Chapitre IV- Energie et actions électrostatiques

IV.1- Energie potentielle électrostatique

IV.1.1- Energie électrostatique d'une charge ponctuelle

Comment mesure-t-on l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de masse m ? On le déplace d'une position initiale jusqu'à une position finale (on exerce donc une force) puis on le lâche sans vitesse initiale. S'il acquiert une vitesse, c'est qu'il développe de l'énergie cinétique. Or, en vertu du principe de conservation de l'énergie, cette énergie ne peut provenir que d'un autre réservoir énergétique, appelé énergie potentielle. Comment s'est constituée cette énergie potentielle gravitationnelle ? Grâce au déplacement du corps par l'opérateur. Ainsi, le travail effectué par celui-ci est une mesure directe de l'énergie potentielle. On va suivre le même raisonnement pour l'énergie électrostatique.

Définition : *l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.*

Prenons une particule de charge q placée dans un champ $\vec{E}$. Pour la déplacer de l'infini vers un point M, un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique. Cela n'est possible que si, à tout instant, $\overrightarrow{F_{ext}} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc

$$W(M) = \int_{\infty}^{M} dW = \int_{\infty}^{M} \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{\infty}^{M} q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = q\left[V(M) - V(\infty)\right]$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M

$$\boxed{W_e = qV}$$

On voit donc que le potentiel électrostatique est une mesure (à un facteur q près) de l'énergie électrostatique : c'est dû au fait que V est lié à la circulation du champ. Autre remarque importante : l'énergie est indépendante du chemin suivi.

IV.1.2- Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Dans la section précédente, nous avons considéré une charge q placée dans un champ $\vec{E}$ extérieur et nous avons ainsi négligé le champ créé par la charge elle-même. Mais lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelles q_i, chacune d'entre elles va créer sur les autres un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique. Quel sera alors l'énergie potentielle électrostatique de cet ensemble de charges ?

Soit la charge ponctuelle q_1 placée en P_1. On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en P_2, c'est à dire que l'on fournit un travail $W_2 = q_2 V_1(\mathrm{P}_2) = q_1 V_2(\mathrm{P}_1) = W_1$ identique à celui qu'il

aurait fallu fournir pour amener q_1 de l'infini en P_1 en présence de q_2 déjà située en P_2. Cela signifie que ce système constitué de 2 charges possède une énergie électrostatique

$$W_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = W_1 = W_2 = \frac{1}{2}\left(W_1 + W_2\right)$$

où $r_{12} = P_1P_2$.

Remarque : Dans cette approche, nous avons considéré q_2 immobile alors que l'on rapprochait q_1. En pratique évidemment, c'est la distance entre les deux charges qui diminue du fait de l'action de l'opérateur extérieur à la fois sur q_1 et q_2 (avec $\overrightarrow{F_{ext/1}} = -\overrightarrow{F_{ext/2}}$ puisque $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$). On aurait aussi bien pu calculer le travail total fourni par l'opérateur en évaluant le déplacement de q_1 et de q_2 de l'infini à la distance intermédiaire (« M/2 »). Une autre façon de comprendre cela, c'est de réaliser que nous avons évalué le travail fourni par l'opérateur dans le référentiel lié à q_2 (immobile). Celui-ci est identique au travail évalué dans un référentiel fixe (où q_1 et q_2 se déplacent) car le déplacement des charges s'effectue de manière quasi-statique (aucune énergie n'a été communiquée au centre de masse).

Si maintenant on amène une 3ème charge q_3 de l'infini jusqu'en P_3 (q_1 et q_2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire

$$W_3 = q_3 V_{1+2}(P_3) = q_3\left(V_1(P_3) + V_2(P_3)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}}\right)$$

correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{r_{23}}\right)$$

Ainsi, on voit qu'à chaque <u>couple</u> $q_i\, q_j$ est associée une énergie potentielle d'interaction. Pour un système de N charges on aura alors

$$W_e = \sum_{couples} q_i V_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

où le facteur 1/2 apparaît parce que chaque couple est compté deux fois. L'énergie électrostatique d'un ensemble de N charges ponctuelles est donc

$$\boxed{\begin{array}{l} W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} q_i V_i(P_i) \\ \text{où}\quad V_i(P_i) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}} \end{array}}$$

est le potentiel créé en P_i par toutes <u>les autres</u> charges.

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente est évidente. Soit dq la charge située autour d'un point P quelconque de la distribution. L'énergie électrostatique de cette distribution s'écrit

$$\boxed{\begin{array}{l} W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{distribution} dq V(P) \\ \text{où}\quad V(P) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{distribution}\frac{dq(P')}{PP'} \end{array}}$$

est le potentiel créé par toute la distribution. En effet ici, il n'est pas nécessaire d'exclure explicitement la charge située en P puisque dq(P) peut tendre vers zéro avec l'élément infinitésimal (contribution nulle à l'intégrale, absence de divergence).

IV.1.3- Energie électrostatique d'un conducteur en équilibre

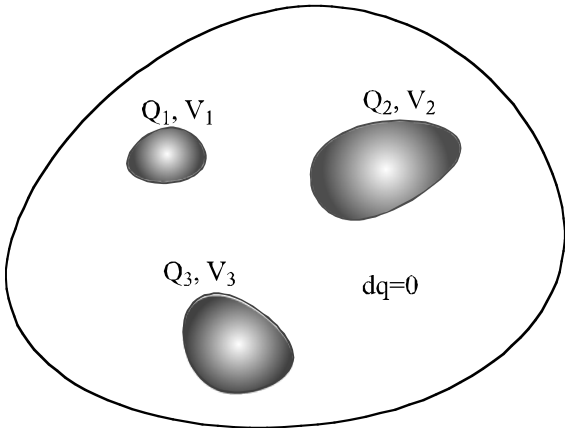
Soit un conducteur isolé, de charge Q distribuée sur sa surface S. L'énergie potentielle électrostatique de ce conducteur est alors

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S dqV(\mathrm{P}) = \frac{V}{2}\int_S dq = \frac{QV}{2}$$

puisqu'il est équipotentiel, c'est à dire

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Ceci est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité C au potentiel V. Puisque cette énergie est toujours positive cela signifie que, quel que soit V (et donc sa charge Q), cela coûte toujours de l'énergie.



Soit un ensemble de N conducteurs chargés placés dans un volume V. A l'équilibre, ils ont une charge Q_i et un potentiel V_i. En dehors du volume occupé par chaque conducteur, il n'y a pas de charge donc dq=0. L'énergie électrostatique de cette distribution de charges est alors simplement

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V dqV(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} dq_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} V_i \int_{S_i} dq_i$$

c'est à dire

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i}$$

IV.1.4- Quelques exemples

Exemple 1 : Le condensateur

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right) = \frac{1}{2}Q\left(V_1 - V_2\right) = \frac{1}{2}QU$$

c'est à dire

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Ainsi donc, un condensateur peut emmagasiner de l'énergie électrostatique. Mais où est-elle stockée ? Sous quelle forme ?
Prenons le cas d'un condensateur plan de densité surfacique σ uniforme et dont les armatures, séparées d'une distance d, ont une surface S commune. L'énergie de ce condensateur s'écrit

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 (Sd) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\mathcal{V}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume compris entre les deux armatures, où réside le champ E. On voit donc sur cet exemple que l'énergie du condensateur est stockée dans le champ lui-même.

Exemple 2 : Le dipôle

Soit un dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique $\overrightarrow{E_{ext}}$ On s'intéresse à l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre ce dipôle et le champ et non pas à celle qui existe entre la charge +q et –q du dipôle lui-même. On considère donc le dipôle comme un système de deux charges, -q placée en un point A et +q en B, n'interagissant pas entre elles. L'énergie électrostatique de ce système de charges est simplement

$$W_e = -qV_{ext}(A) + qV_{ext}(B) = -q\int_A^B \overrightarrow{E_{ext}} \cdot \overrightarrow{dr} \approx -q\ \overrightarrow{E_{ext}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

ce qui donne

$$\boxed{W_e = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{E_{ext}}}$$

où $\vec{p} = q\ \overrightarrow{AB}$ est le moment dipolaire électrique.

Remarque : L'énergie électrostatique entre la charge +q et –q du dipôle lui-même est $W_e = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 AB} = \vec{p} \cdot \overrightarrow{E(B)}$. Si le champ extérieur est bien supérieur au champ créé par la charge –q en B, alors cela signifie que le dipôle est profondément modifié (voire brisé) par le champ : l'énergie d'interaction est supérieure à l'énergie interne de liaison. Cependant, la distance AB étant en général très petite, cela ne se produit pas et le dipôle se comporte comme un système lié, sans modification de son énergie interne (ceci n'est pas tout à fait exact : un champ extérieur peut faire osciller les deux charges autour de leur position d'équilibre, induisant ainsi une variation de leur énergie de liaison).

Exemple 3 : Un conducteur chargé placé dans un champ extérieur

Soit un conducteur portant une charge Q et mis au potentiel V en l'absence de champ extérieur. Il possède donc une énergie électrostatique interne $W_{e,\text{int}} = \frac{QV}{2}$, correspondant à l'énergie qu'il a fallu fournir pour déposer les Q charges au potentiel V sur le conducteur.
Si maintenant il existe un champ extérieur $\overrightarrow{E_{ext}}$, alors le conducteur prend un nouveau potentiel V' et son énergie peut s'écrire $W_e = \frac{QV'}{2}$. Comment calculer V' ?

La méthode directe consiste à prendre en compte la polarisation du conducteur sous l'effet du champ extérieur et calculer ainsi la nouvelle distribution surfacique σ (avec $Q = \iint_S \sigma dS$).

Une autre méthode consiste à considérer la conservation de l'énergie : en plaçant le conducteur dans un champ extérieur, on lui fournit une énergie potentielle d'interaction électrostatique qui s'ajoute à son énergie électrostatique « interne ». Supposons (pour simplifier) que le champ extérieur $\overrightarrow{E_{ext}}$ est constant à l'échelle du conducteur. Alors ce dernier se comporte comme une charge ponctuelle placée dans un champ et possède donc une énergie potentielle d'interaction électrostatique $W_{e,ext} = QV_{ext}$. L'énergie électrostatique totale sera alors

$$W_e = QV_{ext} + \frac{QV}{2} \quad \text{c'est à dire} \quad V' = V + 2V_{ext}$$

IV.2- Actions électrostatiques sur un conducteur en équilibre

IV.2.1- Notions de mécanique du solide

a) Calcul direct des actions (force et moment d'une force)

Un conducteur étant un solide, il faut faire appel à la mécanique du solide. Tout d'abord, on choisit un point de référence O, des axes et un système de coordonnées respectant le plus possible la symétrie du solide. La force et le moment de cette force par rapport au point O sont alors

$$\vec{F} = \int_{solide} \overrightarrow{dF}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_O} = \int_{solide} \overrightarrow{d\Gamma_O} = \int_{solide} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF}$$

où $\overrightarrow{dF}$ est la force s'exerçant sur un élément infinitésimal centré autour d'un point P quelconque du solide et où l'intégrale porte sur tous les points du solide. Le formalisme de la mécanique du solide considère ensuite que la force totale ou résultante $\vec{F}$ s'applique au barycentre G du solide.

b) Liens entre travail d'une action (force ou moment) et l'action elle-même

Lors d'une <u>translation pure</u> du solide, considéré comme indéformable, tout point P du solide subit une translation d'une quantité fixe : $\overrightarrow{dr} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{\varepsilon}$. La force totale responsable de ce déplacement doit fournir un travail

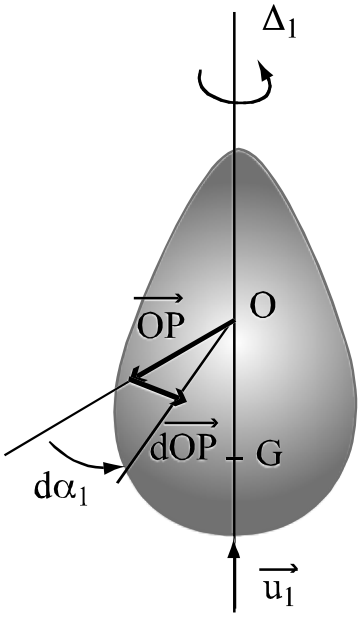
$$dW = \int_{solide} \overrightarrow{dF} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{solide} \overrightarrow{dF} \cdot \vec{\varepsilon} = \left(\int_{solide} \overrightarrow{dF} \right) \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} F_i dx_i$$

où $\vec{F}$ est la résultante de la force s'exerçant sur le solide et les x_i les coordonnées du centre de masse du solide.

Dans le cas de <u>rotations pures</u>, on ne s'intéresse qu'au moment des forces responsables de ces rotations. Celles-ci sont décrites par trois angles infinitésimaux $d\alpha_i$ autour de trois axes Δ_i, passant par le centre d'inertie G du solide et engendrés par les vecteurs unitaires $\vec{u_i}$. L'expression générale du moment d'une force (ou couple) par rapport à G est alors

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_i \vec{u_i}$$



Lors de rotations du solide, le vecteur repérant la position d'un de ses points P quelconque varie suivant la règle

$$d\left(\overrightarrow{OP}\right) = \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u_i} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Le travail fourni par le moment de la force est

$$dW = \int_{solide} \overrightarrow{dF} \cdot \overrightarrow{dOP} = \int_{solide} \overrightarrow{dF} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u_i} \wedge \overrightarrow{OP} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u_i} \cdot \left(\int_{solide} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF} \right) = \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u_i} \cdot \vec{\Gamma}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \Gamma_i$$

Dans le cas général d'une translation accompagnée de rotations, chaque effet produit une contribution au travail fourni lors de l'interaction.

c) Calcul des actions à partir de l'énergie potentielle (méthode des travaux virtuels)

Si l'on a cherché le lien entre travail de l'action et les composantes de celle-ci, c'est qu'il est possible de calculer ces dernières en appliquant le principe de conservation de l'énergie.
En effet une force produit un mouvement de translation de l'ensemble du solide tandis que le moment de la force produit un mouvement de rotation. Ces deux actions correspondent à un travail, donc à une modification de l'énergie d'interaction.

L'énergie mécanique E_m d'un solide s'écrit $E_m = E_c + E_p$ où E_c est son énergie cinétique et E_p son énergie potentielle d'interaction. Si le solide est <u>isolé</u>, son énergie mécanique reste constante, c'est à dire $dE_m = 0$, et l'on obtient ainsi le théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = dW = -dE_p$$

Si l'on a par ailleurs l'expression de l'énergie potentielle E_p alors on peut directement exprimer la force ou son moment (exprimés dans dW) en fonction de E_p.

Si, lors de l'évolution du solide, celui-ci n'est pas isolé et reçoit ou perd de l'énergie, on a $dE_m \neq 0$, c'est à dire

$$dE_c = dW = dE_m - dE_p$$

On voit donc que dans ce cas, le lien entre la force (ou son moment) et l'énergie potentielle n'est plus direct. Si l'on veut faire un tel lien, il faudra alors retrancher au travail la partie due à cet apport (ou perte) d'énergie mécanique. Il faudra alors considérer chaque cas particulier. Nous allons illustrer cette approche ci-dessous.

IV.2.2- Calcul direct des actions électrostatiques sur un conducteur chargé

Revenons maintenant au cas d'un conducteur chargé placé dans un champ électrostatique $\overrightarrow{E_{ext}}$. Celui-ci produit une force de Coulomb sur chaque charge électrique distribuée sur la surface S du conducteur. D'après ce que nous avons vu précédemment, la force totale s'écrit

$$\boxed{\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{d^2F} = \iint_S \sigma \overrightarrow{E_{ext}}\, d^2S = \iint_S P d^2S \vec{n}}$$

où P est ici la pression électrostatique tandis que le moment de la force électrostatique s'écrit

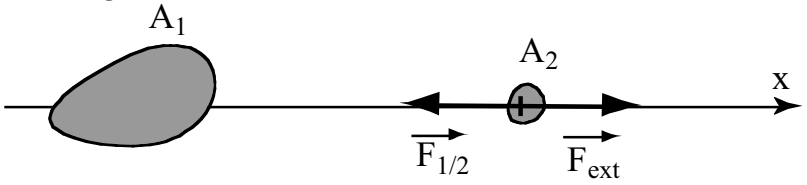
$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_O} = \int_{solide} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{d^2F} = \iint_S \overrightarrow{OP} \wedge d^2q\vec{E} = \iint_S \overrightarrow{OP} \wedge \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}\, d^2S}$$

Mais ces expressions ne sont utilisables que si l'on peut calculer la densité surfacique σ. Lorsque ce n'est pas le cas, il faut utiliser la méthode ci-dessous.

IV.2.3- Calcul des actions électrostatiques à partir de l'énergie

Soit un système de deux conducteurs chargés (A1) et (A2). Pour connaître la force $\vec{F}$ exercée par (A1) sur (A2), on suppose qu'un opérateur extérieur exerce une force $\overrightarrow{F_{ext}}$ s'opposant à $\vec{F}$. Cette démarche est tout à fait intuitive. Connaissant $\overrightarrow{F_{ext}}$, on en déduira $\vec{F} = -\overrightarrow{F_{ext}}$. Cette méthode s'appelle méthode des travaux virtuels.
Un conducteur en équilibre électrostatique étant caractérisé par un potentiel V et une charge Q, il y a deux cas extrêmes qu'il faut considérer séparément.

a) Système isolé : charges constantes



Système isolé: charges constantes

On se place à l'équilibre mécanique, donc $\overrightarrow{F_{ext}} = -\vec{F}$. Imaginons maintenant un déplacement élémentaire autour de cette position. L'opérateur fournit alors un travail $dW = \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \overrightarrow{dr} = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, opposé à celui fournit par la force électrostatique. En vertu du principe de conservation de l'énergie, ce travail est reçu par (A2), sous forme d'énergie électrostatique

$$dW_e = dW = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\sum_{i=1}^{3} F_i dx_i$$

Or, l'énergie électrostatique est une fonction de la position de (A2), donc $dW_e = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i} \right)_Q dx_i$. Autrement dit, dans le cas d'un déplacement d'un conducteur **<u>isolé</u>** on doit avoir à tout moment

$$dW_e = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q dx_i = dW = \overrightarrow{F_{ext}}\cdot\overrightarrow{dr} = -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -\sum_{i=1}^{3} F_i dx_i$$

c'est à dire une force électrostatique

$$\boxed{F_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q}$$

exercée par (A1) sur (A2). Notez que les variables x_i décrivent la distance entre (A1) et (A2). Cette force peut aussi s'interpréter comme une force interne exercée par un conducteur sur une partie de lui-même. Ainsi, cette expression est également valable dans le cas d'un conducteur qui serait soumis à une déformation : ce serait la force exercée par le conducteur sur une partie de lui-même lors d'une modification de son énergie d'interaction électrostatique W_e.

Dans le cas de rotations pures, l'énergie dépend des différents angles et l'on va plutôt écrire pour un conducteur **isolé** (Q constant)

$$dW_e = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_Q d\alpha_i = dW = \overrightarrow{F_{ext}}\cdot\overrightarrow{dr} = -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -\sum_{i=1}^{3} \Gamma_i d\alpha_i$$

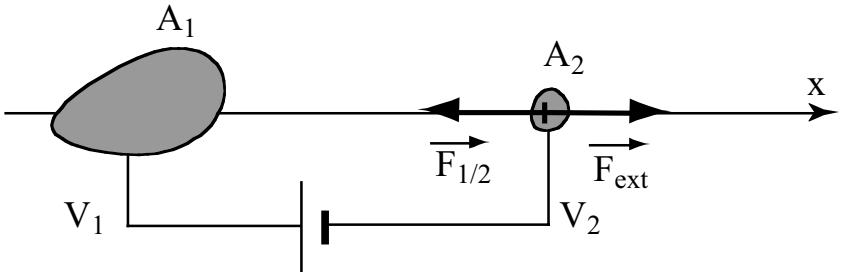
c'est à dire un moment des forces électrostatiques $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{3}\Gamma_i\vec{u_i}$ dont les composantes vérifient

$$\boxed{\Gamma_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_Q}$$

L'utilisation de ces deux dernières expressions nécessite de calculer l'énergie électrostatique W_e et sa dépendance en fonction de la position du (ou des) conducteur(s).

La présence du signe moins indique que les actions électrostatiques (forces et moments) tendent toujours à ramener le conducteur vers une position d'énergie maximale.

b) Système relié à un générateur : potentiels constants



Système non isolé: potentiels constants

A proximité de l'équilibre mécanique ($\overrightarrow{F_{ext}} = -\vec{F}$), on effectue un petit déplacement autour de cette position. L'opérateur fournit toujours un travail $dW = \overrightarrow{F_{ext}}\cdot\overrightarrow{dr} = -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$, opposé à celui fournit par la force électrostatique, mais il existe une deuxième source d'énergie, le générateur. Lors du déplacement, celui-ci maintient les potentiels V_1 et V_2 constants. Cela ne peut se faire qu'en modifiant la charge Q_1 et Q_2 de chaque conducteur. Ainsi, le générateur fournit un travail permettant d'amener des charges dQ_1 au potentiel V_1 et dQ_2 au potentiel V_2, c'est à dire une énergie fournie $dE_{Gen} = dQ_1V_1 + dQ_2V_2$.

En vertu du principe de conservation de l'énergie, ces deux sources d'énergies sont converties par (A2) sous forme d'énergie électrostatique

$$dW_e = dW + dE_{Gen}$$

$$\frac{1}{2}d\left(Q_1V_1 + Q_2V_2\right) = -\vec{F}\cdot\vec{dr} \quad + \quad dQ_1V_1 + dQ_2V_2$$

$$\frac{1}{2}\left(dQ_1V_1 + dQ_2V_2\right) - dQ_1V_1 - dQ_2V_2 = -\vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{dr} = \frac{1}{2}\left(dQ_1V_1 + dQ_2V_2\right) = dW_e$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_i dx_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_V dx_i$$

Autrement dit, dans le cas d'un déplacement d'un conducteur relié à un générateur (V maintenu constant), la force électrostatique vaut

$$\boxed{F_i = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_V}$$

Dans le cas de rotations pures, l'énergie dépend des différents angles et l'on obtient un moment des forces électrostatiques égal à

$$\boxed{\Gamma_i = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_V}$$

Les expressions obtenues dans les deux cas considérés sont générales et indépendantes du déplacement élémentaire. En fait celui-ci ne constitue qu'un artifice de calcul, connu sous le nom de *méthode des travaux virtuels*. Notez qu'une telle méthode s'appuie sur le principe de conservation de l'énergie et donc, nécessite l'identification de l'ensemble des sources d'énergie présentes.

IV.2.4- Exemple du condensateur

L'énergie électrostatique du condensateur s'écrit $W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. D'après la section précédente, lorsque le condensateur est isolé, la force électrostatique entre les deux armatures s'écrit

$$F_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q = \frac{Q^2}{2C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial x_i}\right) = \frac{U^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x_i}\right)$$

Par contre, lorsque le condensateur est relié à un générateur, on a

$$F_i = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_U = \frac{U^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x_i}\right)$$

Ainsi, on vient de démontrer que, dans tous les cas, la force électrostatique existant entre les deux armatures d'un condensateur s'écrit

$$\boxed{\vec{F} = \frac{U^2}{2}\vec{\nabla}C}$$

On obtient de même que le moment par rapport à l'axe Δ_i de la force électrostatique s'écrit dans tous les cas

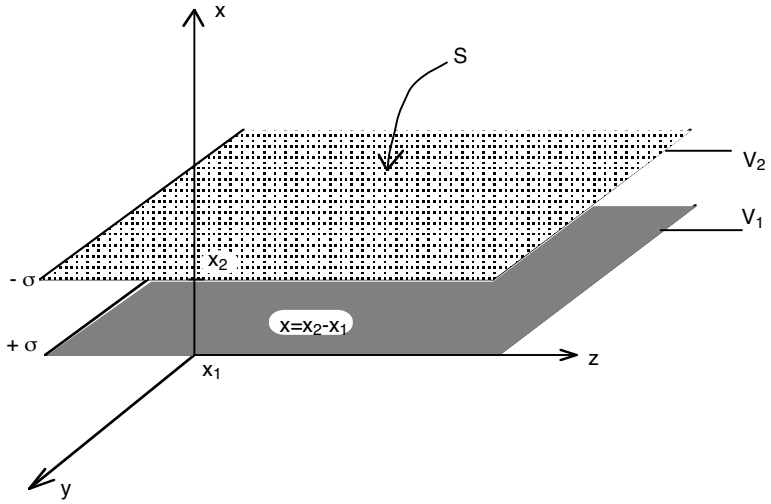
$$\boxed{\Gamma_i = \frac{U^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha_i}\right)}$$

Remarques :

1) Les actions électrostatiques tendent toujours à augmenter la capacité C d'un condensateur.
2) La force est équivalente à l'expression $\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{d^2F} = \iint_S P d^2S\vec{n}$, ce qui signifie que la distribution de charges σ doit s'arranger de telle sorte que ce soit effectivement le cas.

Exemple : le condensateur plan

Soit un condensateur plan de capacité $C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$, où S est la surface d'influence mutuelle commune aux deux armatures et $x = x_2 - x_1$ la distance entre celles-ci.



La force exercée par l'armature 1 sur l'armature 2 est

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{U^2}{2}\overrightarrow{\nabla_2 C} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

$$F_{1/2} = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{dx_2} = -\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{\left(x_2 - x_1\right)^2}$$

$$F_{2/1} = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{dx_1} = \frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{\left(x_2 - x_1\right)^2}$$

Notez que la bonne utilisation de la formule générale (portant sur le gradient de C) nécessite la compréhension de sa démonstration (ce que signifie la variable x).

IV.2.5- Exemple du dipôle

Soit un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p}$ placé dans un champ extérieur $\overrightarrow{E_{ext}}$. On cherche dans un premier temps à calculer la force électrostatique exercée par ce champ sur le dipôle. Celui-ci restant à charge constante, on va donc utiliser l'expression obtenue pour un système isolé

$$F_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right)_Q = \frac{\partial\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right)}{\partial x_i}$$

c'est à dire une expression vectorielle

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right)}$$

Sous l'effet de cette force, un dipôle aura tendance à se déplacer vers les régions où le champ électrostatique est le plus fort.

Le moment de la force électrostatique est donné par

$$\Gamma_i = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \alpha_i}\right)_Q = \frac{\partial\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right)}{\partial \alpha_i}$$

avec $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_i \vec{u_i}$. On peut cependant clarifier considérablement cette expression. Il suffit en effet de remarquer que lors d'une rotation pure, le vecteur moment dipolaire varie comme

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u_i} \wedge \vec{p} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$$

puisqu'il dépend a priori de la position du point considéré, donc des angles α_i. En supposant alors que le champ $\overrightarrow{E_{ext}}$ est constant à l'échelle du dipôle, on obtient

$$\Gamma_i = \frac{\partial\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right)}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha_i}\right)\cdot\overrightarrow{E_{ext}} = \left(\vec{u_i}\wedge\vec{p}\right)\cdot\overrightarrow{E_{ext}} = \left(\vec{p}\wedge\overrightarrow{E_{ext}}\right)\cdot\vec{u_i}$$

c'est à dire l'expression vectorielle suivante

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{p}\wedge\overrightarrow{E_{ext}}}$$

Le moment des forces électrostatiques a donc tendance à aligner le dipôle dans la direction du champ extérieur.