

Réponses à l'examen de cosmologie

F.-X. Désert (LAOG)

12/02/2004

1 Questionnaire

1. La nucléosynthèse primordiale permet d'expliquer l'abondance de
 - (a) l'hydrogène
 - (b) XXX l'hélium
 - (c) XXX le lithium
 - (d) le carbone
 - (e) le fer
 - i. *L'hydrogène n'est pas synthétisé, puisque contenant un seul proton (pas de point retiré néanmoins si cette réponse est cochée). L'hélium et le lithium sont produits dans les réactions nucléaires primordiales. Le carbone est produit dans les étoiles, le fer dans les restes de supernovae.*
2. L'inflation primordiale n'est sans doute pas due à une "vraie" constante cosmologique
 - (a) XXX vrai
 - (b) faux
 - i. *L'inflation s'est arrêtée, donc la constante cosmologique a disparu. Ce n'est donc pas une vraie constante.*
3. L'asymétrie baryon-antibaryon dans notre univers est
 - (a) inexpliquée
 - (b) XXX partiellement comprise (trois conditions de Sakharov)
 - (c) expliquée par la physique des particules et les trois conditions de Sakharov
4. Actuellement, combien y-a-t-il de baryons pour un photon
 - (a) 1 pour 1

- (b) 100 millionième pour 1
- (c) 100 millions pour 1
- (d) XXX une quantité infime pour un.
- (e) le rapport varie en ce moment avec le temps
 - i. *Le rapport du nombre de baryons au nombre de photons est figé depuis que les électrons-positrons se sont annihilés. La bonne réponse est 0.6 milliardièmes pour 1 (eq. 6.2.1) (b a été retenu néanmoins)*

5. Les ondes gravitationnelles sont

- (a) des bosons de spin 0
- (b) des bosons de spin 1
- (c) XXX des bosons de spin 2
- (d) des fermions de spin 3/2
- (e) XXX se propagent à la vitesse de la lumière
- (f) peuvent être engendrées par l'effondrement sphériquement symétrique d'un objet
- (g) XXX ont déjà été détectées indirectement
- (h) ont déjà été détectées directement
 - i. *Cours 2.3.10*

6. Les photons provenant d'une étoile et rasant la surface du soleil avant d'atteindre la terre

- (a) XXX suivent des géodésiques
- (b) se propagent tout droit
- (c) changent de fréquence
 - i. *Tout droit n'a plus de sens en RG. La fréquence des photons ne se modifie pas loin des masses (si le potentiel de départ est proche du potentiel d'arrivée). La réponse c n'a pas fait perdre de point toutefois.*

7. L'expansion de l'Univers

- (a) XXX se constate le mieux avec le redshift des galaxies croissant avec leur distance
- (b) implique que de la matière se crée en permanence
- (c) implique que de la matière se perd en permanence
- (d) ralentit les photons
- (e) XXX ralentit les galaxies dans leur mouvement particulier
 - i. *cours 3.2 et 4.2.1*

8. L'inflation de l'Univers

- (a) XXX a eu lieu plusieurs fois
- (b) XXX correspond forcément à une pression égale à l'opposé de la densité
- (c) XXX dilue la matière de façon exponentielle avec le temps
 - i. 2 fois (univers primordial et maintenant). (cours 3.3) Si $p = w\rho$ alors $H \propto R^{-3(1+w)}$, donc la croissance n'est exponentielle que si $w = -1$.

2 Vitesse particulière et redshift

2.1 On observe une galaxie au repos de redshift z .

2.1.1 Comment le redshift est-il mesuré en pratique?

Le spectre, dans le domaine visible par exemple, contient des raies d'émission ou d'absorption d'atomes ou d'ions, dont la fréquence au repos est mesurée au laboratoire. La fréquence de chaque raie mesurée ν_r est systématiquement liée à la fréquence en labo ν_e , quelle que soit la raie, par

$$\frac{\nu_e}{\nu_r} = 1 + z = \frac{1}{a}$$

2.1.2 Depuis combien de temps Δt la lumière observée maintenant est-elle partie de la galaxie? Donner le résultat sous la forme d'un intégrale fonction des paramètres cosmologiques (H_0 , Ω_m , Ω_Λ)?

$$\Delta t = H_0^{-1} \int_a^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2}}$$

2.1.3 Quelle est la définition et l'expression de la distance comobile D_c de la galaxie en fonction des paramètres cosmologiques (H_0 , Ω_m , Ω_Λ)?

C'est la distance en coordonnées comobiles prises maintenant.

$$D_c = cH_0^{-1} \int_a^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_m a + \Omega_\Lambda a^4}}$$

2.1.4 Application numérique

$$H_0 \Delta t = \frac{2}{3}(1 - a^{3/2})$$

Tout calcul fait, on obtient respectivement 1.74, 8.43, 12.68 Gyr pour $z = 0.1$, 1, et 10.

$$D_c = 2cH_0^{-1}(1 - \sqrt{a})$$

On obtient 560, 3510 et 8380 Mpc pour $z = 0.1$, 1, et 10.

2.1.5 Discussion

Pour $z=10$, on est très proche (en temps) du Big Bang puisque l'âge de l'Univers est de 13.04 Gan. La loi de Hubble ne se vérifie que pour $z = 0.1$: $cz = 30000$ km/s alors que $H_0 D_c = 28000$ km/s . Pour d'autres redshifts ce n'est plus valable.

2.2 Une autre galaxie a une vitesse radiale particulière v

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

2.2.1 Discuter cette formule

Pour v positif, la galaxie nous fuit et la fréquence diminue. Pour $v \ll c$, on retrouve l'effet Doppler classique: $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}$. Dans le cas relativiste on obtient $\gamma/2$.

2.2.2 Comparer le redshift z de la galaxie avec une vitesse radiale particulière v au redshift z_t d'une galaxie au repos et située à la même distance comobile de l'observateur

Passer par l'intermédiaire de la galaxie au repos (redshift z_t) où l'on mesure ν_{r1} .

$$\frac{\nu_{r1} \nu_{r2}}{\nu_e \nu_{r1}} = \frac{1}{1 + z}$$

$$\frac{\nu_{r2}}{\nu_{r1}} = \frac{1}{1 + z_t}$$

$$\frac{\nu_{r1}}{\nu_e} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

D'où l'on déduit que

$$\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = \frac{1 + z_t}{1 + z}$$

2.2.3 Inversement, donner v en fonction de z et z_t . Approximation pour $\Delta z = z - z_t \ll 1$.

$$\frac{v}{c} = \frac{(1 + z)^2 - (1 + z_t)^2}{(1 + z)^2 + (1 + z_t)^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta z}{1 + z_t}$$

2.2.4 Application numérique

Le redshift va être étalé sur $\pm 5 \times 10^{-3}$

2.2.5 Expliquer qualitativement le “doigt de Dieu”

Lorsqu'on rencontre une concentration de galaxies sur une ligne de visée et à un redshift similaire, cela ne produit qu'une concentration en redshift et en angle sur les cartes à 3D que l'on peut former à partir des relevés de galaxies. Si ces galaxies forment un vrai amas, alors elles ont en outre une vitesse particulière importante ce qui modifie leur position radiale apparente obtenue à partir du redshift mesuré z (différent de z_t) mais pas leur position angulaire. Cela provoque un biais en allongeant la structure radialement, ce qui fait apparaître l'observateur comme ayant une position privilégiée dans l'Univers.

3 Le redshift d'un objet est-il constant?

3.1 Qualitativement

L'expansion de l'Univers ne se fait pas à la même vitesse au moment de l'émission et de la réception des photons.

3.2 Quantitativement

Considérer que les coordonnées comobiles de l'émetteur et du récepteur ne changent pas, donc en dérivant les bornes de χ_1 dans l'expression 4.1.6 du cours,

$$\frac{\Delta R_1}{R_1 \dot{R}_1} = \frac{\Delta R_0}{R_0 \dot{R}_0}.$$

Considérer ensuite que

$$1 + z = \frac{R_0}{R_1},$$

et

$$1 + z' = \frac{R_0 + \Delta R_0}{R_1 + \Delta R_1}.$$

Attention, s'il est vrai que $\Delta R_0 = \dot{R}_0 \Delta t$, c'est faux pour R_1 (voir formule ci-dessus):

$$\Delta R_1 = \frac{R_1 \dot{R}_1}{R_0 \dot{R}_0} \dot{R}_0 \Delta t = \left(\frac{R_1}{R_0} \right) \dot{R}_0 \Delta t$$

Ainsi, après un peu d'algèbre:

$$\frac{z' - z}{\Delta t} \simeq \frac{dz}{dt} = \frac{\dot{R}(t_0) - \dot{R}(t_1)}{R(t_1)},$$

où $\frac{R(t_1)}{R_0} = \frac{1}{1+z}$.

3.3 Approximativement

Pour $z \ll 1$, on fait le développement limité

$$\dot{R}_1 \simeq \dot{R}_0 + \frac{d\dot{R}}{dR}(R_1 - R_0)$$

ce qui combiné avec

$$\frac{d\dot{R}}{dR} = \frac{\ddot{R}}{\dot{R}}$$

permet d'écrire que

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{R_0 - R_1}{R_1} \frac{\ddot{R}}{\dot{R}}$$

En considérant que $R_0 - R_1 \simeq z$ et que

$$\frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = -q_0 \frac{\dot{R}}{R}$$

on en déduit que

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dt} = -H_0 q_0 ,$$

Pour un Univers plat,

$$\begin{aligned} \dot{a} &= H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2} , \text{ et} \\ \ddot{a} &= H_0 \frac{\dot{a} (-\Omega_m a^{-2} + 2\Omega_\Lambda a)}{2\sqrt{\Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2}} . \end{aligned}$$

Pour $z = 0$, on obtient

$$q_0 = \frac{1}{2} (1 - 3\Omega_\Lambda) ,$$

soit $q_0 \simeq -0.55$, pour les paramètres d'Univers en accord avec les observations récentes. Donc

$$\frac{\Delta z}{z} \simeq 10^{-9} .$$

Le redshift d'un objet varie dans le temps mais au taux de la constante de Hubble. Les raies sont beaucoup plus larges que 10^{-9} (élargissement par effet Doppler et dispersion interne de vitesses au mieux de quelques km/s). Mesurer leur barycentre s'avère extrêmement difficile. Mesurer cet effet apporterait une contrainte originale (indépendante d'autres méthodes) sur le produit du paramètre de décélération par la constante de Hubble.

4 Précession relativiste

L'avance du périhélie d'un satellite autour de la Terre s'écrit (en radians par révolution, Eq. 2.3.39):

$$\Delta\phi \simeq 6\pi \frac{GM_{\oplus}}{L},$$

où $L = R_{\oplus} + h$ ($h = 640$ km est l'altitude du satellite). Une période de révolution se calcule avec la troisième loi de Képler:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{L^3}},$$

ce qui donne

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = 3c \frac{\left(\frac{GM_{\oplus}}{c^2}\right)^{3/2}}{L^{5/2}}.$$

En utilisant $\frac{GM_{\oplus}}{c^2} = 4.4 \times 10^{-3}$ m, on déduit que $\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = 2 \times 10^{-12}$ rad/s soit 12 secondes d'arc par an. La Relativité Générale a des conséquences qui affectent la conception de satellites de positionnement modernes.

5 Redshift gravitationnel

Le temps de vol de la lumière est d'environ $t = \frac{h}{c}$. L'accélération de l'ascenseur produit une différence de vitesses entre l'instant de l'émission et de l'absorption du photon de $\Delta v = at$. Le changement de fréquence (décroissance) est ainsi de

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = -\frac{\Delta v}{c} = -\frac{ah}{c^2}.$$

Localement, un observateur ne peut distinguer une accélération loin des masses, d'un champ de gravitation (principe d'équivalence), ici pointant vers le bas. Le terme ah s'interprète comme une différence de potentiel gravitationnel Φ :

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = -\frac{\Phi_r - \Phi_e}{c^2}.$$

Cette expression est correcte (même en signe) et se retrouve en RG (Eq. 2.3.44 en posant $\Phi_r = 0$ loin du soleil).

6 Distance angulaire

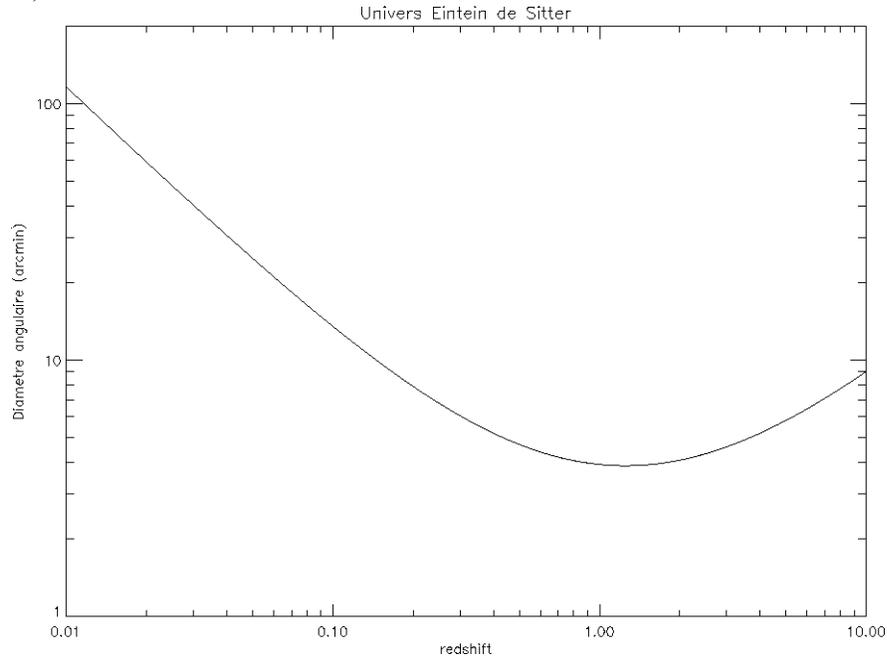
La formule (4.1.13) permet de relier la distance angulaire à la distance comobile:

$$D_A = aD_C = a \frac{2c}{H_0} (1 - \sqrt{a}),$$

ce qui donne le diamètre angulaire de l'amas en fonction de sa taille d et son redshift z ainsi:

$$\Psi = \frac{H_0 d}{2c(a - a^{3/2})}.$$

Numériquement, on obtient 117, 13.5, 3.9 et 9.0 minutes d'arc pour un redshift de respectivement 0.01, 0.1, 1 et 10. Notons que cette fonction n'est pas monotone (cf. figure).



7 Particule radioactive

Si la période de désintégration est très longue par rapport à l'âge de l'Univers (i.e. $\tau H_0 \gg 1$), peu de photons sont produits.

Si au contraire $\tau H_0 \ll 1$, il faut considérer l'âge de l'Univers au moment du découplage (photons-matière). Si $\tau H_{dec} \ll 1$ alors les photons issus de la désintégration ont eu le temps d'être "thermalisés" et ont disparu. En revanche, dans le cas contraire, on pourrait observer actuellement un fond de photons d'énergie $\frac{mc^2}{2} a(t = \tau)$. Ce genre de considérations permet de mettre des contraintes sur l'existence et les propriétés de particules reliques de l'Univers primordial.

8 Machine à remonter le temps

Appelons Ω_i les paramètres de densité réduite mesurés maintenant. La densité vaut donc:

$$\rho_i = \rho_{c0} \Omega_i a^{-\alpha_i},$$

où α_i vaut 3 pour la matière non relativiste par exemple.

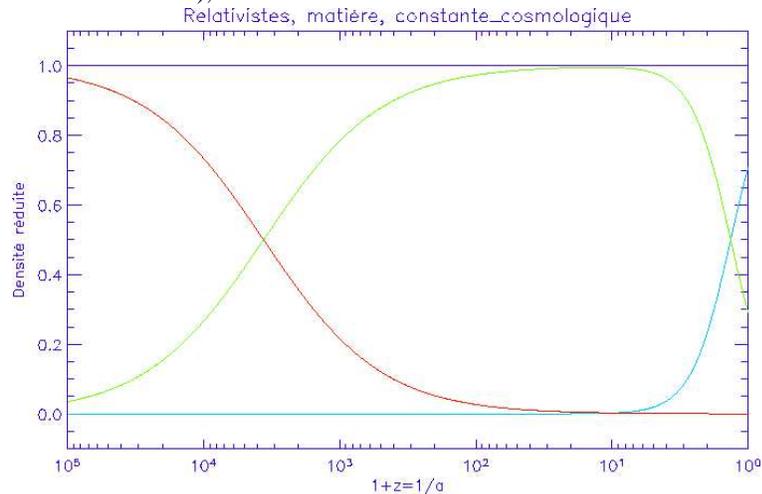
La valeur des paramètres de densité réduite mesurés à un instant $t(a)$ s'exprime ainsi:

$$\omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} = \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \Omega_i a^{-\alpha_i}.$$

Finalement,

$$\omega_i = \frac{\Omega_i a^{-\alpha_i}}{\sum_j \Omega_j a^{\alpha_j}}.$$

Pour tous les observateurs, la somme des paramètres de densité réduite est égale à 1. Numériquement, en adoptant $\Omega_m = 0.29$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ et $\Omega_{ph} = 5 \times 10^{-5}$ (et en y ajoutant les neutrinos), on obtient la série de courbes suivantes:



L'énergie noire ne contribue significativement que depuis très récemment (courbe bleue). La matière non relativiste a été dominante pour des redshifts entre 1 et 3000. Le rayonnement et la matière relativistes sont dominant dans l'univers primordial. La courbure n'a jamais eu d'importance car la courbure réduite diminue comme \dot{a}^2 dans le passé et elle est encore petite maintenant d'après les dernières mesures du CMB.

Florilège

Non, l'expansion de l'Univers ne ralentit pas les photons. Non de la matière ne se crée pas en permanence. Tout est supposé être présent au moment du Big Bang.

Pour l'exercice 2, Δt vaut 1700 à 8000 ans, ou bien 10^4 à 10^5 ans, ou bien 10^5 à 10^6 ans, ou bien carrément 55 à 400 Gans!

Pour l'exercice 4, de nombreuses réponses prennent le satellite à un rayon de 640 km!

Certains trouvent une période de rotation de 0.25 secondes ou encore 160 secondes (sans s'en offusquer).