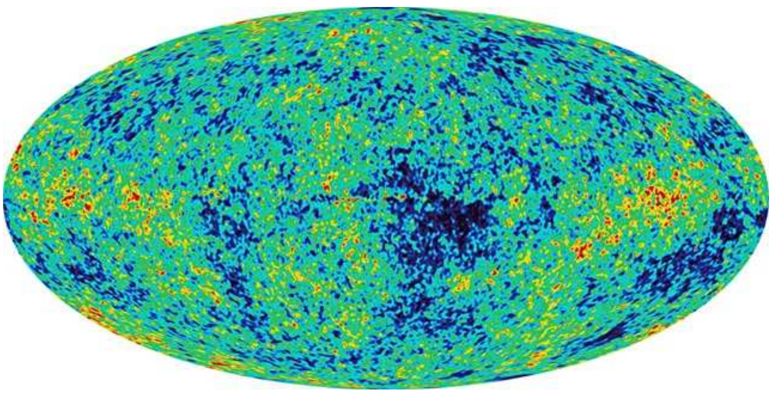
Cours de Cosmologie

F.-Xavier Désert

LABORATOIRE D´ASTROPHYSIQUE, OBSERVATOIRE DE GRENOBLE



(Figure : WMAP Science Team)

v2.3 - 2004-10 Fin des cours Sept-Oct 2004

Ce cours est mis à jour sur le site web suivant :
http ://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~desert/cosmologie

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction

1.1. Préambule

Ce cours est destiné aux étudiants en Master 2 de Physique de l'Université Joseph Fourier de Grenoble dans les deux disciplines suivantes :
Astrophysique et milieux dilués :
http ://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/enseignement/formation-doctorale/dea.html
et
Physique Subatomique et Astroparticules :
http ://lpsc.in2p3.fr/Master/index.html

Il représente 15 heures de cours. Ce n'est donc qu'une introduction à la cosmologie. Il présuppose un bagage en physique et mathématiques de niveau Master 1. Pour l'instant, les démonstrations ne sont données qu'en filigrane. Ce cours doit beaucoup au cours précédent de P.-Y. Longaretti. Il tente de se rapprocher des observations contemporaines (3K, cisaillement gravitationnel, supernovae, grandes structures) sans perdre de vue le contexte général mais en détaillant moins les aspects les plus théoriques de la relativité générale et de l'inflation. Remerciements aux étudiants pour avoir signalé quelques coquettes et coquines coquilles .

1.2. Définition

La *cosmologie* s'occupe de comprendre la naissance et l'évolution de l'*Univers* par la méthode scientifique. C'est uniquement par ce jeu entre théorie physique, modélisation et observation que nous aborderons cette question ici. Nous éviterons soigneusement toute digression métaphysique. Les problèmes spécifiques de la cosmologie tiennent dans sa définition même : la statistique qui est une des grandes méthodes scientifiques est apparemment pauvre : nous n'avons qu'un univers à notre disposition. Néanmoins, nous verrons comment cette *variance cosmique* peut être intégrée dans nos tests des théories. En outre, on n'observe que le passé de l'Univers. Peut-on parler de prédictions dans ces conditions ? Ceci est un probème partagé avec l'archéologie, par exemple. Les théories sont cependant falsifiables dans la mesure où elles prédisent des comportements que des observations peuvent tester.

La cosmologie utilise principalement l'arsenal des mathématiques, de la physique théorique, de la physique des particules, de la physique nucléaire, de la physique des détecteurs, et de l'astrophysique. Elle est donc interdisciplinaire. La cosmologie traite des échelles supèrieures à la taille d'une galaxie jusqu'aux échelles définies par elle-même comme les horizons. Encore que la limite soit volontairement floue, la cosmologie ne traite pas des détails internes de la naissance et de l'évolution d'objets astrophysiques (tels que les galaxies, les amas globulaires, ou des amas de galaxies) qui relèvent plus de la *cosmogonie*.

1.3. Survol historique

Aristote (-350, le monde sublunaire (terre, eau, air, feu) et le cosmos)
Ptolémée (+140, l'Almageste : "la grande synthèse", épicycles)

TAB. 1. Principaux paramètres cosmologiques décrivant notre connaissance actuelle ([**13**], d'après le satellite WMAP). Les densités réduites reviennent à diviser la densité par la densité critique. 1 Gan est un milliard d'années.

Paramètre	Symbole	Valeur et Intervalle de confiance
Constante de Hubble	H_0	$72{\pm}5$ km/s/Mpc
Densité critique	ρ_c	$0.974 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Densité totale réduite	Ω_{tot}	1.02 ± 0.02
Densité de courbure réduite	Ω_k	0.02 ± 0.02
Densité de constante cosmologique (énergie noire) réduite	Ω_Λ	0.70 ± 0.10
Équation d'état	w	-1.0 ± 0.3
Densité totale de matière réduite	Ω_m	0.29 ± 0.07
Densité réduite des baryons	Ω_b	0.0470 ± 0.0006
Densité réduite des photons	Ω_{ph}	$4.76 \pm 0.30\ \times 10^{-5}$
Rapport nombre de baryons/photons	η	$6.5 \pm 0.4 \times 10^{-10}$
Densité numérique des baryons	n_b	$0.27 \pm 0.01\,\mathrm{m^{-3}}$
Densité numérique des photons	n_γ	$410.4 \pm 0.9 \times 10^6\,\mathrm{m^{-3}}$
Densité réduite de la matière baryonique lumineuse	Ω_{lum}	0.010 ± 0.005
Densité réduite des neutrinos	Ω_ν	$10^{-4} - 1.4 \times 10^{-2}$
Age de l'Univers	t_0	$13.4 \pm 0.3\,\mathrm{Gan}$
Redshift du découplage	z_{dec}	1088 ± 2
Redshift égalité rayonnement-matière	z_{eq}	3454 ± 390

Copernic (1473-1543, De Revolutionibus : l'héliocentrisme), Bruno, Pascal, Tycho Brahe, Kepler (1571-1630), Galilée (1564-1662, lunette, inertie), Newton (1642-1747, gravitation)

Einstein (1879-1955), Hubble, Lemaitre, Gamow

Penzias & Wilson, Peebles, Silk, Mather & Smoot

Maintenant

1.4. L'Univers paradoxal

Un faisceau convergent d'indications nous présentent un Univers dont les caractéristiques sont proches du tableau 1. Si l'on comparait ce tableau à l'état des connaissances il y a une quinzaine d'années (pre-COBE), on serait surpris de l'avancée dans la *précision* sur quasiment tous les *paramètres cosmologiques*. C'est l'un des objectifs de ce cours de comprendre comment on peut arriver à déduire ces paramètres des observations, mais aussi de connaître les limitations et hypothèses inhérentes à ces résultats.

Les résultats les plus récents convergent vers un modèle d'Univers présentant néanmoins de curieux paradoxes :

– Nous observons principalement l'Univers grâce à la lumière, couvrant tout le spectre électromagnétique, que nous collectons avec des télescopes toujours plus puissants. Et pourtant, il semble que la matière lumineuse dans l'Univers ne représente que moins de 1% de la masse-énergie totale. La masse de l'Univers est principalement sous une forme totalement inconnue sur terre, qui n'intéragit quasiment pas avec les baryons qui nous entourent et dont nous sommes faits !
– La lumière elle-même ne représente qu'une toute petite fraction en masse-énergie de l'Univers. Ce n'était pas le cas dans les premiers 100 000 ans de l'Univers (cf. z_{eq}). En revanche en densité numérique de particules, ce sont toujours les photons qui dominent l'Univers même maintenant. Conclusion : les particules-antiparticules se

sont presque toutes désintégrées dans la phase chaude de l'Univers. Enfin, presque toutes mais pas toutes (cf. η) sinon la structuration de l'Univers n'aurait pas pu avoir lieu (amas, galaxies, étoiles). C'est l'asymétrie baryon-antibaryon qui n'a pas reçu d'explication quantitative satisfaisante jusqu'à présent.

– L'histoire de notre Univers comporte deux épisodes très spéciaux où la densité d´énergie-matière est dominée par une constante cosmologique provoquant une expansion exponentielle : l'inflation primordiale durant l'ère de Planck et l'inflation contemporaine (durant les quelques derniers milliards d'années). La physique de "l'énergie noire" à l'origine de ces deux inflations reste pour l'instant inconnue.

1.5. Plan du cours

Le chapitre 2 est central à la progression du cours. Après quelques brefs rappels sur la relativité restreinte (2.1) et la gravitation Newtonienne (2.2), nous abordons le cœur théorique de ce cours : la relativité générale (3). Nous verrons comment, avec le principe cosmologique, elle conduit à la métrique de Friedman-Robertson-Walker (4.1) et aux équations d'évolution de la "fabrique" de l'espace-temps (4.3).

1.6. Références et autres lectures additionnelles

Nous recommendons bien evidemment la lecture des livres de base, auxquels ce cours (*liber ex libris*) ne prétend clairement pas se substituer. Mentionnons tout particulièrement :

(1) Dans la langue anglo-saxophone :
   - Weinberg[**15**]
   - Misner, Thorne, Wheeler[**7**]
   - Peebles [**9, 10**]
   - Kolb & Turner[**4, 3**]
   - Padmanabhan [**8**]
   - Liddle & Lyth [**5**]

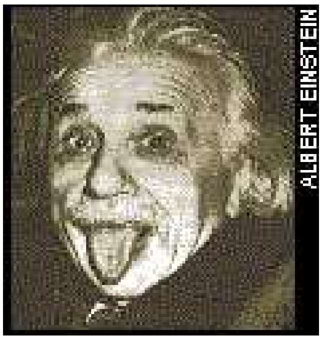
(2) En français :
   - Einstein : [**2**]
   - Coté astrophysique : [**1, 6**]
   - Culture générale : [**12, 14**]

(3) Sur le web :
   - Le cours de RG : Carroll :
     http ://arxiv.in2p3.fr/abs/gr-qc/9712019
   - Toutes les références contenues dans Baez :
     http ://math.ucr.edu/home/baez/relativity.html
   - Le cours de Ned Wright (dans les 2 langues) :
     http ://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm
   - [français] Le cours de Laurent Baulieu :
     http ://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/baulieu.html
   - [français] Un cours de la SAF :
     http ://big.chez.com/cosmosaf/RG-presentation-hypertexte-site.htm
   - [français] Les cours en ligne d'Alain Bouquet et Christophe Balland :
     http ://cdfpc53.in2p3.fr/~bouquet/
   - [français] Les cours poil-à-gratter de Michel Mizony :
     http ://igd.univ-lyon1.fr/home/mizony
   - [français] Le cours de Relativité Générale de Jean Kaplan :
     http ://cdfinfo.in2p3.fr/~kaplan/RG.html
   - [français] Cours d'histoire de la Gravitation de Sébastien Charnoz :
     http ://elbereth.obspm.fr/~charnoz/gravitation.html

CHAPITRE 2

Les fondements

2.1. La relativité restreinte



Un référentiel $O'x'y'z't'$ se déplace par rapport à un autre $Oxyzt$ avec une vitesse u le long de l'axe Ox. Leurs coordonnées se transforment selon *la transformation de Lorentz* :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{2.1.1}$$
$$y' = y \tag{2.1.2}$$
$$z' = z \tag{2.1.3}$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\,, \tag{2.1.4}$$

où $\beta = u/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ et $c = 2.998 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide.

Observez :

(1) Contraction des longueurs par $1/\gamma$.
(2) Dilatation des durées par γ.
(3) symétrie entre les deux référentiels $u \to -u$
(4) Loi des vitesses :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2} \tag{2.1.5}$$

***Invariance de Lorentz* :** *toutes les lois de la physique ont exactement la même forme dans tous les référentiels inertiels et la vitesse de la lumière dans le vide est un invariant.*

Pour deux événements infiniment proches dans l'espace-temps l'élément de métrique

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.1.6}$$

est un invariant. Ce "théorème de Pythagore" à quatre dimensions correspond à la métrique de Minkowski. L'élément de longueur ds est invariant par une quadri-rotation représentée par la transformation de Lorentz. La signature de la métrique (1 + et 3 $-$) est le signe que l'espace-temps ne mélange pas complètement la dimension temps avec les trois dimensions d'espace.

Maxwell satisfait au groupe d'invariance de Lorentz.

Masse=Energie, expressions classiques pour $v/c \ll 1$:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.1.7}$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.1.8}$$

Monde de la physique des particules OK

Exercises

(1) Le muon a une durée de vie de 2.2×10^{-6}s. Il est créé dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques à environ 10 km d'altitude. Il se déplace à la vitesse de $0.999\,c$. Calculer la durée de vie observée par un terrien, et la distance moyenne traversée par ces particules. Montrer que seule la dilatation du temps relativiste permet d'expliquer qu'on observe des muons au sol.

(2) Le choc entre un électron et un positron produit deux photons gamma. Quelle est l'énergie minimum (en Joule et en keV) de chacun de ces photons, sachant que $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$kg et $e = 1.60 \times 10^{-19}$C .

(3) En partant de l'éq. 2.1.7, quelle est l'expression de l'énergie cinétique d'une particule de masse m en fonction de sa vitesse v ? Retrouvez le cas classique. Qu'en concluez-vous si on veut atteindre la vitesse de la lumière.

(4) Effet Doppler relativiste : un signal périodique de fréquence ν' est émis dans toutes les directions par une source en mouvement le long de l'axe Ox'. Trouvez l'expression de la fréquence ν mesurée par un observateur au repos situé en O devant et derrière la source en mouvement. Généralisez aux cas où la vitesse n'est pas radiale.

2.2. La gravitation universelle

Partant des observations méticuleuses de Tycho Brahé notamment, Kepler a énoncé les trois lois permettant de décrire l'orbite des systèmes gravitant autour d'un corps central M :

(1) Les corps décrivent une orbite contenue dans un plan et c'est une ellipse dont M est un des foyers.
(2) Loi des aires : le rayon vecteur balaye une aire constante par unité de temps.
(3) Les carrés des périodes sont proportionnels aux cubes des demi- grand-axes.

Newton déduit des trois lois de Képler la loi de la gravitation universelle. Dans son expression la plus simple, la force exercée par un masse m sur une masse m' située à une distance d est attractive et coalignée avec les deux masses. Son intensité vaut :

$$F = G\frac{mm'}{d^2}\,, \tag{2.2.1}$$

où $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}$.

Sous une forme plus générale, une masse test m subit le potentiel gravitationnel ϕ de toutes les masses m_i environnantes (situées chacune à une distance r_i). Ainsi[1] :

$$\mathbf{F} = -m\,\mathbf{grad}\phi\,, \tag{2.2.2}$$

$$\phi = -G\sum_i \frac{m_i}{r_i}\,. \tag{2.2.3}$$

Notez le caractère instantané de la propagation du champ. Le champ ϕ “existe” partout même sans la masse test. On peut démontrer que la loi de Newton est équivalente aux trois lois de Kepler. Néanmoins le caractère général de cette loi est patent : ainsi Newton fut

[1] On note en **gras** des vecteur 3D d'espace.

capable de calculer l'ordre de grandeur des marées, ce qui est difficile d'entrevoir avec les lois de Kepler.

Invariance galiléenne : contrairement aux équations de Maxwell, la gravitation Newtonienne satisfait au groupe de Galilée :

$$x' = Rx + ut \tag{2.2.4}$$

$$t' = t\,, \tag{2.2.5}$$

où R est une rotation quelconque dans l'espace et le temps a un caractère absolu.

Exercice : Comparez les force électromagnétique et de gravitation entre deux protons ($k_{\text{Coulomb}} = 9.0 \times 10^{-9}\,\text{Nm}^{-2}\text{C}^{-2}$, $m_p = 1.673 \times 10^{-27}\,\text{kg}$, et $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\text{C}$) ?
Exercice : Notion de champ. Le scalaire $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ représente un champ scalaire. Le vecteur 3D $\mathbf{r}$ est un champ vectoriel. Montrer que

$$\begin{aligned}
div(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\
\mathbf{rot}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\
\mathbf{grad}(r) \equiv \nabla r &= \frac{\mathbf{r}}{r} \\
\nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= 4\pi\delta(r)\,.
\end{aligned}$$

Pour cette dernière relation on utilisera une variante du théorème d'Ostrogradski qui stipule que pour tout champ scalaire f :

$$\int dV \nabla f = \int \mathbf{dS} f\,.$$

Exercice : La version continue et locale de l'équation de Newton 2.2.3 où l'on remplace des masses individuelles par une densité de masse $\rho(r) = \sum_i m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i})$ est connue sous le nom d'équation différentielle de Poisson :

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho\,, \tag{2.2.6}$$

où $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ est le laplacien qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire.

CHAPITRE 3

La relativité générale

3.1. Introduction

Au départ des considérations pour généraliser la loi de Newton (Eq. 2.2.3), on cherche à comparer la masse inertielle m_a (qui multiplie l'accélération a d'un corps pour donner la force sur ce corps : $\mathbf{F} = m_a\mathbf{a}$) et la masse gravitationnelle m intervenant dans la loi de la gravitation universelle (Eq. 2.2.1).

m_a et m sont indistinguables, mis à part un facteur universel qu'on fixe à 1 (au besoin en redéfinissant les unités). C'est **le principe d'équivalence** qui participe à l' "économie des théories" : pour un corps, inertie et gravité font appel à une seule quantité pour mesurer la matière. Ce principe est à la base de la relativité générale. Les tests expérimentaux de ce principe (expérience d'Eötvös) donnent une limite supérieure de 10^{-11} aux variations de $\frac{m_a}{m}$ d'un corps à un autre, par ex. composé d'aluminium ou en or massif.

Le principe de Mach, quant à lui, repose sur la notion qu'il ne peut y avoir d'inertie de la matière que par rapport à la matière environnante. Sans cette matière, la notion même d'accéleration n'a plus vraiment de sens. Ce principe, sans qu'il soit nécessaire à la relativité générale, a également fortement influencé Einstein. Que répond la RG au principe de Mach ? Cf. la discussion de Weinberg [**15**]p. 86.

Retour au principe d'équivalence : la gravitation est liée à l'espace-temps. Une façon simple de voir cela est la fameuse parabole (*sic*) de l'ascenseur pronée par Einstein lui-même. Pour un observateur dans un ascenseur, *localement dans le temps et dans l'espace*, la gravité et l'accélération sont indistinguables par des expériences physiques locales. En chute libre, pas de gravité mais pas d'accélération non plus, la particule décrit une "ligne droite" : une géodésique dans un espace-temps courbe. De même si l'ascenseur est sur terre et ne subit aucune accélération. On doit abandonner le concept d'espace-temps euclidien propre à la RR.

(1) La nouvelle théorie doit retrouver la loi de Newton pour les champs faibles, et des vitesses petites devant c.

(2) La nouvelle théorie doit retrouver la Relativité Restreinte pour les champs nuls et des vitesses quelconques.

La Relativité Générale (RG) est la plus simple des théories satisfaisant ces deux dernières contraintes et le principe d'équivalence. Elle stipule que *tous les systèmes de coordonnées sont en principe équivalents pour décrire les lois de la physique*. Il faut tout de même des systèmes de coordonnées non pathologiques (dits de Gauss). Elle est falsifiable : (so far so good) plusieur tests ne remettent pas en question pour l'instant la RG :

- les rayons lumineux suivent des trajectoires courbes au voisinage des masses. Grâce aux eclipses du soleil, on a pu montré que les étoiles subissent une déviation d'environ deux secondes d'arc lorsque leur rayons lumineux frôlent la surface du soleil dans leur propagation vers la terre. Une application (douteuse) de la loi de Newton donne deux fois moins.
- le périhélie de Mercure subit une précession dont 43 secondes d'arc par siècle restaient jusque là inexpliquée.
- le redshift gravitationnel : horloge dans un champs de gravité
- l'existence d'ondes gravitationnelles indirectement mises en évidence par le pulsar double PSR1913+16...

Problème : la RG n'est pas quantifiable.

3.2. Métrique de l'espace-temps, principe de covariance généralisé

Le temps propre est un invariant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix de la métrique[1] :

$$d\tau^2 = ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -g'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu \tag{3.2.1}$$

Dérivation des géodésiques (cf. 3.4).

La covariance généralisée stipule que si je connais deux systèmes de coordonnées x^μ et x'^μ,

- soit je peux exprimer les lois de la physique dans les deux systèmes
- ou bien je peux écrire les lois dans le premier système et les transformer dans le deuxième à partir des relations de nature tensorielle (cf. 3.3).

J'obtiendrai le même résultat dans les deux cas. Contrairement à l'invariance de Lorentz, on ne prétend pas que les lois s'écriront de la même façon, et d'ailleurs tout le doigté en RG se trouve dans le choix d'un système où les équations s'écrivent simplement. On dit seulement que les lois doivent s'écrire de façon covariante, *i.e. que les quantités décrites par les lois physiques doivent se transformer comme des tenseurs lors de changements de systèmes de coordonnées, ces changements étant eux-mêmes conditionnés par leur métrique $g_{\mu\nu}$ respective.*

La métrique dans un univers vide ou localement en chute libre s'écrit :

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu \, . \tag{3.2.2}$$

[1]Convention de sommation : un indice répété (ici à la fois μ et ν le sont) signifie un signe somme implicite sur cet indice (ici on a une double somme implicite : $\Sigma_{\mu=0}^{\mu=3}\Sigma_{\nu=0}^{\nu=3}$). Un indice grec se comprend sur les quatre dimensions, un indice romain sur les 3 dimensions d'espace.

C'est la métrique de Minkowski vue à l´équation (3.2.2). La convention générale est de mesurer l'espace dans les mêmes unités que le temps. En d'autres termes, on pose $c = 1$ (attention, c'est un jeu subtil dés qu'il faut remettre les unités). La métrique d'un univers vide doit se réduire (en opérant si besoin des rotations 3D et des normalisation de coordonnées) à la métrique de Minkowski (cf. Eq. 2.1.6) qui est diagonale et dont la diagonale (signature) vaut (-1, +1, +1, +1). Les expressions 3.2.1 et 3.2.2 comportent un signe $-$ pour s'adapter à la convention de signe précédente.

3.3. Rudiments d'analyse tensorielle

Voir le complément de cours écrit par Denis Gialis :
http ://laog-www.obs.ujf-grenoble.fr/~desert/cosmologie/cours/Gialis_FormTensor.pdf

Ici nous ne faisons que le strict essentiel pour la suite.

L'espace-temps peut être maillé par différents systèmes de coordonnées. Un scalaire ne dépend pas du système de coordonnées. Par exemple ds^2. Un vecteur (dit quadri-vecteur) de composantes V^ν dans un système (x) se retrouve avec les composantes V'^μ dans un système (x') telles que :

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \,, \tag{3.3.1}$$

où l'on adopte la convention qu'un indice répété (ici ν) est sommé sur ses quatre valeurs : le signe $\sum_{\nu=0}^{3}$ est implicite dans le second membre de l'équation. Par exemple, le vecteur énergie-impulsion d'une particule de masse m qui s'écrit :

$$p^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \,, \tag{3.3.2}$$

est bien un quadri–vecteur (dont le premier élément est l'énergie : $p^\circ = E$) ainsi que la quadri-force :

$$f^\alpha = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \,. \tag{3.3.3}$$

*Exercice :*Montrer que le tri-vecteur quantité de mouvement $\mathbf{p}$ est égal au produit $E\mathbf{v}$ de l'énergie par le tri-vecteur vitesse. Quelle est la quadri-norme du vecteur p^α, c'est-à-dire $(p^0)^2 - \Sigma_i (p^i)^2$ dans une métrique de Minkowski ? Comment généraliser à une métrique quelconque ?

Un tenseur du deuxième ordre qui pourrait formellement s'écrire $\mathbf{T} = \Sigma_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ (où $\mathbf{e}_\alpha$ représente le quadrivecteur des coordonnées) se transforme de la façon suivante :

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \,. \tag{3.3.4}$$

Deux formes du même tenseur ou vecteur existent : covariante (indices en bas) et contravariante (indices en haut). On passe de l'une à l'autre par l'utilisation du tenseur $g^{\mu\nu}$ sachant que

$$g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\nu, \tag{3.3.5}$$

où δ est le symbole de Kronecker (qui vaut 1 seulement si $\mu = \nu$). Ainsi $g^{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ sont des matrices inverses l'une de l'autre. Un quadri-vecteur covariant U_ν obéit à une loi de transformation similaire à 3.3.1 (propre aux vecteurs contravariants) excepté qu'on utilise la transformation inverse : $U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu$. Les scalaires, 0 et Kronecker sont les seuls tenseurs identiques dans tous les systèmes de coordonnées. La métrique permet de "monter" ou "descendre" les indices de tenseurs : par exemple, $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu}\, T^{\mu\,\nu}$ avec, comme toujours, la convention de sommation implicite.

La dérivée d'un scalaire f définie par $\partial_\mu f$ est un quadri-vecteur. En revanche, en cherchant l'expression d'une dérivée covariante (et contravariante) d'un vecteur V^λ, on est obligé d'introduire la connection affine $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ (qui n'est pas un tenseur) telle que la quantité

$$\frac{\mathrm{d}V^\lambda}{\mathrm{d}x^\mu} = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\nu \,, \tag{3.3.6}$$

est bien un tenseur. La connection affine (symboles de Christoffel) s'exprime à partir de la métrique grâce à :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right] . \tag{3.3.7}$$

3.4. Géodésiques

Tous les symboles mathématiques précédents sont importants car ils permettent d'écrire les "lignes droites" dans un espace courbe : les géodésiques. Pour cela, prenons un système de coordonnées inertiel (cf. Eq. 3.2.2) et une masse test en chute libre, c'est-à-dire ayant une vitesse constante :

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \,. \tag{3.4.1}$$

Dans un système de coordonnées quelconques, la connection affine nous permet d'affirmer que :

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \,, \tag{3.4.2}$$

ou encore, en terme de vitesses locales u^λ :

$$\frac{du^\lambda}{d\tau} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 \,. \tag{3.4.3}$$

Exercice : **:** Montrer l'Eq. 3.4.2 à partir de l'Eq. 3.4.1. On utilise $\partial\xi^\alpha = (\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu)\partial x^\mu$, on dérive par rapport à τ et on multiplie enfin par $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$.

En effet, on peut montrer ([**15**], p. 71 & 75) que la définition :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{3.4.4}$$

est équivalente à l'équation 3.3.7 et contient l'effet du champ gravitationnel (en anticipant sur la suite). Le changement de référentiel implique que :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \,. \tag{3.4.5}$$

Enfin, si la particule n'a pas de masse (par exemple un photon), on remplace τ par $\sigma = \xi^0$. Retenons que *la dérivée covariante d'un vecteur est un tenseur qui coïncide avec la dérivée locale dans un référentiel inertiel*. En outre, (non démontré ici) les géodésiques ainsi définies sont bien des extremas d'une certaine mesure de longueur entre deux points quelconques de l'espace-temps.

3.5. Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion T est symétrique. Il a 16 composantes dont 10 sont indépendantes (à cause de la covariance) car on demande que T se conserve au sens des tenseurs lors d'un changement de référentiel.

Pour un ensemble discret de particules d'indice n dont le vecteur énergie-impulsion (cf. Eq. 3.3.2) est p_n^αon peut former ce tenseur ainsi :

$$T^{\alpha\beta}_{part}(x) \equiv \sum_n p_n^\alpha v_n^\beta \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\,, \tag{3.5.1}$$

$$\equiv \sum_n \int d\tau \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^4(x - x_n(\tau))\,. \tag{3.5.2}$$

L'équation 3.5.1 se réfère à une fonction Dirac δ ainsi que $\mathbf{x}$ à 3 dimensions. La formulation 3.5.2 est plus directement covariante et fait appel à une fonction de Dirac δ^4 et des vecteurs x et $x_n$dans l'espace à 4 dimensions. Elle montre que le tenseur est symétrique. S'il n'y a pas d'autres forces que la gravitation agissant sur ces particules, la loi de conservation de l'énergie-impulsion s'écrit :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}_{part}}{\partial x^\beta} = 0\,. \tag{3.5.3}$$

Pour le champ électromagnétique, la formulation des équations de Maxwell est la plus élégante sous sa forme covariante. On commence par former le tenseur électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ antisymétrique (donc de diagonale nulle) à partir des champs électrique E et magnétique B tel que $F^{12} = B_3$ et $F^{01} = E_1$ (etc...). Les équations de Maxwell relient alors le champ F aux courants J :

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = -J^\beta\,, \tag{3.5.4}$$

et l'absence de charge magnétique se traduit par :

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = 0\,; \tag{3.5.5}$$

(seulement localement covariant ici) enfin, la force de Lorentz s'écrit :

$$f^\alpha = eF^\alpha_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tau}\,. \tag{3.5.6}$$

Le tenseur énergie-impulsion lié au champ électromagnétique s'inspire donc des notions liées au vecteur de Poynting et s'écrit (de façon covariante) :

$$T^{\alpha\beta}_{EM} \equiv F^\alpha_\lambda F^{\lambda\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu}\,. \tag{3.5.7}$$

Dans le cas général, on somme les tenseurs d'énergie-impulsion pour obtenir le tenseur total :

$$T^{\alpha\beta}_{tot} = T^{\alpha\beta}_{part} + T^{\alpha\beta}_{EM} + \dots\,, \tag{3.5.8}$$

qui est le seul à être vraiment conservé :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}_{tot}}{\partial x^\beta} = 0\,. \tag{3.5.9}$$

3.6. Courbure

Comment définir les propriétés intrinsèques de la métrique ?

Comment reconnaître dans la métrique qu'elle n'est pas qu'une variante de la métrique espace-temps vide (Eq. 3.2.2) déguisée sous les oripeaux par exemple de coordonnées sphériques ? Dans une variété à seulement deux dimensions, penser à l'analogie entre le plan et la sphère : la courbure, qui est l'inverse du produit des rayons de courbure locaux nous indique si l'espace est courbe ou non (un cône, un cylindre, un tore sont-ils courbes ?). Pour cela, l'idée est de regarder "autour", dans le voisinage. On cherche donc une combinaison linéaire de $g_{\mu\nu}$ avec ses dérivées premières et secondes, qui soit un tenseur. Si on ne gardait que les dérivées premières, un changement de coordonnées permettrait de les annuler. Il faut dériver jusqu'à l'ordre deux pour arriver à des quantités physiques. Seul le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel répond à ces exigences. Il est défini à partir de la connection affine (Eq. 3.3.7) selon :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\,. \tag{3.6.1}$$

En contractant deux indices, on en déduit le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\alpha} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\alpha}\,, \tag{3.6.2}$$

qui est symétrique. En contractant une dernière fois, on obtient le scalaire de courbure (scalaire donc identique dans tous les systèmes de coordonnées) :

$$R_S \equiv g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha}\,. \tag{3.6.3}$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel est nul loin des champs de gravitation, et on retrouve la métrique de Minkowski dans ce cas. La propriété majeure de ces nouveaux tenseurs tient dans les identités de Bianchi qui relient leurs dérivées premières :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\eta}} R_{\lambda\mu\nu\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\alpha}} R_{\lambda\mu\eta\nu} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\nu}} R_{\lambda\mu\alpha\eta} = 0\,, \tag{3.6.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{\mu}} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_S) = 0\,. \tag{3.6.5}$$

3.7. Équations d'Einstein

La dérivation des équations d'Einstein (cf. [**15**], p. 151) est obtenue simplement en recherchant le tenseur contenant des dérivées d'ordre maximum 2 de la métrique qui serait proportionnel au tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. En fait, il n'y a pas grand choix du fait des identités de Bianchi :

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}(\frac{1}{2} R_S + \Lambda) = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.7.1}$$

La géométrie (membre de gauche) est directement connectée à l'énergie-impulsion totale (membre de droite). Le contenu en énergie-impulsion courbe l'espace-temps.

C'est une théorie non-linéaire car le membre de droite contient lui-même une contribution provenant de la courbure de l'espace-temps.

Ce sont des équations de propagation, voir version linéarisée (cf. Section 3.10)

4 des 16 équations sont redondantes, grâce aux identités de Bianchi (Eq. 3.6.5). Lié au choix (arbitraire) du système de coordonnées à 4D : la RG est une théorie de jauge. Les mesures physiques ne dépendent pas du choix de jauge.

La physique hors-gravitation s'insère dans un cadre inséparable espace-temps-gravité.

La constante $8\pi G$ est déduite de la limite Newtonienne (voir 3.8) où $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-2}}$ est effectivement la constante gravitationnelle classique. G est une "vraie" constante, indépendante du lieu et de l'instant. Les théories où G varie, sont hors RG, ce qui ne veut pas dire qu'elles sont fausses : la physique des particules arrive à construire des champs dont l'interaction avec la matière produit une constante gravitationnelle "effective" variable.

Une autre constante λ apparaît dans la partie gauche de l'équation. C'est la fameuse constante cosmologique sur laquelle nous reviendrons à propos des périodes d'inflation de l'Univers.

3.8. Limite Newtonienne

Dans le cas des champs faibles, on peut écrire que finalement la relativité générale n'est qu'une petite déformation de la métrique de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \,, \tag{3.8.1}$$

où $|h| \ll 1$. Au premier ordre en $|h|$, le tenseur de Ricci (Eq. 3.6.2) s'approxime en :

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \,. \tag{3.8.2}$$

La connection affine (Eq. 3.3.7) se simplifie en :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha}\left[\frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right] \,. \tag{3.8.3}$$

D'autre part, l'équation des géodésiques (3.4.2) s'écrit, en supposant de petites vitesses de déplacement (par rapport à la vitesse de la lumière), grâce à :

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right| \ll \left|\frac{dt}{d\tau}\right|$$

(On cherche donc $g_{\mu\nu}$ fixe dans le temps, tout au moins pour des temps courts où les corps n'ont pas traverser de distance significative, ce qu'on vérifiera à la fin), ainsi :

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{00}(\frac{dt}{d\tau})^2 = 0 \,. \tag{3.8.4}$$

Pour $\lambda = 0$ cela veut dire que $d^2t/d\tau^2 = 0$ donc que le temps est "universel" (on peut prendre $t = \tau$). Pour les 3 autres indices, on a :

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} \,, \tag{3.8.5}$$

car la connection affine se résume à $\Gamma^{\lambda}_{00} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}}$. En identifiant l'équation de mouvement avec la loi de Newton (Eq. 2.2.2, 2.2.3), on trouve que :

$$h_{00} = -2\phi \,. \tag{3.8.6}$$

Le tenseur énergie-impulsion pour de la matière non-relativiste est dominé par $T_{00} = \rho$. Dans ce cas, on peut montrer que l'Eq. 3.7.1 se réduit au terme temporel : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_S \sim 2R_{00} = \nabla^2 g_{00} = \nabla^2 h_{00} = -8\pi G\rho$, la dernière égalité provenant directement de l'équation de Poisson (Eq. 2.2.6), en supposant que la constante cosmologique est négligeable. En remettant la vitesse de la lumière explicitement, nous voyons comment s'écrit l'élément de métrique en champ faible :

$$g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\phi}{c^2}\right) \,. \tag{3.8.7}$$

De même qu'en mécanique quantique où les solutions moyennes ne font plus intervenir $\hbar$, on retrouve ici que la dynamique des particules massives décrites par l'Eq. 2.2.2 ne contient pas c.
Exercice : Combien vaut h_{00} au ras de notre vieille terre ? au ras du soleil ? ($M_{\oplus} = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $R_{\oplus} = 6.38 \times 10^{6}$ m, $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg, $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{8}$ m)

3.9. Métrique de Schwarzschild

On cherche une solution des équations d'Einstein qui soit stationnaire et isotrope dans le vide au voisinage d'une masse M (cette masse peut être ponctuelle, ou à symétrie sphérique). On peut montrer que la seule solution est donnée de façon simple evidemment en coordonnées sphériques selon (Schwarzchild 1916) :

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2GM}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2GM}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi \,. \tag{3.9.1}$$

En développant les géodésiques (Eq. 3.4.2) dans cette métrique, on peut montrer que les rayons lumineux venant de l'infini sont déviés lorsqu'il passent au voisinage (à la distance R) de la masse M par un angle total de :

$$\alpha = \frac{4MG}{c^2 R} = 1.75\text{"} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1} \,. \tag{3.9.2}$$

C'est la première prédiction de la RG qui ait pu être vérifiée. C'est le double de ce qu'on obtiendrait avec un raisonnement "naïf" newtonien. Le facteur 2 est d'origine relativiste : le photon a une énergie égale à c fois l'impulsion.

Les orbites de corps massifs gravitant autour de M peuvent également être calculées. On retrouve les lois de Képler au premier ordre. Au deuxième ordre, la perturbation de la métrique ne se fait sentir que pour l'orbite de Mercure qui n'est plus fermée. Le périhélie de Mercure (point de l'orbite le plus proche du soleil à la distance r_-, l'aphélie à r_+) subit une rotation lente dans le sens de rotation de la planète avec une vitesse angulaire de :

$$\Delta\varphi \sim 3\pi \frac{GM_\odot}{c^2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \frac{\text{radians}}{\text{revolution}} \,, \tag{3.9.3}$$

qui vaut 43 secondes d'arc par siècle pour Mercure. C'était l'un des derniers mystères dans les observations du 19ème siècle qui ne collaient pas avec la théorie de Newton. En fait, ce n'est qu'une partie de la précession de Mercure qui n'est pas expliquée. En effet, les autres planètes influencent Mercure en produisant une précession (dominante) de 532 secondes d'arc par siècle.

Les développements récents sur les tests de lar RG concernent d'autres effets fins (développements à l'ordre 2 en l'intensité du champ gravitationnel, l'ordre 1 étant Newton). On pourra consulter

http ://www.resonancepub.com/gravity.htm

http ://www-cosmosaf.iap.fr/Gravity-probe-B.htm

pour l'aventure moderne du satellite (en orbite en ce moment) *Gravity Probe B*. Lancé le 20 avril 2004, il doit mesurer l'effet géodésique (6.6 "/an, effet de couplage spin–orbite entre des gyroscopes et le champ gravitationnel terrestre) avec une précision de 10^{-5} et, pour la première fois, l'effet Lense-Thirring (0.042 "/an) couplage spin–spin (Terre–Gyros) d'entrainement de référentiels tournants dit "gravito–magnétique") avec une précision de 1 %.

Enfin, nous mentionnons en passant (faute de temps) la description des trous noirs avec cette métrique, pour le cas où le rayon limite R d'une masse M est plus petit que GM/c^2. Un trou noir se caractérise uniquement par sa masse, son moment cinétique et sa charge. En principe, rien ne s'échappe de l'intérieur d'un trou noir, pas même la lumière. Néanmoins, des effets quantiques subtils permettent de prédire que les trous noirs s'évaporent (rayonnement de Hawking). Leur surface peut être identifiée à l'entropie du trou noir. De fortes indications montrent que les trous noirs de une à un milliard de masses solaires peuplent les galaxies. Se pourrait-il que les trous noirs (dont le nombre baryonique a disparu) soient une fraction non négligeable de la matière noire ?

3.10. Ondes gravitationnelles

En utilisant les approximations de champ faible (Eqs. 3.8.2 & 3.8.3), on résoud les équations d'Einstein (3.7.1). De façon générale, on trouve :

$$\Box h_{\mu\nu} = 0\,, \tag{3.10.1}$$

avec le choix de jauge (système de coordonnées) tels que :

$$\frac{\partial h^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\,. \tag{3.10.2}$$

Le d'Alembertien est défini comme le laplacien à 4D :

$$\Box = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,. \tag{3.10.3}$$

De même que les équations de Maxwell comportent des solutions dans le vide qui correspondent à la propagation d'ondes électromagnétiques à la vitesse de la lumière, les équations de propagation (3.10.1 & 3.10.2) possèdent des solutions en tant qu'ondes se propageant à la vitesse de la lumière. Les ondes gravitationnelles correspondent à une déformation locale de l'espace-temps se propageant dans le vide. Les ondes électromagnétiques ont une polarisation décrite par un vecteur et sont donc d'hélicité (spin) 1. La polarisation des ondes gravitationnelles se décrit à l'aide d'un tenseur d'ordre 2. Les ondes sont donc d'hélicité 2. La source des ondes gravitationnelles s'écrit comme un terme de droite non nul ($-16\pi G[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}]$) dans l'Eq. 3.10.1. L'effondrement d'une masse gravitationnelle peut engendrer des ondes gravitationnelles s'il se produit de façon non isotropique (par ex., avec un quadrupole non nul, en forme de ballon de rugby). Celui-ci peut se produire lorsqu'une étoile arrive en fin de combustion nucléaire, lorsque la pression du gaz ne supporte plus sa gravité. A l'heure actuelle, des interféromètres (par ex. VIRGO en Europe et LIGO aux USA) commencent leurs observations afin de détecter directement les ondes gravitationnelles, une prédiction parmi les plus tranchantes de la RG. Nous verrons que le Big Bang a sans doute produit un fond d'ondes gravitationnelles stochastique dont la trace est activement recherchée dans la polarisation du rayonnement fossile à 3 K. La meilleure indication que des ondes gravitationnelles existent bel et bien est indirecte. Le pulsar double PSR1913+16 a permis de mesurer précisément les paramètres orbitaux au cours du temps. La perte d'énergie mesurée par la décroissance de l'orbite est en accord avec le taux d'émission d'ondes gravitationnelles prédit par la RG. Ces calculs sont très complexes (N. Deruelle et T. Damour en sont les champions en France). Les observations du pulsar double, capitales pour la RG, ont été couronnées par un prix Nobel de physique (1993, R. Hulse et J. Taylor).

3.11. Redshift gravitationnel

Mettez une horloge à une position fixe $\mathbf{r}$ dans un faible champ gravitationnel. Son battement peut s'identifier au temps propre $d\tau$ dans la métrique (3.2.1 on page 14). En annulant les composantes spatiales dx^i, on trouve qu'un observateur va mesurer un battement égal à dt (le temps universel dont nous avons parlé au paragraphe 3.8 on page 19) :

$$dt \propto \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(\mathbf{r})}}\,. \tag{3.11.1}$$

En utilisant l'expression de la métrique en champ faible (Eq. 3.8.7), cette dernière expression indique que la fréquence d'une horloge (ou d'une raie spectrale) subit un décalage $\triangle\nu$ tel que :

$$\frac{\triangle\nu}{\nu} = \frac{\Phi}{c^2}\,. \tag{3.11.2}$$

Ainsi les raies visibles du soleil devraient être décalées vers le rouge (redshift) car le potentiel gravitationnel est négatif de l'ordre de $\frac{\Phi}{c^2} \sim -2 \times 10^{-6}$. Ce décalage se superpose au décalage Doppler et est d'une autre nature. Bien que présent dans les données, le redshift gravitationnel dans les observations du spectre solaire ne peut se mettre en évidence de façon non ambigue. Des expériences sur terre (effet Mossbauer) ont permis de mettre en évidence l´ effet avec une précision de un pourcent ([**15**]p. 82-83).
*Exercice :*Retrouver l'expression 3.11.2 par un raisonnement sur des photons envoyés verticalement dans un ascenseur accéléré (localement équivalent à un champ de gravitation par le principe d'équivalence).

3.12. Conclusions

La Relativité Générale part du principe d'équivalence et des lois asymptotiques que sont la Relativité Restreinte pour l'électromagnétisme sans gravité et la gravitation Newtonnienne en champ faible. L'interprétation de la RG la plus admise conclut que le continuum espace-temps est courbé par la totalité de son contenu en énergie-matière, le champ gravitationnel en faisant lui-même partie. Les effets de la RG se font sentir avec une intensité proportionnelle à $GM/(c^2 r)$ où M et r sont la masse et la distance en jeu et les deux constantes G de la gravitation Newtonienne et c de la Relativité Restreinte apparaissent ensemble. Cette intensité est très faible dans le voisinage solaire (10^{-6} à la surface du soleil). La RG est une théorie non-linéaire dont les solutions analytiques sont peu nombreuses (métrique de Schwarschild : section 3.9, métrique de Robertson-Walker : plus loin, section 4.1). Outre les effets de courbure des rayons lumineux et de redshift gravitationnel, la RG prédit l'existence d'ondes gravitationnelles se propageant à la vitesse de la lumière qui, si elles étaient détectées, nous informeraient sur les premières phases du Big Bang et les effondrements gravitationnels violents de l'Univers.

CHAPITRE 4

Cosmologie standard

4.1. Métrique de Friedmann-Robertson–Walker

De fortes indications (distribution des galaxies, et rayonnement fossile à 3 K), sur lesquelles nous reviendrons plus tard, nous portent à considérer un univers *homogène à grande échelle et isotrope.* Les défauts à cette double hypothèse peuvent généralement être considérés comme locaux et semblent peu significatifs pour l'univers observé à grande échelle. En outre, nous disposons de fortes indications que l'Univers etait (encore plus) homogène et isotrope dans le passé et sur des échelles spatiales beaucoup plus diverses.

Analogie : un mur de briques est homogène à 2D mais pas isotrope (cf. Wright). Mettez vous au centre d'un oignon : l'oignon vous parait isotropique mais pas homogène à cause de ses couches différentes (OK : comparaison gastronomique n'est pas raison astronomique).

Juste armés de la RG et de cette double hypothèse nommée *principe cosmologique*, nous voilà en mesure de trouver la métrique de l'espace-temps (à grande échelle à tout le moins, disons au-delà de 10 Mpc) et son évolution dans le temps (cf. 4.3).

Ici, la métrique qui ne dépend pas des équations d'Einstein (Eq. 3.7.1), s'exprime généralement, pour un observateur donné, en coordonnées radiales $(r,\, \theta,\, \varphi)$ comme :

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \right] . \tag{4.1.1}$$

Plusieurs remarques permettent d'appréhender cette métrique :

La forme de la métrique a très peu de paramètres libres, car les espaces homogènes et isotropes sont des espaces à symétrie maximale. La démonstration que c'est la bonne forme est intégralement dans [**15**], Chap. 13.

La métrique est dite ortho-chrone car les termes croisés de type $dt.dx$ sont nuls. L'absence de termes croisés (par ex. $dt\,dr$ ou $dr\,d\theta$) résulte d'un choix de jauge pratique, non unique, mais très communément employé.

$R(t)$ se nomme le facteur d'échelle. Il est universel. Il s'applique globalement à la métrique de l'espace. Il ne peut dépendre de r, θ, ϕ puisque cela briserait l'hypothèse d'homogénéité. Son unité est le mètre. Nous verrons qu'il est intimement lié à la courbure de l'Univers si $k \neq 0$. Si $k = 0$, il y a une dégénérescence entre R et r par un facteur constant. Toute la dynamique de l'Univers va se manifester dans la fonction $R(t)$.

Les observateurs sont d'accord sur le temps t. C'est une particularité de la métrique de FRW qui vient de l'homogénéité de l'espace. Ce n'est pas une contradiction de la RG.

La sphère céleste conserve ses angles habituels en projection sphérique (θ, φ) et le bout de métrique associé traite les angles solides sur le même pied d'égalité où qu'il soit, hypothèse d'isotropie oblige.

La constante k peut valoir -1, 0, $+1$ seulement. Les coordonnées d'espace à l'intérieur des crochets sont dites comobiles. On verra plus loin que les objets en chute libre tendent à se retrouver avec des coordonnées comobiles fixes (Eq. 4.2.6). On retrouve la métrique d'espace euclidien pour $k = 0$, équivalente à $dx^2 + dy^2 + dz^2$. On dit que l'espace est “plat” dans ce cas, ce qui n'est qu'un raccourci de language.

$k = +1$ correspond à un univers de géométrie sphérique. Mais, c'est d'une 3-sphère dont il s'agit ici. L'univers est fini. Son volume est de $2\pi^2 R^3$. Dans ce cas, il est correct de parler de R comme du rayon de courbure de l'Univers. La variable r n'est pas interprétable directement comme la distance d'un rayon vecteur. On imaginera plutôt l'analogie suivante. L'espace étant isotrope, restreignons-nous un instant à ne considérer qu'une feuille d'espace (r, θ). Cette feuille peut être plongée dans un espace 3D, en fait sur la surface d'une sphère de rayon 1 (on ne regarde que la métrique dans les crochets de 4.1.1). Un point quelconque sur cette sphère est paramétré par :

$$\begin{aligned} x &= \sin\chi \, \cos\theta \\ y &= \sin\chi \, \sin\theta \\ z &= \cos\chi \, , \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

où χ désigne un angle qui vaut zéro pour l'observateur situé au sommet de la sphère. En différenciant ces expressions, on trouve facilement que la métrique vaut $d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\theta^2$. En identifiant $r \equiv \sin\chi$, on retrouve la métrique $\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 \, d\theta^2$ des crochets. Ce n'est qu'une analogie. Notre Univers peut être décrit par une métrique Riemanienne sans plongement spécifique dans un espace possédant une dimension de plus.

$k = -1$: l'Univers est ouvert, infini, de type hyperbolique. Il possède une géométrie en “selle de cheval” moins facile à visualiser.

De manière générale on peut reformuler la métrique de FRW sous :

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[d\chi^2 + S_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \right] \; . \tag{4.1.3}$$

La fonction $S_k(\chi)$ vaut $\sin(\chi)$, χ, ou $\mathrm{sh}(\chi)$ selon que le paramètre de courbure k vaut $+1$, 0, ou -1, en accord avec notre plongement précédant.

Il n'est pas rare de mettre le temps “à la norme” de R. Ainsi on définit le temps conforme avec $d\eta = dt/R$ et la métrique devient :

$$ds^2 = R(t)^2 \left[d\eta^2 - d\chi^2 - S_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \right] \; . \tag{4.1.4}$$

4.2. Géodésiques

L'équation des géodésiques (3.4.3) nous permet de trouver la loi des corps en chute libre. La quadri-vitesse satisfait à :

$$\frac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 \, . \tag{4.2.1}$$

Les seules composantes non nulles des symboles de Christoffel sont :

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{\dot{R}}{R} g_{ij} \; , \tag{4.2.2}$$

où g_{ij} est la métrique de l'espace (indices latins) et, par définition, $\dot{R} \equiv dR/dt$. La norme 3D du vecteur vitesse est par définition :

$$|\vec{u}|^2 \equiv g_{ij} u^i u^j \; , \tag{4.2.3}$$

et elle satisfait à :

$$(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = 1 \, . \tag{4.2.4}$$

L'équation (4.2.1) devient donc :

(4.2.5) $$\frac{1}{|\vec{u}|}\frac{d\,|\vec{u}|}{dt} = -\frac{\dot{R}}{R}\,,$$

qui intégrée montre que :

(4.2.6) $$|\vec{u}| \propto \frac{1}{R}\,.$$

Ainsi la 3D norme du vecteur vitesse d'une particule en chute libre tend à décroître comme $1/R$. La vitesse particulière se "dilue" si l'Univers est en expansion. La température d'un gaz non-relativiste décroit donc comme $1/R^2$. Une démonstration similaire conduit à la même relation pour les photons. Dans ce cas, c'est l'énergie du photon $h_p\nu$ qui décroit (et non la vitesse), où h_p est la constante de Planck. Ainsi, entre l'émission (ν_1, t_1) et la réception du photon (ν_2, t_2), la fréquence suit la loi :

(4.2.7) $$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)}\,,5.1.1$$

qui indique un décalage vers le rouge (redshift) des photons lors de leur traversée d'un Univers en expansion. La température d'un gaz de photons décroit comme $1/R$.

4.3. Equations Friedmann-Lemaître d'évolution de l'Univers

4.3.1. Tenseur énergie-impulsion homogène et isotrope. Le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ de l'Univers doit être symétrique tout comme la métrique. Ceci impose que le tenseur est diagonal. En faisant l'hypothèse d'un fluide parfait, c'est-à-dire qu'on peut définir localement une vitesse moyenne du fluide, la forme générale du tenseur est :

(4.3.1) $$T^{\mu}_{\ \nu} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}\,,$$

avec

(4.3.2) $$T^{\mu\nu} = T^{\mu}_{\ \rho} g^{\rho\nu}\,,$$

où $\rho(t)$ et $P(t)$ sont des fonctions uniquement du temps qu'on identifie avec la densité et la pression moyenne du fluide. Dans le référentiel choisi des coordonnées comobiles de la métrique FRW, le tenseur d'un fluide parfait de vitesse moyenne u^ν :

(4.3.3) $$T^{\mu\nu} = P\,\eta^{\mu\nu} + (P+\rho)\,u^\mu u^\nu\,,$$

comparé à l'expression (4.3.1) nous montre que le fluide est globalement au repos.

La conservation de l'énergie-impulsion (Eq. 3.5.9) : $dT^{0\beta}/dx^\beta = 0$ se convertit donc en :

(4.3.4) $$d(\rho R^3) = -P\,dR^3\,,$$

qui exprime le premier principe de la thermodynamique dans un Univers en expansion : $(TdS = 0 = PdV + dU)$.

C'est le comportement physique des constituants dominants qui va nous permettre de résoudre cette équation en imposant une relation entre ρ et P, appelée équation d'état. Quatre états différents sont discutés ici, car particulièrement pertinents pour l'Univers présent et passé.

4.3.1.1. *Matière Relativiste.* Le rayonnement (ou tout autre matière relativiste) vérifie :

$$P = \frac{1}{3}\rho\,, \tag{4.3.5}$$

ce qui combinée à l'Eq. (4.3.4) montre que la variation de la densité :

$$\rho \propto R^{-4}\,, \tag{4.3.6}$$

varie comme l'inverse de la puissance 4 du paramètre d'échelle. L'expansion de l'espace dilue les photons, mais les photons perdent de l'énergie (Eq. 5.1.1). En revanche, la densité numérique comobile (nombre de particules par volume comobile) est conservée.
Exo : Montrer la relation (4.3.5) en utilisant l'équation (4.3.1) et l'équation (3.5.2) appliquée à un gaz de photons.

4.3.1.2. *Matière Non-Relativiste.* La matière non-relativiste a une densité de masse beaucoup plus grande que sa pression, car l'énergie de masse de chaque particule ($\sim mc^2$) est beaucoup plus grande que l'agitation thermique ou sa vitesse particulière ($\sim mv^2$). Donc on peut prendre l'approximation :

$$P = 0\,, \tag{4.3.7}$$

c'est-à-dire celle d'un fluide sans pression. Pour cette raison, certains théoriciens appellent ce fluide un gaz de poussières. Cette matière voit donc sa densité obéir à :

$$\rho \propto R^{-3}\,, \tag{4.3.8}$$

ce qui signifie que la densité comobile est conservée dans l'expansion de l'Univers.

4.3.1.3. *Energie Noire.* L'énergie du vide (notion quantique sur laquelle nous reviendrons) possède une équation d'état particulière :

$$P = -\rho\,, \tag{4.3.9}$$

puisqu'une pression négative correspond à une répulsion. En outre, les équations d'Einstein (3.7.1) peuvent formellement se réécrire :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu})\,, \tag{4.3.10}$$

et ainsi, en identifiant terme à terme avec l'Eq. (4.3.1), on trouve qu'une constante cosmologique est formellement équivalente à un constituant de l'Univers possédant une équation d'état :

$$\rho = -P = \frac{\Lambda}{8\pi G}\,. \tag{4.3.11}$$

Tous ces cas conduisent (avec l'Eq. 4.3.4) à une densité d'énergie et une pression constantes, indépendantes du temps.

4.3.1.4. *Cas général. Exercice :* Montrer que de façon générale, si un constituant de l'Univers satisfait à l'équation d'état :

$$P = w\,\rho\,, \tag{4.3.12}$$

où w est une constante (généralement comprise entre -1 et $+1$), alors sa densité suit la loi :

$$\rho \propto R^{-3(1+w)}\,. \tag{4.3.13}$$

Tant que les intéractions entre constituants sont négligeables, l'évolution de la densité de chaque constituant suivra également sa loi de décroissance respective.

4.3.2. Équations de Friedmann-Lemaître. Nous sommes maintenant prêts pour allier la géométrie et l'énergie-impulsion de l'Univers, grâce aux équations d'Einstein (3.7.1). La structure diagonale du tenseur énergie-impulsion (Eq. (4.3.1) nous montre que seulement deux équations d'Einstein, parmi les 16 au départ, sont indépendantes et non triviales, ce sont les équations de Friedmann-Lemaître. En injectant la métrique de Friedmann-Roberston-Walker (Eq. 4.1.1) dans l'expression du tenseur de courbure de Ricci, ici diagonal, on trouve que ses composantes diagonales sont :

$$R^0_0 = 3\frac{\ddot{R}}{R}\,, \tag{4.3.14}$$

$$R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = -\frac{\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}\,, \tag{4.3.15}$$

et que le scalaire de courbure (à ne pas confondre avec le facteur d'échelle) vaut :

$$R_s = 6\frac{\ddot{R}R + \dot{R}^2 + k}{R^2}\,. \tag{4.3.16}$$

De par la symétrie des équations et le nombre de termes nuls dans la jauge choisie, il ne reste que deux équations d'Einstein utiles, appelées équations de Friedmann. Pour simplifier, la somme des densités d'énergie, incluant l'éventuelle constante cosmologique, est notée ρ. La première équations provient du terme R^0_0 et contient explicitement la dynamique :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho\,. \tag{4.3.17}$$

La dernière équation utile est l'une des 3 équations identiques qui proviennent des termes en R^i_i :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)\,, \tag{4.3.18}$$

Exercice : Montrer que cette équation est équivalente à la conservation de l'énergie-impulsion (Eq. 4.3.4), déjà développée (Section 4.3.1).

Les conséquences de cette loi d'évolution de l'Univers (Eq. 4.3.17 & 4.3.18) peuvent maintenant être précisées.

4.3.3. Paramètres cosmologiques. Les paramètres réduits permettent de définir une équation encore plus simplifiée. Pour cela, on définit d'abord le paramètre de Hubble (en fait une fonction du temps) :

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}\,. \tag{4.3.19}$$

C'est le taux d'expansion relatif de l'Univers. Pris maintenant (pour $t = t_0$), il est égal à ce qu'on définit comme la constante de Hubble :

$$H_0 \equiv H(t_0)\,. \tag{4.3.20}$$

On verra le rôle de cette constante homogène à l'inverse d'un temps caractéristique.

On définit ensuite la densité critique :

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}\,. \tag{4.3.21}$$

et on mesure la densité des différents constituants de l'Univers par rapport à cette densité :

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}\,, \tag{4.3.22}$$

ce qui définit leur densité réduite. Pour la constante cosmologique, cette expression devient la constante cosmologique réduite (qui n'est plus constante !) :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}\,. \tag{4.3.23}$$

L'équation (4.3.17) se réécrit alors :

$$\sum_i \Omega_i - \frac{k}{H^2R^2} = 1\,, \tag{4.3.24}$$

qui est valable à tout instant t. Si on définit la densité réduite d'énergie de courbure, ou encore courbure réduite, comme :

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H^2R^2}\,, \tag{4.3.25}$$

alors, quel que soit l'Univers considéré et à un instant quelconque de sa vie, *la somme des densités d'énergie réduites vaut l'unité*.

On peut aussi choisir de n'utiliser que les densités réduites définies maintenant pour l'instant $t = t_o$. C'est notre convention pour la suite. Dans ce cas, on peut transformer l'équation précédente en :

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\alpha_i}\,, \tag{4.3.26}$$

où $\alpha_i = 3(1+w_i)$ est l'exposant de variation de la densité avec le facteur d'échelle, tel qu'exposé en section (4.3.1), Eq. (4.3.13). Ainsi $w_i = \frac{1}{3}$, 0, -1 pour la matière relativiste, non-relativiste et énergie du vide, respectivement. En particulier, un mélange quelconque de rayonnement, de matière non-relativiste, de courbure et de constante cosmologique contraint la vitesse d'évolution du facteur d'échelle comme :

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4} + \Omega_m\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} + \Omega_k\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2} + \Omega_\Lambda\,. \tag{4.3.27}$$

C'est sous cette forme que l'on voit le mieux comment chaque terme va dominer les autres sur une tranche de R, et dans l'ordre de gauche à droite, pour un Univers en expansion.

Les paramètres provenant de nombreuses mesures convergent vers la liste donnée dans la table à la page 6.

Pour un Univers en expansion ($\dot{R} > 0$), R croît, donc l'Eq. (4.3.26) implique que H^2 décroît. Dans ce cas, l'Univers a un âge fini. La condition exacte est que $w > -\frac{1}{3}$ (**Exo**). On définit $t = 0$ comme le moment où R s'annule et les densités deviennent infinies. L'âge de l'Univers peut se calculer à partir des densités réduites de ses constituants. En changeant de variable $a \equiv R/R_0$, on peut écrire l'équation Friedmann-Lemaître (4.3.26) sous de nouveaux habits :

$$\dot{a} = H_0\sqrt{\sum_i \Omega_i a^{2-\alpha_i}}\,, \tag{4.3.28}$$

ce qui donne, sous forme intégrale :

$$H_0 t_0 = \int_0^1 da \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Omega_i a^{2-\alpha_i}}}\,, \tag{4.3.29}$$

où la constante de Hubble définit l'ordre de grandeur de cet âge.

En utilisant l'Eq. (4.3.18), on trouve que l'accélération de l'Univers peut se mesurer avec ce que l'on définit traditionnellement par le *paramètre de décélération* (cf. plus loin) mesuré maintenant :

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \,. \tag{4.3.30}$$

Exercice : Evaluer q_0 en fonction de Ω_m et Ω_Λ.

Ce paramètre apparait naturellement dans le développement limité du facteur d'échelle :

$$R = R_0(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 {H_0}^2(t - t_0)^2 + ...) \,. \tag{4.3.31}$$

4.3.4. Des infortunes diverses de l'Univers. L'intégration analytique des équations de Fridmann-Lemaître est lourde et n'existe pas dans le cas général. Nous donnons ici la solution lorsqu'un des constituants, d'équation d'état donnée par (Eq. 4.3.12), domine. Dans ce cas, la donnée de w permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_0} &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \\ q &= \frac{1+3w}{2} \end{aligned}$$

Pour le cas d'une constante cosmologique, on parle d'un Univers de de Sitter :

$$R = R_0 \exp \frac{c(t - t_0)}{\sqrt{\Lambda/3}}$$

En combinant une constante cosmologique et une courbure positive, on peut arriver à un Univers statique : c'est le modèle d'Einstein, qui est malheureusement instable. Lemaître a trouvé les paramètres d'un Univers en expansion, tels que la période ressemblant au modèle statique d'Einstein peut être rendue très longue. Un modèle d'Univers d'Einstein-de Sitter se caractérise par ($k = 0$, $\Lambda = 0$ et donc $\Omega_M = 1$).

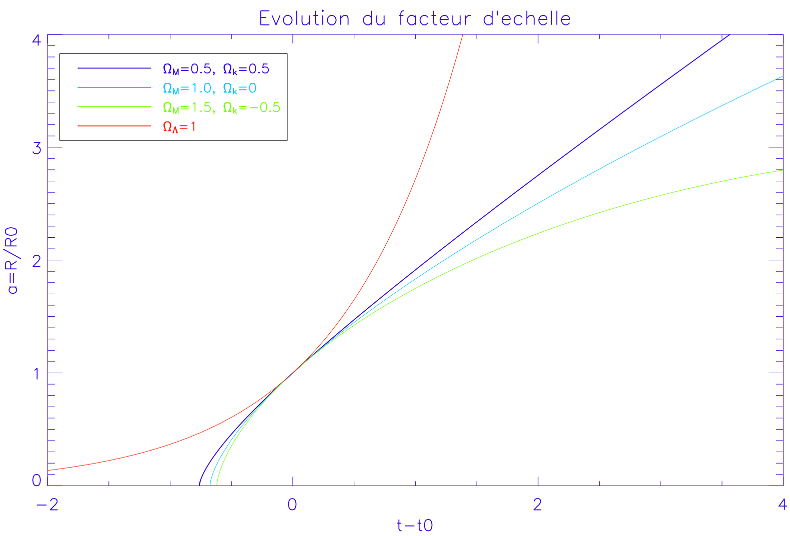


Figure : Quelques cas typiques de paramètres cosmologiques, le temps est dans l'unité de $1/H_0$ centré sur maintenant. Dans ces unités, la pente en 0 vaut toujours l'unité.

CHAPITRE 5

L'expansion de l'Univers

5.1. Distances et horizons

5.1.1. Le décalage vers le rouge dit redshift. Les observations des spectres de galaxies permettent de mesurer la fréquence (reçue ν_r) d'une raie connue d'un élément (par exemple, l'hydrogène, le sodium) et de la comparer à la fréquence de la même transition mesurée au laboratoire (émise ν_e). On a constaté que toutes les raies identifiables (en absorption ou en émission) subissent un facteur de réduction constant :

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = a = \frac{R}{R_0}\,, \tag{5.1.1}$$

où R est le facteur d'échelle au moment où la galaxie émet son rayonnement et R_0 au moment où on le détecte. À l'époque de Hubble (1920), les astronomes n'imaginaient pas de grands décalages vers le rouge et créèrent la quantité mesurée z avec la définition suivante :

$$z \equiv \frac{\Delta\nu}{\nu_r} = \frac{\nu_e - \nu_r}{\nu_r}\,, \tag{5.1.2}$$

ce qui est tout-à-fait correct si on n'oublie pas ce qui est exactement au numérateur et au dénominateur. On obtient ainsi que :

$$1 + z = a^{-1} = \frac{R_0}{R}\,. \tag{5.1.3}$$

On appelle *vitesse de récession*, la vitesse d'un objet local en mouvement par rapport à nous et montrant le même décalage vers le rouge :

$$v \equiv cz\,, \tag{5.1.4}$$

ce qui est un raccourci de language, car les galaxies ne s'éloignent pas de nous en coordonnées comobiles. La vitesse particulière des galaxies (celle qui serait mesurée par le dipole cosmologique local) est en général faible par rapport à la vitesse de récession due à l'expansion de l'Univers. On parle ici de vitesse radiale et comptée positivement pour un objet s'éloignant de l'observateur. Une vitesse tangentielle ne produit pas de changement de fréquence au premier ordre.

5.1.2. Le long voyage des photons. L'équation des géodésiques pour les photons, dans le cas d'un Univers de Friedmann, nous conduit (en valeur absolue) à :

$$c\,dt = R\,d\chi = R\,\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}\,. \tag{5.1.5}$$

Le paramètre d'échelle R est quant à lui déterminé par l'équation de Friedmann (4.3.27). On peut ainsi passer de la variable t à la variable R (ou encore z avec $1+z = R_0/R$) grâce à $dt = dR/\dot{R}$. En relativité générale il n'y a pas de notion universelle de distance. Si on se donne un type de mesure, alors, par analogie, on peut définir une distance qui se confond avec la notion traditionnelle loin des masses ou pour un petit trajet. Nous allons montrer les définitions les plus usuelles de distances entre un observateur en $r_0 = 0$ et $R = R_0$, et un émetteur de lumière situé en r_1 et $R = R_1 < R_0$. Dans ce cas-là, les trois quantités satisfont à :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \chi_1 = c \int_{R_1}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} . \tag{5.1.6}$$

5.1.3. Distance propre. C'est simplement le temps de traversée des photons que multiplie la vitesse de la lumière :

$$D_P \equiv c \int_{R_1}^{R_0} \frac{dR}{\dot{R}} . \tag{5.1.7}$$

C'est une notion d'utilité limitée bien que fondamentale.

5.1.4. Distance comobile. C'est la notion qui se rapproche le plus des coordonnées comobiles, mais rapportées à des mesures présentes ($t = t_0$) :

$$D_C \equiv R_0 \chi_1 = c\, R_0 \int_{R_1}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} . \tag{5.1.8}$$

Pour effectuer une telle mesure de distance, il faut imaginer que les petits éléments de distance parcourue par la lumière $R_0 d\chi$ et mesurés au même instant $t = t_0$ sont ensuite additionnés. Ce n'est clairement pas ce qu'on mesure d'habitude, mais c'est un concept très utile pour les calculs théoriques. Notez que pour un Univers en expansion, la distance propre est toujours plus petite que la distance comobile. Un photon a plus voyagé que son temps de vol ne le laisserait penser, car l'Univers était plus petit dans le passé. Enfin remarquez qu'on est insensible au choix de normalisation de R_0 (arbitraire surtout lorsque la courbure est nulle)".

5.1.5. Distance de luminosité. Un objet de luminosité L (en Watt par exemple) situé en r_1 voit une partie de sa lumière détectée par un télescope de surface S. Le flux de l'objet est la puissance détectée par unité de surface : $f \equiv P/S$. On définit la distance de luminosité D_l comme la distance équivalente intervenant dans la relation euclidienne entre flux et luminosité :

$$D_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{5.1.9}$$

En élaborant sur le transport des rayons lumineux (toujours les géodésiques), on montre que le flux d'une source vaut :

$$f = \frac{L}{4\pi (R_0 r_1)^2} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 . \tag{5.1.10}$$

Le terme en $(R_0 r_1)^2$ (qui n'est pas si intuitif) représente la “bonne distance” au carré. Deux autres effets doivent être inclus qui contribuent chacun à un terme en R_1/R_0. Un des termes provient de la dilation du temps : imaginez un pulse de durée Δt_1 qui se voit détecté pendant la durée $\Delta t_0 = \Delta t_1 \frac{R_0}{R_1}$ (Eq. 5.1.1 où on identifie l'inverse d'un temps avec une fréquence). L'autre terme vient de l'énergie des photons qui est “dégradée” dans l'expansion. Finalement, la distance de luminosité devient :

$$D_L = \frac{R_0}{R_1} R_0 r_1 . \tag{5.1.11}$$

Dans cette expression, le lien entre r_1 et χ_1 provient de la métrique (Eq. 4.1.3).

5.1.6. Distance angulaire. Prenez un objet de taille fixe U. Il va sous-tendre un angle ψ variable si vous le mettez le à des redshifts différents. La distance angulaire se définit comme celle qui intervient dans le cas euclidien et pour des petits angles :

$$D_A \equiv \frac{U}{\psi}\,. \tag{5.1.12}$$

Tous calculs faits, cette distance angulaire n'est pas égale mais est liée à la distance de luminosité :

$$D_A = R_1 r_1 = \frac{R_1}{R_0}\,R_0 r_1 = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 D_L\,. \tag{5.1.13}$$

Étant le produit d'une quantité décroissante R_1 par une quantité croissante r_1, la distance angulaire peut dans certains cas ne pas croître avec le redshift.

5.1.7. Horizons. La vitesse finie de la lumière et et l'âge fini de l'Univers nous imposent des limites sur l'Univers observable. On définit l'horizon particulaire comme la distance maximum comobile qui nous sépare des particules ayant pu nous influencer :

$$D_{HP} \equiv c\,R_0 \int_0^R \frac{dR}{R\,\dot{R}}\,. \tag{5.1.14}$$

*Exercice :*Déterminer que, pour des redshifts plus grands que 10 (la constante cosmologique devient surement négligeable), la distance d'horizon s'écrit en fonction de $a \equiv \frac{R}{R_0}$:

$$D_{HP} = \frac{2c}{H_0 \Omega_m}\left(\sqrt{\Omega_r + \Omega_m a} - \sqrt{\Omega_r}\right)\,. \tag{5.1.15}$$

De la même façon, on peut définir notre cône d'influence en calculant la distance d'évènement :

$$D_{HE} \equiv c\,R_0 \int_R^\infty \frac{dR}{R\,\dot{R}}\,. \tag{5.1.16}$$

Cette dernière quantité n'est pas forcément finie. Ces quantités existent pour n'importe quelle période de l'Univers grâce à la limite de l'intégrale $R(t)$ (en revanche, toujours garder R_0 devant l'intégrale).

5.1.8. Volume comobile élémentaire d'Univers. Très souvent, les comptages d'objets font intervenir une population de densité comobile constante (les astronomes appellent cela une évolution passive !). Dans ce cas le nombre d'objets comptés est directement lié au volume comobile accessible dV dans un intervalle dr et dans un angle solide $d\Omega$ qui s'écrit :

$$dV = d\Omega\,R_0^3 \frac{r^2}{\sqrt{1-kr^2}}\,dr\,. \tag{5.1.17}$$

On peut calculer ce volume en utilisant l'équation des géodésiques (Eq. **??**), si l'on connait par exemple la tranche de redshifts utilisés.

5.1.9. Affaiblissement de la brillance de surface (cosmic dimming). Il va comme $(R_1/R_0)^4 = (1+z)^{-4}$. Une galaxie résolue en visible ou un amas résolu en rayons X voit sa brillance de surface diminuer. Les seuils de détection d'objet au dessus du bruit sont liés à cette notion. Les objets distants sont de moins en moins bien observés.

5.2. Loi de Hubble

Hubble (1920) a montré que la distance des galaxies D était lié linéairement à leur vitesse de récession :

(5.2.1)
$$v = cz = H_0 D \ ,$$

où la constante de Hubble H_0 s'exprime généralement en km/s/Mpc, mais peut aussi s'écrire comme l'inverse d'un temps caractéristique.

$$H_0 = 100\ h\ \text{km/s/Mpc}=(9.78\ h^{-1}\text{Gan})^{-1}$$

Exercice : Retrouver la loi de Hubble en développant la distance de luminosité en fonction de $z \ll 1$.

5.3. Déterminer la constante de Hubble

5.3.1. Echelle des distances. On évalue directement la distance d'objets proches (parallaxes), puis on propage cette mesure aux Céphéides dont la période de pulsation est liée à la luminosité absolue. On propage cet indicateur de distance aux SNIa.

5.3.2. Les comptages.

5.3.3. L'effet SZ. La comparaison de l'émission X du gaz chaud d'un amas avec l'effet Sunyaev-Zel'dovich (effet Compton des électrons chauds sur le CMB) donne accés à la profondeur de l'amas. En supposant l'amas sphérique, la distance angulaire déduite donne accés à la constante de Hubble.

5.3.4. Le délai temporel. des images multiples d'un quasar variable. Les décalages en temps combinés à un modèle gravitationnel de la lentille procurent une mesure de H_0

5.3.5. calcul ab initio SNIa.

CHAPITRE 6

Les constituants de l'Univers

6.1. La matière lumineuse

6.1.1. La masse lumineuse des galaxies et des amas.

6.1.2. Formation des grandes structures et relevé profond des galaxies.

6.1.3. Les baryons. Les baryons : principalement, le proton et le neutron, formés de trois quarks, et les mésons (formés de deux quarks) forment le groupe des hadrons, les particules sensibles à l'intéraction forte. Les leptons (electron, positron, neutrinos) n'y sont pas sensibles (seulement l'intéraction électrofaible). Il y a à peu près autant d'électrons que de baryons. Et la masse d'un proton est deux mille fois plus grande que celle d'un électron. Ainsi, les protons et neutrons (dans les noyaux) constituent l'essentiel de la masse baryonique dans l'Univers.

6.2. La matière baryonique sombre

Il doit exister des baryons non-lumineux car $\Omega_{lum} \sim 0.01$. Lyalpha, Macho (EROS).

6.3. La matière noire

6.3.1. Courbes de rotation. galaxies, amas, vitesse particuliere

6.3.2. cisaillement gravitationnel. cartographie des gradients de densité de matière (totale= noire et baryonique).

6.3.3. La physique des particules. Elle recèle de candidats issus des théories de grande unification et de supersymétrie. La cosmologie permet de cerner la masse des particules susceptibles d'être la composante principale matérielle de l'Univers. Si la masse est de l'ordre de quelques dizaines d'eV (par exemple, un neutrino massif), alors on parle de matière noire chaude. Elle est relativiste au moment de son découplage du reste de la soupe cosmique. Si la masse est de l'orde de 5 GeV ou 1 TeV, alors on parle de particules massives intéragissant faiblement (Weakly Interacting Massive Particles : WIMPs, c'est un euphémisme). Leur découplage s'est fait lorsqu'elles étaient déjà non-relativistes ($T \sim 50\,\mathrm{MeV}$). Dans ce cas on parle de matière sombre froide (Cold Dark Matter : CDM). On pense que la particule est un fermion. Son antiparticule est elle-même si elle est de type Majorana (Dirac dans le cas contraire).

6.3.4. Détection directe. Edelweiss, CDMS.

6.4. Les supernovae, l'accélération de l'Univers et l'énergie noire

SN cosmology project, Riess, Perlmutter, SNIF, SNAP...

CHAPITRE 7

Evolution nucléaire de l'Univers

7.1. Thermodynamique de l'univers primordial

7.1.1. Introduction. On a vu que la température de la matière non-relativiste décroissait comme $T_{NR} \propto R^{-2}$ et que celle de la matière relativiste variait comme les photons : $T_R \propto R^{-1}$. La matière est actuellement transparente aux photons du rayonnement fossile à 3 K (CMB). Mais dans le passé, il est inévitable que la matière et les photons aient été en intéraction beaucoup plus forte lorsque la matière baryonique était ionisée. Nous allons supposer dans la suite que dans les phases primordiales, l'Univers était en équilibre thermodynamique et chimique. Nous étudierons la validité cette hypothèse ensuite.

Pour un gaz de particules à l'équilibre cinétique, on peut définir localement une température T et un potentiel chimique μ, correspondant à une fonction de distribution des impulsions $f(\mathbf{p})$ qui s'écrit avec l'aide de $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, suivant la statistique de bosons ou de fermions :

(7.1.1)
$$f(\mathbf{p}) = \left[\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \pm 1\right]^{-1} .$$

La densité, la densité d'énergie et la pression d'un constituant de l'Univers s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\, f(\mathbf{p}) \\ \rho &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\, f(\mathbf{p})\, E \\ P &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\, f(\mathbf{p})\, \frac{p^2}{3E} \end{aligned}$$

g est le nombre d'états de spin : 2 pour les photons, $2s+1$ pour les particules massives de spin s, 2 pour un neutrino (gauche) et son anti-neutrino (droit). L'équilibre chimique, valable aussi pour des réactions nucléaires,

$$Ai + Bj \leftrightarrow Ck + Dl \,,$$

conduit à la condition sur les potentiels chimiques :

$$A\mu_i + B\mu_j = C\mu_k + D\mu_l \,.$$

Dans le cas relativiste ($kT \gg \mu,m$), on obtient selon la statistique (de bosons ou de fermions) :

$$\begin{aligned} n &\propto (1, \frac{3}{4}) g T^3 \\ \rho &\propto (1, \frac{7}{8}) g T^4 \\ P &= \frac{\rho}{3} \,, \end{aligned}$$

où les coefficients entre parenthèses dépendent de la nature bosonique ou fermionique des particules en question.

Dans le cas non-relativiste ($m \gg kT$) :

$$
\begin{aligned}
n &\propto g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m-\mu}{kT}\right] \\
\rho &\propto mn \\
P &= kT\,n \ll \rho.
\end{aligned}
\tag{7.1.2}
$$

7.1.2. Le potentiel chimique des particules primordiales. Le potentiel chimique correspond au coût en énergie qu'il faut dépenser pour importer une particule dans le gaz. Le potentiel chimique des photons est nul car ils sont produits en nombre aléatoire au cours des réactions. En revanche, les réactions de type $\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \leftrightarrow \gamma + \gamma$ impliquent que les potentiels chimiques d'une particule et de son anti-particule sont égaux et opposés : $\mu_{\bar{\mathrm{p}}} = -\mu_{\mathrm{p}}$. La différence de densité, quant à elle, suit .

$$n_{\mathrm{p}} - n_{\bar{\mathrm{p}}} \propto gT^3 f(\frac{\mu}{kT})$$

En principe, la densité comobile de baryons est invariante au cours du temps, excepté à l'échelle électrofaible : $kT \sim 100\,\mathrm{GeV}$, $t \sim 10^{-12}\,\mathrm{s}$, et l'échelle GUT : $kT \sim 10^{15}\,\mathrm{GeV}$, $t \sim 10^{-35}\,\mathrm{s}$.

Au cours de l'évolution, $\frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \sim \mathrm{constante} \ll 1$ ce qui implique que $\frac{\mu_b}{kT} \ll 1$.

Pour les électrons (leptons en général), la neutralité implique que $n_{e^-} = n_{p^+}$; ainsi $\frac{n_{e^+} - n_{e^-}}{n_\gamma} \ll 1$.

Pour les neutrinos, la synthèse de l'hélium implique que $\frac{\mu_\nu}{kT} \ll 1$. Les neutrinos interviennent dans les réactions nucléaires conduisant à l'hélium primordial par exemple. Un fond cosmologique de neutrinos est donc prédit. Les observations récentes à partir des neutrinos (et non des photons) fondent une astrophysique récente (prix Nobel 2002) en plein essor : détection des neutrinos provenant de SN1987A, des neutrinos solaires, des oscillations de neutrinos (ils ont donc une masse de quelques centièmes d'eV à un eV). Toutefois, détecter le fond cosmologique de neutrinos semble encore hors de portée de l'instrumentation actuelle.

Dans la suite, nous supposons négligeable le potentiel chimique de toutes les particules.

7.1.3. Densité d'énergie et d'entropie.

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_X T^4$$

où la dégénérescence est lié au nombres d'espèces bosoniques et fermioniques comme :

$$g_X \simeq \sum_{bosons} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{fermions} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 . \tag{7.1.3}$$

La somme ne fait intervenir que les espèces relativistes car les autres ont une contribution négligeable du fait du facteur exponentiel de Boltzmann. On admet qu'une espèce peut avoir $T_i \neq T$: par exemple, au moment du découplage, la matière peut devenir plus froide que les photons (dans ce cas toutes les espèces ne sont pas relativistes).

La densité comobile d'entropie ne change pas au cours de l'évolution. On peut montrer que la densité d'entropie, elle, s'écrit :

$$S = \frac{\rho + P}{T} \,,$$

et $SR^3 = \mathrm{constante}$. Une autre relation en découle :

$$S = \frac{2\pi^2}{45} g_{XS} T^3$$

avec

$$g_{XS} \simeq \sum_{bosons} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{fermions} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 . \tag{7.1.4}$$

C'est une relation utile lorsque le nombre d'espèces change et que l'on veut suivre la température au moment de leur découplage.

7.1.4. Découplage. L'équilibre ne se maintient que si l'échelle de temps des intéractions établissant l'équilibre (par exemple, diffusion, réactions nucléaires, ...) est plus courte que l'échelle de temps de l'Univers, c'est-à-dire son âge, ou bien l'inverse de la constante de temps. Si Γ est le taux de réaction et H le paramètre de Hubble à un instant t (pendant l'ère radiative, rappelons-nous que $t = 1/(2H)$), alors la condition d'équilibre se traduit par :

$$\Gamma > H . \tag{7.1.5}$$

Le plus souvent, c'est dans le passé que les conditions d'équilibre sont le plus facilement remplies car la densité est plus élevée. Contrairement à la vie courante où un système physique aurait plutôt tendance à aller vers l'équilibre, dans l'Univers primordial, l'équilibre se perd à partir d'un certain âge. Dans ce cas, la fonction de distribution $f(\mathbf{p})$ garde la même forme en subissant, de façon passive cette fois, l'expansion de l'Univers, via l'Eq. (7.1.1) avec une température effective :

$$T_{eff} = T_D \frac{R_D}{R}$$

qui est coute que coute inversement proportionnelle au paramètre d'échelle. Pour fixer les idées, prenons le cas des réactions de diffusion entre électrons et positrons relativistes par échange de photons. La section efficace d'intéraction est d'environ $\sigma \sim \alpha^2/T^2$ où α est la constante de couplage. Le taux de réaction est donc de $\Gamma \sim c\sigma n_e \propto R^{-1}$ alors que $H \propto R^{-2}$. Dans ce cas, l'équilibre n'est pas possible. Si maintenant on considère le cas des réactions de diffusion entre électrons et positrons relativistes par échange de bosons massifs (W, Z) de masse m_X. Dans ce cas, la section efficace devient $\sigma \sim G_X^2 T^2$ où le couplage vaut $G_X = \alpha/m_X^2$. De ce fait le taux de réaction, $\Gamma \propto R^{-5}$ doit dépasser H pour un certain domaine de température.

Pour des particules non-relativistes, la fonction de distribution f est proportionnelle à $\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right)$ et après découplage, subit l'évolution passive :

$$T_{eff} = T_D \left(\frac{R_D}{R}\right)^2$$

Ces températures T_{eff} décrivent un système apparemment à l'équilibre alors qu'il a perdu contact avec son thermostat.

Nous verrons dans la suite plusieurs applications de cette notion de découplage (fond de neutrinos, fond à 3 K).

7.2. de l'asymétrie matière-antimatière

Un petit miracle s'est produit pendant la première seconde de l'Univers, la baryogénèse. Les théories les plus simples expliquant de nombreux phénomènes nucléaires conduisent à une symétrie entre particules et antiparticules. Ainsi, lors des phases chaudes de l'Univers, $kT \gg mc^2$, il y a autant de particules que d'antiparticules. Avec l'expansion et donc le refroidissement de l'Univers, ces particules et antiparticules vont s'annihiler en donnant des photons. Notre Univers ne devrait pas contenir de baryons du tout ! Plus exactement, l'équation 7.1.2 nous montre qu'une quantité infime peut survivre. Ce qui ne correspond pas clairement pas aux observations, ni à l'existence des observateurs en l'occurrence.

Donnons ici l'interprétation moderne quoiqu'encore incomplète de l'existence des baryons. La conservation du produit des symétries CPT (charge, parité, renversement du temps) est un must pour les théories de champs locales, qui implique d'ailleurs l'égalité des masses d'une particule et de son anti-particule associée. Sakharov (1967) a énoncé les trois règles indispensables à la naissance dans l'Univers primordial d'une asymétrie baryons-antibaryons :

(1) Brisure de l'invariance CP

(2) Brisure de l'invariance du nombre baryonique

(3) Conditions hors-équilibre

Dans le modèle dit standard des particules, la violation CP venait d'être observée (1964) dans les mésons K. Mais la violation de n_B n´était pas connue. Après dix années d'intenses travaux théoriques, les corrections aux modèles simples, sous l'impulsion de Kobayashi et Maskawa, montraient que à la fois CP et n_B n'étaient pas complètement préservés à des énergies plus grandes que 100 GeV. La rareté de la brisure de n_B est liée à l'extrême durée de vie du proton qui est supérieure à 10^{32} Gans . À l'heure actuelle ([**11**]), on pense que c'est soit lors d'une transition de phase ou de la désintégration radioactive d'un neutrino qu'ont eu lieu les conditions hors-équilibre nécessaires à l'apparition d'un nombre de baryons non nuls.

Le rapport de la densité de baryons sur la densité (numérique) de photons est invariant au cours de l'expansion puisqu'ils évoluent tous deux en R^{-3}, ceci une fois que les baryons n'intéragissent plus par des réactions nucléaires. Pour les paramètres courants généralement acceptés, on trouve que :

$$\eta_{10} \equiv \frac{\eta}{10^{-10}} \equiv 10^{10}\frac{n_B}{n_\gamma} = 6.5 \pm 0.4\,. \tag{7.2.1}$$

Ainsi, pour une marée de photons, disons deux milliards, on peut trouver un proton (ou un neutron). La réaction

$$\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \leftrightarrow \gamma + \gamma\,, \tag{7.2.2}$$

a donc presque parfaitement fonctionné puisque tous les protons se sont annihilés, tous sauf un irréductible proton pour 2 milliards de photons. On pourrait envisager que le (léger) déséquilibre proton-antiproton n'a pas eu lieu partout de la même façon. Des poches d'Univers pourraient être complètement formées d'antiparticules. D'énormes contraintes astrophysiques (en particulier la nature du fond d'ondes gamma) nous font penser, pour l'instant, que ces antimondes n'existent pas dans l'Univers observable.

Retenons malgré tout que le modèle standard accompagné des conditions de Sakharov explique qualitativement la baryogénèse mais les approches quantitatives ne prédisent pas encore naturellement le rapport observé. L'Univers local est fait de particules mais pourrait contenir des poches d'antiparticules. L'expérience AMS s'inscrit dans la recherche d'antiparticules cosmiques.

Enfin, mentionnons que les particules formant la CDM ont soit obéi aux trois conditions de Sakharov ou sont leurs propres antiparticules. La littérature sur ce sujet est des plus succinctes.

7.3. Des quarks aux atomes

Transition de phase quarks hadrons. Pour mention. 100 GeV

7.4. Abondance cosmique

D'où vient le fer dans la cueillère remuant mon café ? D'où vient l'hélium tout d'abord détecté dans le spectre du soleil ? D'où vient le carbone, central à la vie, grâce à la richesse de la chimie organique ? Discutons ici des abondances de la matière baryonique. Contrairement à la terre dominée par les éléments réfractaires et le fer, l'Univers comporte en majeure partie de l'hydrogène (90% en nombre) et de l'hélium (9%), les autres éléments sont à l 'état de traces (1%). Si l'on explique assez bien les abondances des éléments intermédiaires (C, N, O) par la nucléosynthèse stellaire, et des éléments plus lourds (Fe) par éjection lors des supernovæ, il reste que l'abondance des éléments légers (D, ^{3}He, Li, Be, B) et une grande partie de l'hélium ^{4}He ne peuvent avoir été produits par des réactions stellaires. C'est Alpher, Bethe et Gamow qui ont apporté une explication aux abondances observées des éléments légers. Seule une phase dense et chaude de l'Univers peut avoir fabriqué ces éléments dans les bonnes proportions. Nous décrivons les différentes étapes ici.

7.4.1. Equilibre. $1\,\text{MeV} \ll T < 100\,\text{MeV}$. t moindre qu'une seconde. L'âge de l'Univers est donné par

$$t = \frac{1}{2H} = \frac{1}{2}(\Omega_\gamma h^2)^{-1/2}\left(\frac{H_0}{100\,\text{km/s/Mpc}}\right)^{-1}\left(\frac{T}{2.725\,\text{K}}\right)^{-2}\ \text{s}$$

donc en utilisant la table 1, cela correspond numériquement à :

$$t = 2.2\,\text{s}\ \left(\frac{kT}{1\,\text{MeV}}\right)^{-2}\ .$$

Pendant cette phase, neutron et protons sont quasiment en nombre identique

$$n \leftrightarrow p + e + \bar{\nu}\,, \tag{7.4.1}$$

ainsi le rapport neutron sur proton vau $\exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$ où Q est la différence de masse $m_n c^2 - m_p c^2 = 1.293\,\text{MeV}$.

7.4.2. Gel du rapport neutron/proton. $T \sim 1\,\text{MeV}$. t=1s à 1min. Pendant cette phase, le rapport neutron sur proton se fige à $1/6$ car, au dela, les réactions ne sont plus à l'équilibre. Les abondances du D, He, Li sont inférieures à 10^{-12}, car η est très petit.

7.4.3. Les trois premières minutes de l'Univers. $0.1\,\text{MeV} \ll T < 0.3\,\text{MeV}$ Des réactions multiples ont lieu D+n donne 3He,
3He+p donne 4He etc. La barrière coulombienne empêche de franchir Li et la réaction à trois corps très improbable (ce qui fait une différence importante avec l'intérieur d'étoiles massives). Le rapport η est crucial car il empêche la synthèse de l'hélium à haute température. C'est ainsi que Gamow a pu prédire une température du CMB d'environ 5 K maintenant. On retrouve quasiment tous les neutrons dans les noyaux d'Hélium, mise à part la désintégration radioactive naturelle des neutrons libres ($\tau_n = 915\sim$). L'abondance en masse de l'hélium est donc :

$$Y = \frac{2n'/p}{1 + n'/p}\,,$$

où $n'/p = exp(t/\tau_n) \times \frac{1}{6}$ est l'abondance de neutrons disponibles. On trouve $Y = 0.25$ pour $t = 3\,\text{min}$.

7.5. Fond cosmologique de neutrinos

Au dessus d'1 MeV, les neutrinos sont bien couplés au bain thermique (via nu nubar - e+e- et n - penubar).
Autour du MeV, les neutrinos se découplent mais leur température suit momentanément celle des autres particules relativistes (en R-1).
En dessous de 500 keV, les e+ e- s'annihilent et par ailleurs deviennent non relativistes (pour ceux qui restent). La conservation de l'entropie (propto g(TR)^3)) ainsi que g passant de 11/2 (photons+e+e-) à 2 (photons only), la température des neutrinos devrait être maintenant de $(11/4)^{-1/3} T_\gamma$ soit $1.95\,\text{K}$.

*Exercice :*Pour un photon du rayonnement fossile, combien attend-on de neutrinos primordiaux ?

7.6. Égalité matière-rayonnement

RhoMat=RhoRayt pour R=Omega_m/Omega_phot=

7.7. Cosmochronologie : l'âge de l'Univers

Rapport U/Th est le seul fiable (R. Cayrel dixit) : il donne un âge de 13.7 ± 2.0 Gans , en accord avec la table 1.

Age des amas globulaires, 12 ± 1 Gans (cf Bennett wmap_basic_results) , Naines blanches 12.7 ± 0.7 Gans .

CHAPITRE 8

Le fond diffus cosmologique à 3K (CMB)

8.1. Le spectre électromagnétique du ciel

Le fond diffus du ciel extragalactique s'est toujours révélé être, quelle que soit la longueur d'onde, la somme intégrée sur la ligne de visée de l'émission de sources ponctuelles : paradoxe d'Olbers. Sauf pour le fond à 3 K qui, nous le verrons plus loin, a une granularité à toutes les échelles.

Gamow prédit l'existence d'un fond de rayonnement (cf. chapitre 7) à partir de la nucléosynthèse primordiale. Pendant la phase chaude de l'Univers, l'intéraction COMPTON (diffusion élastique photon sur électron) et l'intéraction bremsstrahlung (freinage des électrons sur les protons produisant des photons) assurent le contact serré entre photons et matière baryonique (les protons suivent les électrons par diffusion coulombienne). La thermalisation de ce fond implique une émission de corps noir (loi de PLANCK).

Quatre cent mille ans après le big bang, les électrons se recombinent et les photons se découplent de la matière (deux phénomènes bien distincts mais concomittants). Le libre parcours moyen des photons est plus grand que l'horizon... La trace fossile qu'on en reçoit est très peu affectée par leur trajet depuis la surface de dernière diffusion, mis à part les effets gravitationnels (l'expansion surtout mais aussi l'effet Sachs-Wolfe intégré).

La densité d'énergie du rayonnement fossile (loi de STEFAN) :

$$u_\gamma = \sigma_S T^4 = 7.5641 \times 10^{-16}\,\mathrm{Jm^{-3}K^{-4}}(2.725\,\mathrm{K})^4 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4$$

La densité réduite des photons vaut alors :

$$\Omega_r = \frac{u_\gamma}{\rho_c c^2} = 2.385 \times 10^{-5} h^{-2}$$

8.2. Mesure des anisotropies du CMB

$$T(\theta, \varphi) = \sum_{\ell,m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Où les harmoniques sphériques s'expriment comme des polynomes de Legendre de $\cos\theta$que multiplie un coefficient en $e^{im\varphi}$. La température est une quantité réelle ainsi la relation $a_{\ell\,-m} = a^*_{\ell\,m}$. La variable m varie entre $-\ell$ et $+\ell$.

8.2.1. Monopole : spectre de corps noir parfait.

8.2.2. Dipole.

$$\frac{\Delta T}{T} = \mathbf{u}.\frac{\mathbf{v}}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse particulière de l'observateur au moment de la prise de données, et $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire de direction (θ, φ). Direction, mouvement de la terre. du soleil. de notre galaxie. Retour de l'éther ? Imaginer un ballon de football décalé.

8.2.3. Autres multipoles : les observations. Imaginer une ballon de rugby (quadrupole). puis avec des déformation dont l'échelle est de plus en plus petite.

Champ gaussien. Seule la variance est prédite.

$$C_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2$$

C'est une quantité invariante par rotation des axes. Son unité est le K^2.

Alternativement, on peut aussi regarder comment la température du ciel est corrélée d'une ligne de visée (ΔT) à une autre ($\Delta T'$). Des considérations de symétries (valables pour l'extragalactique mais pas la galaxie) impliquent que cette corrélation ne dépendent que de l'angle de séparation θ sur le ciel :

$$< \Delta T.\Delta T' > \equiv C(\theta) = \sum_\ell C_\ell Legendre_\ell(\theta)$$

La connaissance est fondamentalement limitée par la variance cosmique. La statistique des C_ℓ est non gaussienne, plutot de type ξ^2.

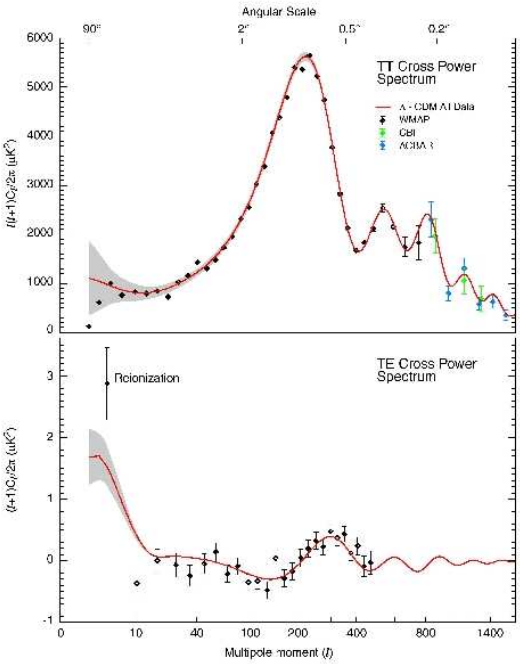


Figure WMAP, spectre des fluctuations du CMB mesuré par WMAP, CBI et ACBAR. La courbe rouge indique la prédiction (entachée de la variance cosmique indiquée par le grisé) d'un modèle inflationnaire dont les paramètres sont très proches de la table 1 on page 6. La courbe du bas donne la corrélation entre anisotropies et le mode E de polarisation.

8.3. Interprétation des anisotropies

De nombreux traités existent : cf. Hu :http ://fr.arXiv.org/abs/astro-ph/0210696

8.4. Croissance des perturbations

Les fluctuations sont décrites comme des petits écarts à la solution de Fridemann-Lemaitre. Le tenseur perturbatif $h_{\mu\nu}$ de la métrique se décompose en une composante scalaire (perturbations adiabatiques), une vectorielle (perturbations isocourbures) et une tensorielle (ondes gravitationnelles). Le traitement correct relativiste de l'évolution des perturbations ne peut se faire ici (voir [**8**]). La partie spatiale dans l'espace comobile des perturbations peut se décomposer linéairement (transformé de Fourier) en modes indépendants (comme des ondes planes) caractérisés par leur périodicité spatiale λ comobile et leur direction. Pour des échelles $\lambda > d_H$, les fluctuations croissent toujours, comme $\delta \propto a^2$ (pour $t < t_{eq}$) et $\delta \propto a$ (pour $t > t_{eq}$) .

Pour des échelles $\lambda < d_H$, les fluctuations ne croissent plus forcément. Il faut considérer deux phénomènes supplémentaires : la matière peut "sentir" la pression (les photons et la matière baryonique sont liés par intéraction Compton : la longueur de Jeans est la taille minimum des fluctuations non effacées), et la matière noire peut être subdominante (période radiative) et ne pas pouvoir contrecarrer l'expansion rapide de l'univers.

Les baryons fortement couplés au rayonnement (jusqu'au découplage) voient leur fluctuations plus faibles que celles de la matière noire. Le CMB tel que vu par COBE confirme la présence d'anisotropies mais à un niveau bien inférieur à ce qu'on attendait pour des modèles sans matière noire. Une fois découplée du rayonnement, la matière baryonique chute dans les puits de potentiel de la matière noire. Il n'y a pas en principe de biais entre les deux. Les petites fluctuations vont devenir non-linéaires en premier, puis celles de plus en plus grandes, jusqu'à la taille des amas. C'est un scénario de type bottom-up.

Retenons qu'un spectre initial de fluctuations $P(k)$ va se retrouver (avec une fonction de transfert) dans les anisotropies du CMB C_ℓ et dans la distribution présente de la matière $P_{mat}(k)$. Remonter au spectre initial c'est accéder à l'état de l'Univers dans ses tous premiers instants. Les contraintes sur la fonction de transfert déduites des observations conduisent à l'estimation d'une variété de paramètres cosmologiques.

CHAPITRE 9

Théorie Quantique des Champs et Inflation

G, c, h enfin réunis : temps de Planck

9.1. Paradoxes du big bang standard

Paradoxes de l'horizon, de la courbure, des particules reliques

9.2. L'inflation simple

Un champ ϕ domine le contenu énergie-matière de l'Univers à des périodes se situant après 1000 fois le temps de Planck (par ex. vers $T = 10^{15}$ GeV). La densité s'écrit :

$$\rho = \dot{\phi}^2 + V(\phi)\,,$$

alors que la pression vaut :

$$P = \dot{\phi}^2 - V(\phi)\,.$$

Le potentiel V dépend de la température ambiante. A haute température, le minimum de V est non nul et se trouve à $\phi = 0$. Pour un champ variant lentement (on parle de "slow roll"), on reproduit l'équation d'état $P = -\rho$ correspondant à une période d'inflation. A plus faible température le minimum de V vaut 0 mais ne se trouve plus en $\phi = 0$. On parle alors de brisure de symétrie. L´ inflation s'arrete et le champ se désintègre en les particules que nous connaissons mieux.

9.3. Conséquences observables

Les fluctuations quantiques du champ ϕ sont à l'origine des fluctuations nécessaires à la formation des structures. Ces fluctuations sont adiabatiques. Elles doivent avoir un spectre $P(k)$ proche du spectre dit de Harrison-Zel'dovich. Ces fluctuations vont évoluer suivant le schéma de l'effondrement gravitationnel. Les défauts topologiques sont subdominant ou même négligeable dans ce scénario. Si la période d'inflation est suffisamment longue ... alors les paradoxes d'horizon et de courbure sont résolus. La courbure de l'Univers doit être exactement nulle. L'accord massif avec les données des dix dernières années (CMB, grandes structures) a donné une grande cohérence à ce modèle. Mais soulignons d'autres aspects de l'Univers qui ont très peu de justifications théoriques jusqu'à présent : l'énergie noire actuelle, la matière noire actuelle, l'asymétrie matière-antimatière, la nature et le comportement du champ ϕ : en clair, un scénario détaillé de l'inflation. Une prédiction de l'inflation réside dans la polarisation du CMB. Un fond d'ondes gravitationnelles primordial (perturbations tensorielles) est prédit par l'inflation et doit avoir laissé son empreinte dans la polarisation à grande échelle du CMB. Les détecteurs des dix prochaines années pourraient permettre d'atteindre ce fond (indirectement) par l'intermédiaire du CMB, si l'échelle d'énergie de l'inflation est plus grande que $10^{15}\,\mathrm{GeV}$.

L'ordre de grandeur des modes B provenant du fond d'ondes gravitationnelles est

$$C_\ell^{BB} \sim \frac{r}{0.1} 6000\,\mathrm{nK}^2$$

pour $\ell \sim 100$. L'énergie de l'inflation est liée à la racine carrée de r.

CHAPITRE 10

Réponses aux exercices

Exo 3.8 on page 19 : 1.39×10^{-9} and 4.24×10^{-6}.
Exo 3.4 on page 16 : Partir de

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\,. \tag{10.0.1}$$

Dériver ensuite par rapport à τ

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial\tau\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\,.$$

Multiplier par $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ pour obtenir avec l'équation 3.4.1) :

$$0 = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial\tau\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right]\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\,,$$

et reconnaitre dans les crochets un symbole de Kronecker. Réutiliser l'éq. 10.0.1 ci-dessus pour obtenir :

$$0 = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}\,,$$

et enfin en dérivant le crochet par partie, on retrouve (en utilisant l'équation 3.4.4)

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0\,.$$

Bibliographie

[1] Boissé P. Mazure A. Blanchard A. Combes, F. *Galaxies et Cosmologie*. InterEditions/CNRS, 1991.

[2] A. Einstein. *La théorie de la relativité restreinte et générale*. Gauthier-Villars, Bordas, 1954.

[3] E. W. Kolb and M. S. Turner, editors. *The early universe. Collection of reprints*, 1988.

[4] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The early universe*. Frontiers in Physics, Reading, MA : Addison-Wesley, 1988, 1990, 1990.

[5] A. R. Liddle and D. H. Lyth, editors. *Cosmological inflation and large-scale structure*, 2000.

[6] Y. Mellier. Cosmologie et Grands Relevés. In *Grands Relevés et Observatoires Virtuels, École CNRS de Goutelas XXIV*.

[7] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco : W.H. Freeman and Co., 1973, 1973.

[8] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, |c1993, 1993.

[9] P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe*. Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p., 1980.

[10] P. J. E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton Series in Physics, Princeton, NJ : Princeton University Press, |c1993, 1993.

[11] H. R. Quinn. The Asymmetry Between Matter and Antimatter. *Physics Today*, 56 :30–35, February 2003.

[12] J. Silk. *Le big bang*. Ed. Odile Jacob, & Livre de poche, 1997,1999.

[13] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters. *Ap. J. Suppl. Ser.*, 148 :175–194, September 2003.

[14] Trinh Xuan Thuan. *La mélodie secrète*. Fayard, 1988.

[15] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity*. New York : Wiley, |c1972, 1972.

...

Index