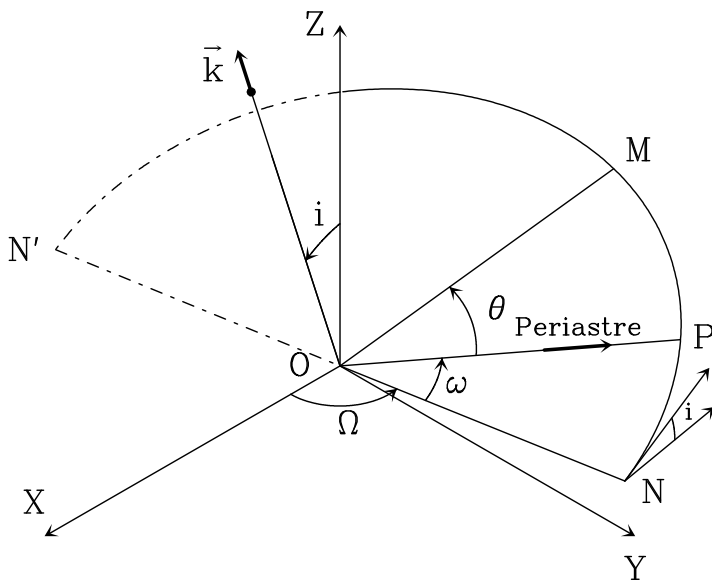


FIG. 7.8: Les éléments d'orbite

En résumé, les 6 constantes usuelles d'intégration du mouvement ou *éléments d'orbite* sont $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$. a donne la « taille », les « dimensions » de l'orbite; e donne sa forme; i et Ω donnent la position dans l'espace du plan de l'orbite. ω donne la position de l'orbite dans son plan, et t_p donne un point de référence dans le temps.

Dans le cas des planètes du Système Solaire, inclinaisons et excentricités sont en général faibles. Les demi-grands axes sont à peu près régulièrement espacés. Par contre, les autres éléments n'obéissent à aucun ordre et sont quelconques.

Au bout de cette étude, il ne faut pas oublier que le mouvement orbital que nous décrivons est celui du mouvement

relatif des deux corps. Dans leur référentiel barycentrique, les *deux* corps sont en mouvement. Leur mouvement par rapport au centre de gravité commun se déduit simplement du mouvement relatif par les relations de proportionnalité déjà vues :

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{r} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad . \quad (7.56)$$

Ainsi les deux corps suivent chacun autour du centre de gravité commun une orbite qui se déduit de l'orbite du mouvement relatif par simple homothétie. Ce sont des orbites elliptiques de même excentricité mais de demi-grands axes a_1 et a_2 reliés à a par les mêmes relations de proportionnalité. Ainsi ne suffit-il que de décrire l'orbite mutuelle¹³ pour connaître le mouvement. A partir de là, deux cas se présentent :

- Soit m_1 et m_2 sont du même ordre de grandeur, et dans ce cas les deux orbites sont de tailles comparables; on ne peut pas oublier la réalité du mouvement. Ce cas de figure sera celui, très courant dans l'Univers, des systèmes d'étoiles doubles;
- Soit l'une des deux masses est beaucoup plus petite que l'autre, par exemple $m_2 \ll m_1$. Dans ce cas, le centre de gravité est très proche du corps 1, et l'orbite de ce dernier autour du centre de gravité commun est très petite par rapport à l'orbite mutuelle, qui est quant

¹³ce qui revient à se placer dans un repère où m_1 est immobile et occupe le centre.

à elle très voisine de l'orbite du corps 2, à tel point qu'on peut raisonnablement dire dans un léger abus de langage que « le corps 2 gravite autour du corps 1 », ce dernier restant immobile. Ce cas de figure correspond bien évidemment au cas planétaire.

Cette vision du deuxième cas est bien sûr une approximation, d'autant mieux vérifiée que le rapport m_1/m_2 est grand. L'approximation est à coup sûr excellente dans le cas d'un satellite artificiel en orbite autour de la Terre, où m_1/m_2 est de l'ordre de 10^{20} au moins. Elle l'est aussi dans le cas de la Terre autour du Soleil, où $m_1/m_2 = 328900$, et un peu moins bien dans le cas de la planète Jupiter autour du Soleil (318 fois plus massive que la Terre ; $m_1/m_2 = 1047.355$). L'approximation est carrément médiocre (bien que classique !) dans le cas de la Lune autour de la Terre, avec $m_1/m_2 = 81$ seulement.

Une première conséquence de cela est que la troisième loi de Képler n'est qu'approximative. En effet, la formule (7.55) est exacte, mais y intervient la masse totale $M = m_1 + m_2$. Dans le cas des planètes du Système Solaire, cette masse totale varie de planète à planète, même si pour l'essentiel elle est égale à la masse du Soleil, donc T^2/a^3 n'est pas tout-à-fait le même pour toutes les planètes.

Une autre conséquence importante est que dans le référentiel barycentrique du Système Solaire, le Soleil n'est pas tout-à-fait immobile, puisque chaque planète lui impose un mouvement. Dans le cas de la Terre, ce mouvement est ridicule, mais plus dans le cas de la planète Jupiter. On calcule aisément que le centre de gravité du système Jupiter–Soleil est à 1.07 rayons solaires du centre du Soleil, soit juste au-dessus de la surface Solaire. Jupiter impose au Soleil dans son mouvement orbital de tourner autour de ce point fictif qui est loin d'être confondu avec son centre. Vu depuis la Terre, il nous est bien difficile de nous rendre compte de ce mouvement appelé *mouvement réflexe*, car nous sommes partie intégrante du Système Solaire et sommes à ce titre entraînés dans ce même mouvement. Mais transposons cela autour d'autres étoiles du ciel. Si une étoile donnée est accompagnée d'une ou plusieurs planètes, depuis la Terre nous devrions être capables en repérant le mouvement réflexe de l'étoile de détecter la présence de la ou des planètes, puisque nous-même ne prenons cette fois-ci pas part à ce mouvement. Il faut pour cela pouvoir repérer la position et/ou la vitesse de l'étoile par rapport au Système Solaire de manière très précise, et ce sur une durée suffisamment longue pour pouvoir y détecter des variations périodiques. C'est difficile, mais néanmoins possible, et fut couronné de succès pour la première fois en 1995. A ce jour (07/05/2009), plus de 300 planètes dites *extrasolaires* ont été découvertes par cette méthode, et ce nombre est en constante augmentation.¹⁴

7.3 Pistes de réflexion sans équations (ou presque)

7.3.1 Le problème des N corps

Le problème (classique) des N corps est la généralisation à un nombre de corps quelconque du problème des deux corps que nous venons d'examiner. On peut le formuler ainsi :

Trouver le mouvement de N points matériels massifs s'attirant mutuellement selon la loi de la gravitation de Newton.

On réserve traditionnellement le terme de *dynamique stellaire* au cas où N est grand ($\gtrsim 100$), tandis qu'on classe dans la *mécanique céleste* le cas où N est petit (typiquement 10). La dynamique stellaire s'est développée au XX^e siècle avec la découverte de nombreux systèmes

¹⁴Pour en savoir plus sur ce sujet, nous vous recommandons la visite de l'excellent site Web « Encyclopédie des Planètes Extrasolaires », de l'Observatoire de Meudon : <http://www.obspm.fr/encycl/f-encycl.html>

stellaires : amas d'étoiles ou galaxies. La mécanique céleste est plus ancienne. Elle s'applique surtout à décrire les mouvements dans le Système Solaire.

Bien que dans les deux cas, le problème soit formellement le même, les buts et les méthodes de la dynamique stellaire sont profondément différents de ceux de la mécanique céleste. Les deux domaines ont finalement peu de points communs. La mécanique céleste s'attachera à décrire le mouvement de *chaque* point du système. En dynamique stellaire, avec d'aussi grandes valeurs de N que plusieurs milliards (galaxies), il est hors de question de suivre exactement l'orbite de chaque objet. On recourt plutôt à une description statistique du système, d'autant plus justifiée que seules les propriétés d'ensemble du système sont recherchées.

Considérons donc N corps, numérotés de 1 à N . Nous nous placerons dans le référentiel barycentrique de l'ensemble. Chaque corps de masse m_i y est repéré par son vecteur position $\vec{r}_i$, et est soumis aux attractions gravitationnelles des $N - 1$ autres. L'application de la relation fondamentale de la dynamique donne le système des équations du mouvement :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \frac{Gm_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad . \quad (7.57)$$

Toute la mécanique céleste, et toute la dynamique stellaire sont contenues dans l'équation (7.57). C'est un système différentiel d'ordre $6N$. Il y a déjà un certain nombre de choses que l'on peut affirmer sur ces équations :

- Premièrement, comme nous nous sommes placés dans le référentiel barycentrique, le vecteur position d'un des corps s'exprime en fonction des autres. Nous avons

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{0} \quad . \quad (7.58)$$

C'est cette considération qui nous a permis dans le cas $N = 2$ de n'avoir à étudier que le mouvement relatif des deux corps, c'est-à-dire le seul vecteur $\vec{r}$. Avec $N > 2$, c'est plus compliqué car il ne reste pas qu'un seul vecteur $\vec{r}$. Il existe des jeux de coordonnées adaptés suivant les cas qui tiennent compte de ce fait ;

- Les forces gravitationnelles entre les N corps sont bien évidemment radiales ; comme le système est supposé isolé¹⁵, nous en déduisons que le moment cinétique $\vec{L}$ (par rapport à O , implicitement) du système est constant. Si nous explicitons, cela donne

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i = \text{constante} \quad ; \quad (7.59)$$

- Les mêmes forces gravitationnelles entre les N corps sont bien évidemment conservatives, et dérivent toutes d'une énergie potentielle de type (6.17). Par application du théorème de l'énergie mécanique, l'énergie mécanique de l'ensemble est constante, ce qui s'écrit sous la forme

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \text{constante} \quad . \quad (7.60)$$

Malheureusement, ici s'arrête tout ce qu'on peut dire d'exact sur le problème des N corps. En dehors du cas $N = 2$ que nous avons traité plus haut, *il n'existe aucune solution générale analytique du problème des N corps*, et c'est là tout le « drame » de la mécanique céleste et de la dynamique stellaire. Il n'y a de plus aucun espoir qu'une solution explicite soit trouvée un

¹⁵et nous avons vu plus haut que le fait de plonger l'ensemble du système dans un champ constant ne changeait rien à l'affaire. . .

jour, pour la bonne raison qu'il a été prouvé que les systèmes à N corps, contrairement au cas $N = 2$, génèrent des comportements *chaotiques* qu'il est impossible de décrire analytiquement. Ceci est vrai dès $N = 3$. Pour étudier un système particulier, on est donc réduit aux trois voies d'approches suivantes :

- Si le système possède des propriétés particulières connues (genre un corps beaucoup plus massif que les autres, ou distances mutuelles hiérarchisées), on peut utiliser ces propriétés pour faire des approximations puis faire des développements analytiques du mouvement, le plus souvent sur la base de la solution du système à 2 corps. C'est le champ classique d'application de la mécanique céleste telle qu'elle a connu son heure de gloire dans la deuxième moitié du XIX^e siècle avec Le Verrier et Poincaré ;
- Si on ne s'intéresse qu'aux propriétés statistiques du système, on peut faire d'autres types d'approximations qui reviennent en gros à considérer le système de N corps comme un fluide. On peut ainsi dégager des propriétés globales des galaxies, expliquer leur structure spirale, etc... C'est le champ d'application de la dynamique stellaire et galactique qui s'est développée tout au long du XX^e siècle ;
- Une autre approche a pris énormément d'importance depuis quelques décennies : l'approche numérique, c'est à dire la résolution numérique approchée des équations (7.57) au moyen d'ordinateurs. Cette approche a bien sûr suivi le développement de la puissance des ordinateurs, mais ses succès ont été tels ces dernières années que plus personne n'envisage aujourd'hui ce type d'étude dynamique sans approche numérique. On peut raisonnablement parler d'une révolution de ce domaine d'étude.

Il est un cas particulier important dans un problème de type N corps, c'est celui où l'un des corps (ou éventuellement plusieurs), mettons de numéro i_0 , a une masse négligeable par rapport aux autres. Dans ce cas, dans l'équation du mouvement de chacun des *autres* corps, on peut largement négliger l'interaction gravitationnelle du corps i_0 . Au bout du compte, le système des autres corps que i_0 n'est pas affecté par le corps i_0 et se comporte comme un système à $N - 1$ corps au lieu de N . A l'inverse, examinons les équations du mouvement du corps i_0 , c'est-à-dire l'équation (7.57) appliquée à $i = i_0$. Nous voyons que ces équations se simplifient par le facteur m_{i_0} , de telle sorte que l'accélération $\vec{r}_{i_0}''$, et donc le mouvement du corps i_0 , est *indépendant de sa masse*, vu que les positions des autres corps $\vec{r}_j$ ne sont pas affectées par le corps i_0 . On dit que le corps i_0 se comporte comme une *particule test* dans le système à N corps.

Nous avons donc scindé dans ce cas le problème des N corps en deux : un problème à $N - 1$ corps, et indépendant, le mouvement d'une particule test au milieu des $N - 1$ autres. Nous avons déjà vu ce type de simplification dans le problème des 2 corps, dans le cas où $m_2 \ll m_1$. Dans ce cas, la masse totale M se confond avec la masse m_1 , le centre de gravité du système se confond avec le corps 1, et comme tout le mouvement du corps est fonction de M , nous voyons bien que celui-ci est indépendant de sa masse. Sur Terre, ceci trouve son application dans la vitesse de chute des corps qui ne dépend pas de leur masse, comme l'avait noté Galilée.

Le cas $N = 3$ est un cas important dans cette situation. Si l'un des trois corps est très peu massif par rapport aux deux autres, du coup les deux autres corps suivent une orbite Képlérienne de type 2 corps, pendant que le troisième corps a un mouvement plus compliqué dans le champ des deux autres. Ce problème est traditionnellement appelé *problème restreint des trois corps*. Et bien même dans ce cas ultra-simplifié, même si là on peut en dire un peu plus que les équations de conservation citées plus haut, il n'y a pas de solution analytique, et là aussi on trouve du chaos (dans le mouvement de la troisième particule, bien sûr). Ce mouvement sera celui d'un vaisseau spatial se déplaçant de la Terre à la Lune, d'une hypothétique planète dans un système d'étoiles doubles, ou encore d'un astéroïde perturbé par Jupiter dans le Système Solaire.

7.3.2 Le mouvement Képlérien perturbé. Dynamique du Système Solaire

En toute rigueur, le mouvement des planètes dans le Système Solaire relève de la problématique du problème des N corps. En effet, une planète comme la Terre subit certes l'influence gravitationnelle du Soleil, mais également celle des autres planètes du Système Solaire (sans parler de la Lune...). Par conséquent, il est *faux* de dire que la Terre suit une orbite Képlérienne autour du Soleil. Ce ne serait vrai que si la Terre était seule autour du Soleil, ce qui est bien sûr loin d'être le cas.

Or jusqu'alors nous avons implicitement supposé que les planètes suivaient autour du Soleil des orbites de type 2 corps. La raison est que la masse du Soleil est beaucoup plus grande que celle des autres planètes, et qu'au sein des attractions gravitationnelles que subit la Terre de la part du Soleil et des autres objets du Système Solaire (planètes,...), celle du Soleil domine largement toutes les autres, à tel point qu'on peut presque considérer que la Terre ne « voit » *que* le Soleil.

Si nous voulons écrire en toute rigueur les équations du mouvement du système formé des planètes et du Soleil, il nous faut partir des équations du mouvement des N corps (7.57). Nous ne détaillerons pas l'opération, mais on imaginera aisément qu'on aboutit pour l'équation du mouvement de la planète i à quelque chose du genre

$$\ddot{\vec{r}}_{i,\odot} = -\frac{G(M_\odot + m_i)}{r_{i,\odot}^3} \vec{r}_{i,\odot} + \vec{P} \quad , \quad (7.61)$$

où $M_\odot$ est la masse du Soleil, où $\vec{r}_{i,\odot}$ est le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète i , et où nous avons groupé dans $\vec{P}$ les contributions des autres planètes. Si $\vec{P}$ était absent, cette équation serait identique à l'équation (7.29), c'est-à-dire celle du problème des deux corps. L'important à noter ici est que

$$\|\vec{P}\| \ll \left\| \frac{G(M_\odot + m_i)}{r_{i,\odot}^3} \vec{r}_{i,\odot} \right\| = \frac{G(M_\odot + m_i)}{r_{i,\odot}^2} \quad , \quad (7.62)$$

de telle sorte que peut considérer que la planète i suit « presque » un mouvement de type Képlérien autour du Soleil. C'est toute la description du « presque » qui fait l'objet de la mécanique céleste. On dit que la planète i suit un *mouvement Képlérien perturbé*. De manière générale, on appelle mouvement Képlérien perturbé un mouvement obéissant à une équation du type

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} + \vec{P} \quad \text{avec} \quad \|\vec{P}\| \ll \frac{GM}{r^2} \quad . \quad (7.63)$$

$\vec{P}$ est traditionnellement appelé la *perturbation*. Notons que nous ne supposons rien ici sur la forme de la perturbation.

Suivant que $\vec{P}$ dérive ou non d'une énergie potentielle, les méthodes d'étude sont différentes, mais dans tous les cas, on utilise la solution du mouvement Képlérien pour décrire l'évolution du mouvement. En clair, à chaque instant on fait comme si la perturbation n'existait pas, et on en tire l'orbite Képlérienne que le mobile suivrait en fonction de sa vitesse et de sa position. Plus précisément on calcule les éléments orbitaux a , e , i , Ω , ω et t_p . Si la perturbation n'existait pas, on trouverait à chaque instant les *mêmes* éléments orbitaux, puisque l'orbite serait fixe. Du fait de l'existence de $\vec{P}$, les éléments trouvés changent à chaque instant. L'orbite trouvée à chaque instant est appelée *orbite osculatrice*.

L'idée maîtresse est que comme $\vec{P}$ est faible, l'orbite osculatrice ne change que très peu à chaque instant, en tout cas très lentement, puisque le mobile suit « presque » un mouvement

Képlérien parfait. Du coup, il ressort qu'il est très avantageux de considérer que le mobile suit à chaque instant une orbite Képlérienne, mais que celle-ci va se *déformer lentement* au cours du temps, sous l'effet de la perturbation. Conceptuellement, cela revient à considérer le système d'éléments orbitaux osculateurs $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$ comme un système de coordonnées (il est vrai un peu bizarre) au lieu des 6 coordonnées des vecteurs position et vitesse.

Il existe des équations qui donnent l'évolution des éléments osculateurs en fonction de $\vec{P}$. Elles s'appellent *équations de Gauss* dans le cas où $\vec{P}$ ne dérive pas d'une énergie potentielle et *équations de Lagrange* dans le cas contraire. C'est sur la base de ces équations que nous ne détaillerons pas ici qu'on étudie (sans pouvoir résoudre exactement) la dynamique du Système Solaire.

La première conclusion à laquelle on arrive par ce genre de méthode est qu'en dehors de situations très particulières, les demi-grands axes des planètes sont les éléments les plus stables sur une grande échelle de temps. Ceci au passage explique pourquoi le Système Solaire reste stable. En effet, comme le problème à N corps est essentiellement chaotique, on pouvait se demander si le Système Solaire était stable. C'est en ces termes que la question s'était posée la première fois à la fin du XVIII^e. Elle avait été résolue à l'époque par Laplace et Lagrange qui avaient développé une méthode complète, simplifiée, de résolution des équations (essentiellement, un développement limité tronqué au premier ordre) qui avait montré que les demi-grands axes ne changeaient pas alors que les autres éléments fluctuaient. Par conséquent la Terre ne va pas sauf accident brutalement aller se promener aux confins du Système Solaire vu que son demi-grand axe ne change pas. Le chaos existe peut-être dans certains endroits du Système Solaire, mais il ne peut pas faire n'importe quoi ! On parle de chaos *dynamiquement confiné*.

La méthode de Lagrange donne également le comportement des autres éléments orbitaux. Essentiellement, les éléments comme excentricités et inclinaisons sont soumis à des fluctuations erratiques sur une échelle de temps de quelques dizaines de milliers d'années. Les éléments angulaires comme Ω et ω ont un comportement de *précession*. En clair, les périastres des orbites ont tendance à tourner lentement et plus ou moins régulièrement autour du Soleil, sur une échelle de temps comparable.

Ceci est illustré sur la figure 7.9. On y montre l'évolution de l'excentricité de l'orbite terrestre telle qu'on peut la calculer aujourd'hui, sur plusieurs échelles de temps dans le passé comme dans le futur. Sur chaque graphique on a représenté deux courbes. Une des courbes représente ce qu'on arrive à calculer avec la méthode approchée de Laplace-Lagrange, et l'autre la « solution exacte », c'est à dire celle qu'on arrive à calculer au mieux avec les ordinateurs d'aujourd'hui. $t = 0$ correspond à l'époque actuelle. Sur une échelle de $\pm 10^5$ ans, on voit que les deux courbes coïncident à peu près. Sur $\pm 10^6$ ans, on voit que globalement l'excentricité suit des fluctuations erratiques, mais on note qu'au bout de ce temps, les deux courbes sont en total désaccord. Que se passe-t-il donc ? Tout simplement, sur une telle échelle de temps, les erreurs (infimes) accumulées par l'approximation de la méthode de Laplace-Lagrange rendent le résultat complètement faux. La solution informatique est, elle encore valable sur cette échelle de temps. Sur $\pm 10^7$ ans, on ne représente plus que la solution informatique. On voit que les variations de l'excentricité de l'orbite terrestre sont plus ou moins irrégulières, mais finalement restent confinées entre 0 et 0.06. On trouverait le même type de résultat sur une grande échelle de temps, comme l'âge du Système Solaire (4.65×10^9 ans). Seulement, sur une telle échelle de temps, même la solution informatique est peu fiable, car les ordinateurs ont par construction une précision finie, et même la plus infime des erreurs d'arrondi finira par se cumuler et faire diverger la solution trouvée. Prenez deux ordinateurs de marque différente, calculez les mêmes choses et sur une telle échelle de temps, les deux solutions que vous obtiendrez divergeront.

Nous sommes donc effectivement en présence d'un comportement chaotique, mais ce chaos

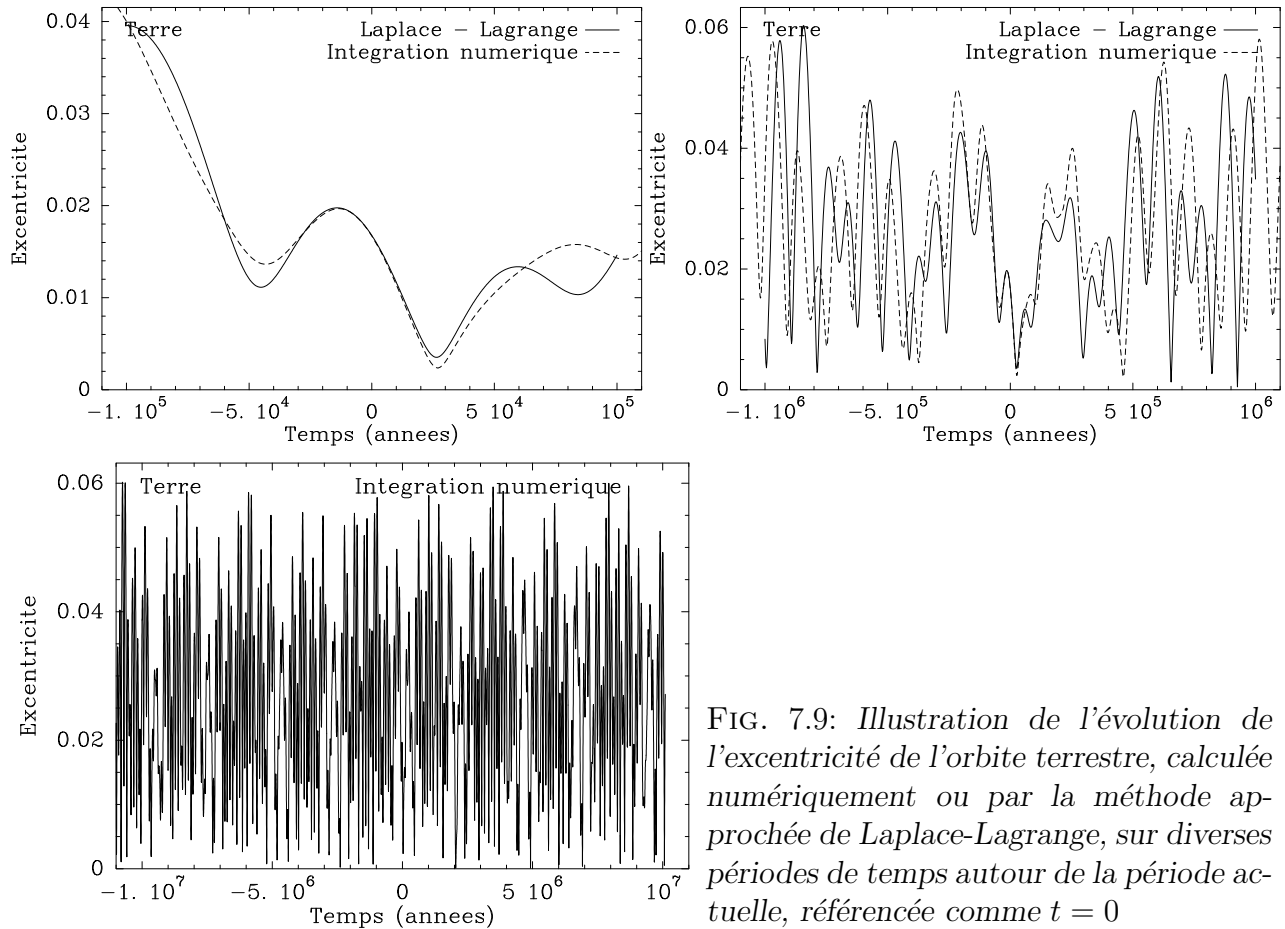


FIG. 7.9: Illustration de l'évolution de l'excentricité de l'orbite terrestre, calculée numériquement ou par la méthode approchée de Laplace-Lagrange, sur diverses périodes de temps autour de la période actuelle, référencée comme $t = 0$

intervient sur de très longues échelles de temps. Qui plus est, même s'il nous est impossible de dire quelle était exactement l'excentricité de l'orbite terrestre il y a 4 milliards d'années, nous savons que celle-ci fluctue de toutes façons entre des bornes fixes, et qu'il y a 4 milliards d'années, l'excentricité se trouvait très certainement entre 0 et 0.06 et fluctuait plus ou moins de la même façon. C'est exactement le sens qu'on donne à la notion de *chaos confiné*.

En conclusion, sommes nous aujourd'hui en mesure de répondre à la fameuse question de la stabilité du Système Solaire? La réponse est oui à 99% au moins. Les éléments orbitaux varient dans des bornes à peu près fixes; une évolution inattendue en dehors de ces bornes est toujours possible, mais peu probable. En fait nous sommes convaincus aujourd'hui que le Système Solaire, du moins dans sa partie interne, avait de gros problème de stabilité au début de son histoire à cause de la présence de Jupiter, et qu'il comportait d'autres proto-planètes. L'évolution chaotique a amené à éliminer rapidement ces planètes supplémentaires, soit par éjection du système, soit par collision avec les autres planètes¹⁶. Au bout du compte, le Système Solaire s'est retrouvé stable avec juste le nombre de planètes qu'il lui fallait pour cela.

¹⁶Nous savons aujourd'hui que la Lune est née d'une telle collision