Chapitre V- Electrocinétique

V.1- Courant et résistance électriques

V.1.1- Le courant électrique

Nous avons vu qu'il était possible d'électriser un matériau conducteur, par exemple par frottements. Si l'on met ensuite ce conducteur en contact avec un autre, le deuxième devient à son tour électrisé, c'est à dire qu'il a acquis une certaine charge Q. Cela signifie que lors du contact des charges se sont déplacées de l'un vers l'autre. On définit alors le courant par

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

où les unités sont les Ampères (symbole A). Dans le système international, l'Ampère est l'une des 4 unités fondamentales (avec le mètre, le kilogramme et la seconde), de telle sorte que

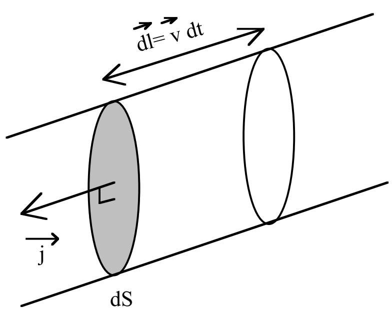
1 C =1 As (Ampère seconde).

La définition précédente de I ne nous renseigne pas sur son signe, il faut choisir une convention. Par exemple, soit Q>0 la charge du conducteur initialement chargé (A1). On a affaire ici à une décharge de (A1) vers (A2). Si l'on désire compter positivement le courant de (A1) vers (A2), alors il faut mettre un signe moins à l'expression ci-dessus.

V.1.2- La densité de courant électrique

La raison physique du courant est un déplacement de charges, c'est à dire l'existence d'une vitesse organisée (par opposition à la vitesse d'agitation thermique) de celles-ci. Considérons donc un fil conducteur de section S, dans lequel se trouvent n porteurs de charge q, animés d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel du laboratoire. Pendant un instant dt, ces charges parcourent une distance $\vec{v}dt$. Soit $d^2S\vec{n}$ un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique qui traverse cette surface pendant dt est celle contenue dans le volume élémentaire d$\mathcal{V}$ associé

$$d^3Q = nqd^3\mathcal{V} = nq\vec{v}dt \cdot d^2S\vec{n}$$



On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur et qu'on appelle ***la densité de courant***

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

exprimée en Ampères par mètre carré ($A\,m^{-2}$). Le courant I circulant dans le fil est relié à la densité par

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{dt}\iint_{Section} d^3Q = \frac{1}{dt}\iint_{Section} \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S}dt$$

c'est à dire

$$\boxed{I = \iint_{Section} \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S}}$$

On dit que le courant dans un circuit est le flux à travers la section du fil de la densité de courant. Le sens du courant (grandeur algébrique) est alors donné par le sens du vecteur densité de courant.

Un conducteur est un cristal (ex, cuivre) dans lequel se déplacent des particules chargées (ex, électrons). Suivant le matériau, les porteurs de charges responsables du courant peuvent être différents. Dans un métal, ce sont des électrons, dits de conduction (la nature et le signe des porteurs de charge peuvent être déterminés grâce à l'effet Hall –voir cours magnétostatique). Dans un gaz constitué de particules ionisées, un plasma, ou bien dans un électrolyte, il peut y avoir plusieurs espèces chargées en présence. En toute généralité, on doit donc définir la densité locale de courant de la forme

$$\boxed{\vec{j} = \sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}}$$

où l'on fait une sommation sur toutes les espèces (électrons et ions) en présence. Dans le cas particulier d'un cristal composé d'ions immobiles (dans le référentiel du laboratoire) et d'électrons en mouvement, on a

$$\vec{j} = -n_e e \overrightarrow{v_e}$$

où e est la charge élémentaire et n_e la densité locale d'électrons libres. <u>La densité de courant (donc le sens attribué à I) est ainsi dans le sens contraire du déplacement réel des électrons.</u>

V.1.3- Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrostatique local,

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$$

où le coefficient de proportionnalité γ est appelé la **conductivité** du milieu (unités : voir plus bas). On définit également $\eta = 1/\gamma$, la **résistivité** du milieu. La conductivité est une grandeur locale positive, dépendant uniquement des propriétés du matériau. Ainsi, le Cuivre possède une conductivité $\gamma_{CU} = 58\,10^6$ S/m, tandis que celle du verre (isolant) vaut $\gamma_{verre} = 10^{-11}$ S/m.

Une telle loi implique que les lignes de champ électrostatique sont également des lignes de courant, indiquant donc le chemin pris par les charges électriques. Par ailleurs, comme γ est positif, cela implique que <u>le courant s'écoule dans la direction des potentiels décroissants</u>.

D'où peut provenir cette loi ? Prenons le cas simple d'une charge électrique q soumise à la force de Coulomb mais aussi à des collisions (modèle de Drude). Ces collisions peuvent se décrire comme une force de frottement proportionnelle à la vitesse (moyenne) $\vec{v}$ de la charge. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - k\vec{v}$$

Cette équation montre qu'en régime permanent (stationnaire, mais non statique), la charge q atteint une vitesse limite $\vec{v} = \mu\vec{E}$ où μ=q/k est appelé la **mobilité** des charges. Ce régime est atteint en un temps caractéristique $\tau = m/k$, appelé temps de relaxation.

Ainsi, la loi d'Ohm microscopique (ou locale) s'explique bien par ce modèle simple de collisions des porteurs de charge. Mais collisions avec quoi ? On a longtemps cru que c'étaient des collisions avec les ions du réseau cristallin du conducteur, mais il s'avère qu'il s'agit en fait de collisions avec les impuretés contenues dans celui-ci.

Prenons le cas du Cuivre, métal conducteur au sein duquel existe une densité numérique d'électrons de conduction de l'ordre de $n_e = 8\,10^{28} \quad m^{-3}$. Le temps de relaxation est alors de $\tau = \frac{\gamma_{CU} m_e}{e^2 n_e} \approx 2\,10^{-14}$ s. C'est le temps typique entre deux collisions. Quelle est la distance maximale parcourue par les électrons pendant ce temps (libre parcours moyen)? Elle dépend de leur vitesse réelle : celle-ci est la somme de la vitesse moyenne $\vec{v}$ (le courant) et d'une vitesse d'agitation thermique de norme $v_{th} = \sqrt{kT/m_e} \approx 10^5$ m/s à température ambiante mais dont la valeur moyenne (vectorielle) est nulle (pour mémoire, un fil de Cuivre d'une section de 1 mm^2 parcouru par un courant de 1 A, possède une densité de courant de $10^6\ Am^{-2}$ et une vitesse moyenne de $v = 0{,}007\ m/s$). Le libre parcours moyen d'un électron serait alors de

$$l = v_{th}\tau \approx 2\,10^{-9}\ m$$

un ordre de grandeur supérieur à la distance inter-atomique (de l'ordre de l'Angström). Ce ne sont donc pas les collisions avec les ions du réseau qui sont la cause de la loi d'Ohm.

V.1.4- Résistance d'un conducteur : loi d'Ohm macroscopique

Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant I. S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B, $U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$. On définit alors la résistance de cette portion par

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\iint_S \gamma\,\vec{E}\cdot\overrightarrow{d^2S}}}$$

où l'unité est l'Ohm (symbole Ω). Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S où, sur une longueur L, le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité (propriété microscopique)

$$\boxed{R = \frac{EL}{\gamma ES} = \eta\frac{L}{S}}$$

qui montre que les unités de la résistivité sont le Ωm (Ohm mètre).

Associations de résistances

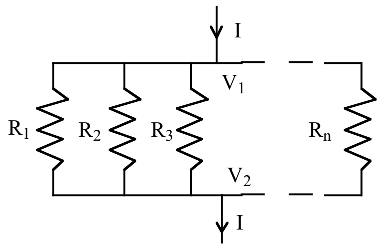
(a) Résistances en série

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I. La tension aux bornes de la chaîne est simplement

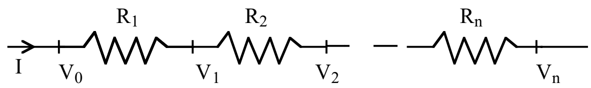
$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I$$

c'est à dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$



Résistances en parallèle



Résistances en série

(b) Résistances en parallèle

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et alimentées par un courant I. Le courant se sépare alors en n courants

$$I_i = \frac{U}{R_i}$$

dans chacune des n branches. En vertu de la conservation du courant (voir ci-dessous), on a

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R}$$

c'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente en série

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

V.2- Eléments d'un circuit électrique

V.2.1- Notion de circuit électrique

Définitions : Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés *dipôles*, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée. Un *nœud* d'un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus. Une *branche* est un tronçon de circuit situé entre deux nœuds. Enfin, une *maille* est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

Un *dipôle* s'insère dans un circuit par l'intermédiaire de deux pôles, l'un par où s'effectue l'entrée du courant (borne plus), l'autre la sortie (borne moins). Il est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel U entre ses bornes : c'est à dire **la courbe caractéristique I=f(U)**. Un dipôle passif a une courbe passant par l'origine. Un dipôle actif fournit un courant (positif ou négatif) même en l'absence d'une tension. Enfin, on appelle dipôle linéaire tout dipôle dont la courbe caractéristique est une droite.

Nous avons vu que dans tout conducteur, la présence d'une résistivité entraîne une chute de tension et, en toute rigueur, il en va de même pour les fils. Mais ceux-ci étant mis en série avec d'autres dipôles, on néglige en général la résistance des fils devant celle des dipôles présents. Donc, **les fils situés entre deux dipôles d'un circuit seront supposés équipotentiels**.

Remarques importantes

1. Dans l'exemple cité en V.1.1, le courant I n'existe que lors d'un temps court, correspondant à une phase que l'on appelle régime transitoire. Dans ce qui suit, on s'intéresse à des cas où un courant est établi de façon permanente dans un circuit, c'est à

dire *dont l'intensité est la même en tout point du circuit*. Cela exige évidemment que le circuit soit fermé.

2. Lorsqu'on ferme un circuit (par l'intermédiaire d'un interrupteur par ex), il faut un temps très court pour que les charges électriques « prennent connaissance » de l'ensemble du circuit. Ce temps correspond à celui pris par la lumière pour parcourir l'ensemble du circuit. C'est ce temps qui compte pour nous puisque c'est celui d'établissement du régime stationnaire. Autrement dit, tout ce qui est fait ici en courant continu, reste vrai pour un courant alternatif (du 50 Hz correspond à un temps de 20 ms, bien supérieur à la durée du régime transitoire).

V.2.2- Puissance électrique disponible

Soit une portion AB d'un circuit, parcourue par un courant permanent I allant de A vers B. L'existence de ce courant implique que le potentiel en A est supérieur à celui en B. Cette différence de potentiel se traduit par l'existence d'un champ électrostatique $\vec{E}$ produisant une force de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ capable d'accélérer une charge q. Ainsi, soit $P_q = \vec{F} \cdot \vec{v}$ la puissance nécessaire pour communiquer une vitesse $\vec{v}$ à une particule de charge q quelconque. Sachant que dans ce conducteur il y a n porteurs de charge par unité de volume, la puissance totale P mise en jeu dans le brin AB parcouru par un courant I est

$$\begin{aligned} P &= \iiint_{brin\ AB} nP_q\, d\mathcal{V} = \int_A^B dl \iint_{section} nP_q\, dS = \int_A^B dl \iint_{section} nq\vec{E} \cdot \vec{v}\, dS \\ &= \int_A^B \iint_{section} \left(nq\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}\right) \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} \iint_{section} \left(\vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}\right) \\ &= I \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = I\left[V(A) - V(B)\right] \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{P = UI}$$

où U=V(A)-V(B)>0 puisque le courant s'écoule de A vers B. Cette puissance est donc la puissance électrique disponible entre A et B, du simple fait qu'il y circule un courant I.

Suivant la nature du dipôle placé entre A et B (récepteur), l'énergie électrique disponible sera convertie sous une forme ou une autre. Dans le cas simple où entre A et B ne se trouve qu'une résistance R, la puissance disponible P ne sert qu'à faire chauffer la résistance puisque $U = RI$. Cela se traduit par une dissipation d'énergie sous forme de chaleur, appelée **effet Joule**, et dont la puissance vaut

$$\boxed{P_J = RI^2}$$

Cette énergie électrique peut être également reconvertie en rayonnement (lampe), énergie mécanique (moteur), chimique (bac à électrolyse) ou même énergie cinétique ordonnée (diode à vide). Toute chaleur dégagée par le conducteur correspond à un gain d'énergie d'agitation thermique : cela signifie que de l'énergie cinétique a été communiquée au cristal par les électrons de conduction.

V.2.3- Nécessité d'une force électromotrice ou fém

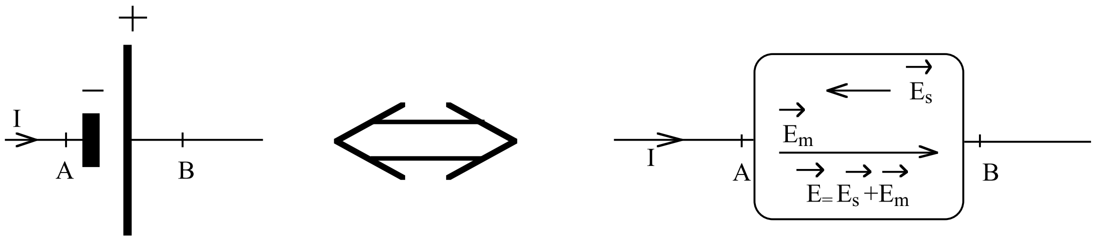
Si on applique le raisonnement précédent à un circuit fermé, c'est à dire si l'on regarde la puissance totale fournie entre A et A par la force de Coulomb, on obtient

$$P = I\int_A^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = I\left[V(A) - V(A)\right] = 0$$

c'est à dire une puissance nulle ! Cela signifie qu'il ne peut y avoir de courant en régime permanent. Lorsque qu'il y a un courant, alors cela implique que <u>la force de Coulomb n'est pas responsable du mouvement global des porteurs de charge dans un conducteur.</u>

Le courant dans un conducteur peut être compris avec l'analogie de la rivière circulant dans son lit. Pour qu'il y ait un écoulement, il faut que l'eau s'écoule d'une région plus élevée vers une région plus basse (d'un potentiel gravitationnel plus haut vers un autre plus bas). Ainsi, le mouvement de l'eau d'un point élevé vers un point plus bas est bien dû à la simple force de gravitation. Mais si l'on veut constituer un <u>circuit fermé</u>, alors il faut fournir de l'énergie (grâce à une pompe) pour amener l'eau à une plus grande hauteur, et le cycle peut alors effectivement recommencer.

C'est exactement ce qui se passe dans un circuit électrique: une force autre que la force électrostatique doit permettre aux porteurs de charge de remonter le potentiel.



Le siège de la force responsable du courant dans un circuit est appelé le générateur. Regardons donc attentivement ce qui se passe à l'intérieur d'un générateur, où A correspond à la borne « - », B à la borne « + », le courant circulant donc de B vers A à l'extérieur du générateur. En régime permanent, les charges ne s'accumulent en aucun point du circuit, il y a libre circulation des charges : cela implique donc que les charges doivent traverser le générateur. Or, V(B)>V(A), ce qui signifie qu'il y a un champ électrostatique $\vec{E_s}$ dirigé de B vers A à l'intérieur du générateur. Quel que soit le signe des porteurs de charge responsables du courant, si celui-ci va de B vers A à l'extérieur, alors $\vec{E_s}$ s'oppose au mouvement des charges à l'intérieur. La seule façon d'obtenir un régime stationnaire avec un courant permanent I, c'est donc d'avoir un champ supplémentaire, appelé **champ électromoteur** $\vec{E_m}$, supérieur en norme et dirigé en sens inverse de $\vec{E_s}$.

Mettons maintenant le générateur en circuit ouvert (I=0). Le fait qu'une différence de potentiel (ddp) se maintienne entre ses bornes implique nécessairement la présence d'une autre force compensant l'attraction coulombienne. Ainsi, la force totale s'exerçant sur une charge q doit s'écrire $\vec{F} = q\left(\vec{E_s} + \vec{E_m}\right)$ et, à l'équilibre et en l'absence de courant, on doit donc avoir $\vec{E_s} + \vec{E_m} = \vec{0}$. Cela signifie donc que la ddp ou tension mesurée aux bornes d'un générateur ouvert vaut

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E_s}\cdot\vec{dl} = -\int_A^B \vec{E_m}\cdot\vec{dl}$$

où, bien évidemment, $V_A - V_B < 0$. On appelle

$$\boxed{e = \int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl}}$$

(de façon un peu maladroite) la **force électromotrice** ou **fém** du générateur (e>0 est exprimée en Volts). Dorénavant, on utilisera la notation $\overrightarrow{E_s}$ pour le champ électrostatique et $\overrightarrow{E_m}$ pour le champ électromoteur. Nous verrons en magnétostatique un exemple de champ électromoteur.

Puisque, à l'intérieur du générateur, on a $\overrightarrow{E_s} = -\overrightarrow{E_m} \neq \vec{0}$ en l'absence de courant, cela signifie qu'un générateur est un conducteur non-équipotentiel.

A l'équilibre, mais en présence d'un courant I (générateur branché dans un circuit fermé), les porteurs de charge responsables de ce courant subissent une force supplémentaire, due aux collisions se produisant à l'intérieur du conducteur. Pour un générateur idéal, ces collisions sont négligeables et l'on obtient $V_A - V_B = -e$. En revanche, pour un générateur non idéal, de telles collisions se produisent et se traduisent par l'existence d'une résistance interne r. D'après le modèle de Drude, on a simplement

$$\int_A^B \left(\overrightarrow{E_s} + \overrightarrow{E_m} - \frac{k}{q}\vec{v} \right) \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

$$V_A - V_B + e = \int_A^B \frac{k}{q}\vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \eta \vec{j} \cdot \overrightarrow{dl} = rI$$

C'est à dire une tension aux bornes du générateur $V_A - V_B = rI - e$. La résistance interne de celui-ci introduit une chute de tension, ce qui fait qu'il délivre une tension inférieure à celle donnée par sa fém.

Les générateurs diffèrent selon la source d'énergie utilisée et la méthode de conversion de celle-ci en énergie électrique (autrement dit, selon la nature de $\overrightarrow{E_m}$). On peut ainsi produire de l'énergie électrique à partir d'une pile (énergie chimique), d'un générateur électrostatique (énergie mécanique, ex machine de Van de Graaf), d'une dynamo (énergie mécanique), d'une pile solaire (énergie du rayonnement) ou d'un thermocouple (chaleur, c'est à dire énergie cinétique désordonnée).

Dans la suite, nous supposerons simplement l'existence d'une fém e dans un circuit, localisée dans un dipôle appelé générateur, sans préciser sa nature.

Reprenons le calcul fait précédemment mais appliquons-le cette fois-ci à l'ensemble du circuit. Soit alors $\mathcal{V}$ le volume total occupé par le conducteur formant le circuit et $\vec{F}$ la force s'exerçant sur les charges mobiles q et donc responsable de leur mouvement. La puissance totale P qui doit être fournie en régime permanent est alors

$$P = \iiint_{\mathcal{V}} nP_q \, d\mathcal{V} = \oint_{circuit} dl \iint_{section} nP_q \, dS = \oint_{circuit} dl \iint_{section} n\vec{F} \cdot \vec{v} \, dS = \oint_{circuit} \iint_{section} \left(nq\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} \right) \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}}{q}$$

$$= \oint_{circuit} \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}}{q} \iint_{section} \left(\vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} \right) = I \oint_{circuit} \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}}{q} = Ie$$

où

$$e = \oint_{circuit} \frac{\vec{F}}{q} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_{circuit} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$

est la fém totale du circuit. L'intégrale portant sur l'ensemble du circuit, la fém totale est donc la somme des fém présentes le long du circuit. Si celles-ci sont localisées dans des dipôles, l'expression précédente devient

$$e = \sum_k e_k$$

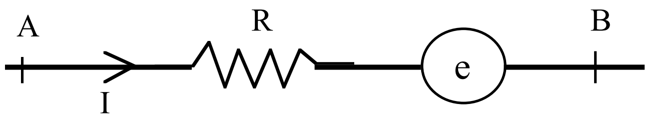
où les e_k sont les valeurs algébriques des différentes fém :

1. $e_k>0$ correspond à un générateur (production d'énergie électrique) ;
2. $e_k<0$ correspond à un récepteur (consommation d'énergie électrique).

Un moteur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique et correspond donc à un récepteur de fém négative : on dit également qu'il possède une **force contre-électromotrice** ou **fcém**.

V.3- Lois régissant les circuits électriques

V.3.1- Loi d'Ohm généralisée



Considérons un brin AB d'un circuit électrique fermé, parcouru par un courant I, de résistance R et ayant une fém e. La loi d'Ohm généralisée s'écrit

$$\boxed{V_A - V_B = RI - e}$$

Remarques

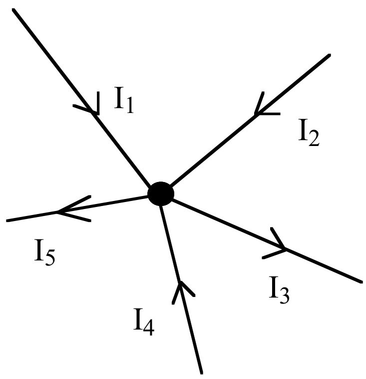
1. Cette expression n'est valable que lorsque le courant s'écoule de A vers B.
2. On peut réinterpréter la résistance R comme étant la résistance <u>totale</u> du brin AB (fil, résistance et résistance interne du générateur) et e comme la fém totale (somme algébrique de toutes les fém).
3. L'effet Joule fait chuter le potentiel tandis que le générateur (e>0) remonte le potentiel.
4. Si e<0, cela signifie que le dipôle associé fait chuter le potentiel. On appelle alors e la force contre-électromotrice (fcém). Elle peut être due soit à un moteur (récepteur pur) , soit à un générateur dont la polarité est opposée à celle du générateur principal, responsable du courant circulant entre A et B.

V.3.2- Lois de conservation dans un circuit (lois de Kirchhoff)

Les lois de l'électrocinétique, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, sont en fait de simples lois de conservation.

1. Conservation du courant (loi des nœuds)

Soit un nœud quelconque du circuit sur lequel arrive un certain nombre de fils. Sur chacun de ces fils, circule un courant. En régime permanent, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant : en aucun point du circuit il ne peut y avoir accumulation (ou perte) de charges. Cela signifie donc que l'ensemble des courants entrants compense exactement les courants sortants,



$$\boxed{\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}}$$

Ceci constitue la loi des nœuds ou l'équation aux nœuds.

$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$

2. Conservation de l'énergie (loi des mailles)

Soit une maille d'un circuit constituée de n branches. L'équation aux branches pour la k-ième branche s'écrit

$$U_k = R_k I_k - e_k$$

où R_k, I_k et e_k sont respectivement la résistance totale, le courant et la fém contenues dans cette branche. La conservation de l'énergie pour cette maille s'exprime par le fait que, partant du nœud 1 et revenant à ce nœud, on retrouve le même potentiel, c'est à dire $V_1 - V_1 = V_1 - V_2 + \cdots + V_n - V_1 = U_1 + \cdots + U_n = 0$. La loi des mailles (ou équation de maille) s'exprime tout simplement par

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(R_k I_k - e_k\right) = 0}$$

V.3.3- Résolution pratique des équations en électrocinétique

En général, on cherche à calculer les courants I_k qui circulent dans chacune des branches d'un circuit, étant donné ses résistances R_k et ses générateurs (ou récepteurs, selon le sens de branchement) e_k. Du fait des lois de conservation ci-dessus, un circuit comportant n branches n'a pas n courants I_k indépendants les uns des autres. Le nombre réel d'inconnues est en fait

$$\boxed{M = B - N + 1}$$

où B est le nombre de branches du circuit et N le nombre de nœuds. Pour résoudre ce problème on utilisera la méthode suivante :

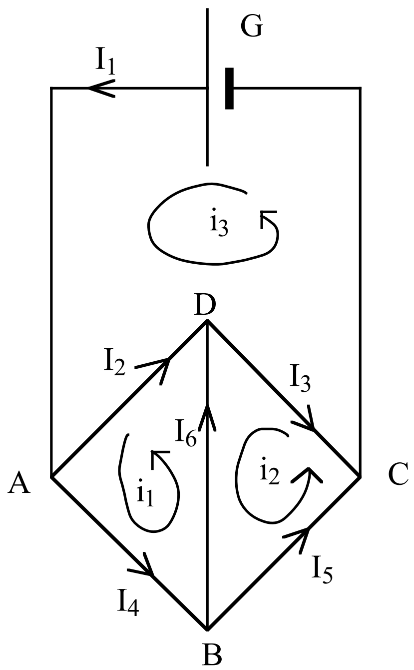
1. Choisir M mailles <u>indépendantes</u>, c'est à dire ayant au moins une branche non partagée avec une autre maille.
2. Sur chacune de ces mailles, définir un sens de parcours arbitraire pour le *courant de maille* I_m.
3. Ecrire les M équations de maille $\sum_{k=1}^{n}\left(R_k I_m - e_k\right) = 0$, en suivant le sens de parcours choisi pour I_m. Pour être en accord avec la convention de la loi d'Ohm généralisée, le signe de

chaque fém e_k doit dépendre de la polarité rencontrée en suivant le courant. Ainsi, si l'on rencontre la borne +, on met un signe + ($R_k I_m + e_k = 0$), tandis que si l'on rencontre la borne -, on met le signe - ($R_k I_m - e_k = 0$).

En suivant cette méthode, on obtient M équations à M inconnues (les courants de maille). Si, après calculs, un courant de maille est positif, cela signifie qu'il est effectivement dans le sens choisi initialement.

On détermine enfin les courants réels I_k circulant dans chaque branche (*courants de branches*), en choisissant arbitrairement leur sens, puis en exprimant ceux-ci en fonction des M courants de maille I_m.
On pourra vérifier que cette méthode permet de satisfaire automatiquement la conservation du courant (loi des nœuds).

Exemple : Le pont de Wheatstone



Le pont de Wheatstone possède M=6-4+1=3 mailles indépendantes. On choisit par exemple les 3 mailles suivantes :

- ABDA, de courant de maille i_1 allant de A vers B.
- BCDB, de courant de maille i_2 allant de B vers C.
- GADCG, de courant de maille i_3 allant de A vers C.

En choisissant arbitrairement le sens des 6 courants de branche I_k comme sur la figure, on obtient les relations suivantes :

$$I_1 = i_3 \quad I_2 = i_3 - i_1 \quad I_3 = i_3 - i_2$$
$$I_4 = i_1 \quad I_5 = i_2 \quad I_6 = i_1 - i_2$$

qui satisfont bien automatiquement la conservation du courant aux 4 nœuds

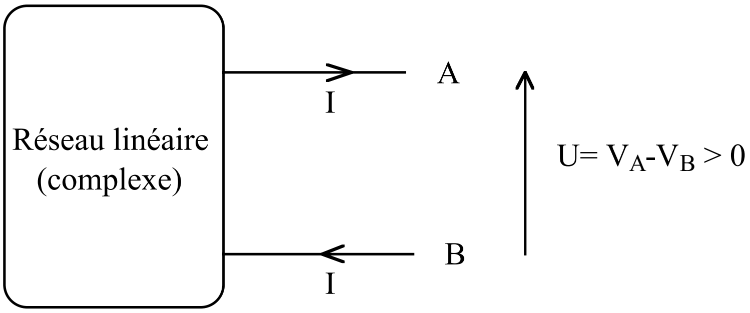
$$I_1 = I_2 + I_4 \quad I_3 = I_2 + I_6 \quad I_4 = I_5 + I_6 \quad I_1 = I_3 + I_5$$

Il ne nous reste plus qu'à écrire les 3 équations de maille (étape 3) pour calculer les 3 courants de maille, puis en déduire les courants réels I_k circulant dans chaque branche. En utilisant cette méthode, on se ramène à la résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues, au lieu d'un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues…

V.3.3- Le théorème de Thèvenin

Enoncé : *tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B, aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur unique de fém e et de résistance interne r telles que*

1. *$e = E$ est la tension mesurée entre A et B à l'aide d'un voltmètre ;*
2. *$r = R_{eq}$, où R_{eq} est la résistance équivalente du réseau, obtenue en posant que toutes les fém et fcém sont nulles.*

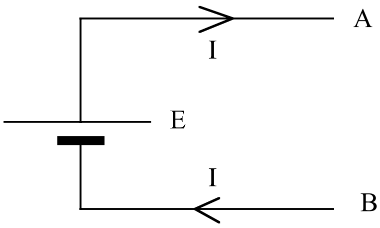


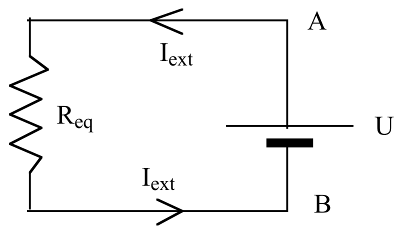
La démonstration est assez simple. Considérons un réseau constitué de n fém algébriques e_k. Si ce réseau est linéaire, c'est à dire si sa courbe caractéristique I=f(U) est une droite, alors on a

$$I = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + bU$$

où les a_k et b sont des constantes ne dépendant que des résistances du circuit et qui sont donc à déterminer.
Si l'on place un voltmètre parfait (résistance interne infinie) aux bornes du réseau, le courant I est nul et on mesure une tension $V_A - V_B = E$, ce qui fournit $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k + bE = 0$ c'est à dire

$$I = b(U - E)$$





$V_A - V_B = U = R_{eq}I_{ext}$
$I_{ext} = - I$

Maintenant, si l'on pose $e_k = 0$, c'est à dire si l'on remplaçait tous les générateurs et tous les récepteurs par uniquement leurs résistances internes, alors $E = 0$: le réseau se ramène à une simple résistance équivalente. Celle-ci serait alors mesurable en traçant la courbe caractéristique $I_{ext} = f(U)$, où le courant I_{ext} serait produit grâce à un générateur externe fournissant une tension U. En faisant attention au signe du courant, on obtiendrait

$$I = -bU = -\frac{U}{R_{eq}}$$

où le signe moins est dû au fait que le courant est ici en sens inverse de celui produit par le réseau lui-même ($I = -I_{ext}$). En rassemblant ces deux cas particuliers, on obtient que la tension aux bornes du réseau peut toujours s'écrire

$$V_A - V_B = E - R_{eq}I$$

Ceci achève la démonstration du théorème de Thèvenin.