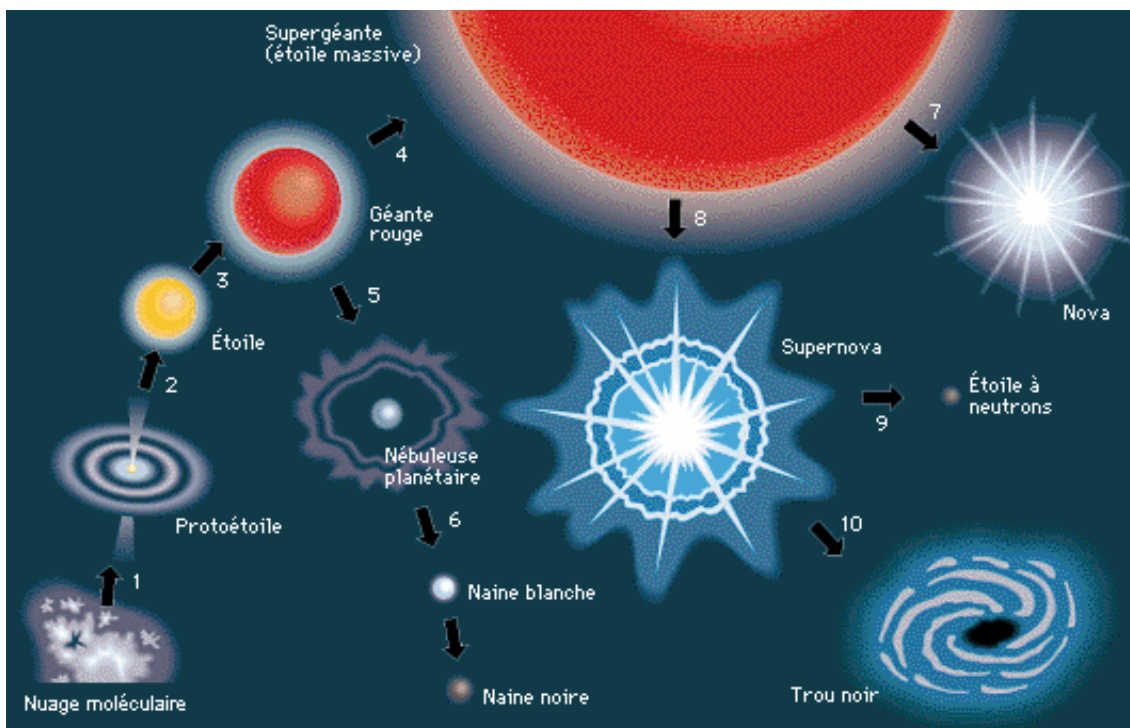


ASTROPHYSIQUE

Les Etoiles: la Vie, la Mort et tout le Bazar



Magistère et Maîtrise de Physique

Jonathan Ferreira

Novembre 2000

Table des matières

1	Introduction au Transfert de Rayonnement	1
1.1	Description du champ de rayonnement	1
1.1.1	Intensité spécifique	1
1.1.2	Densité d'énergie radiative	3
1.1.3	Flux d'énergie radiative	3
1.1.4	Pression de radiation	5
1.2	Equation de transfert de rayonnement et ses dérivées	7
1.2.1	L'équation de transfert	7
1.2.2	Solution formelle de l'équation de transfert	9
1.2.3	Lois de conservation	10
1.3	Cas particuliers importants en astrophysique	12
1.3.1	Equilibre radiatif	12
1.3.2	Equilibre thermodynamique local (ETL)	13
1.3.3	Milieux optiquement minces	14
1.3.4	Milieux opaques: corps noir et approximation de diffusion . . .	18
1.3.5	Milieux "gris" dans l'approximation d'Eddington	19
1.3.6	Couplage rayonnement-matière: équations fluides	22
1.4	Quelques remarques annexes	25
1.4.1	Relation avec une description statistique	25
1.4.2	Loi de Kirchhoff	25
1.4.3	Interaction matière-rayonnement	27
1.4.4	Libre parcours moyen des photons	28
1.4.5	Grandeurs utiles en Astrophysique	30
2	L'Impermanence des Étoiles	31
2.1	Qu'est-ce qu'une étoile?	31
2.1.1	Paramètres théoriques d'une étoile	31
2.1.2	Observables et liens avec la théorie	31
2.1.3	Le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR)	37
2.2	Formation stellaire	46
2.2.1	Le milieu interstellaire	46
2.2.2	Le théorème du Viriel	54
2.2.3	L'effondrement des coeurs moléculaires denses	57
2.3	Structure stellaire	64
2.3.1	Les principes de la structure stellaire	64

2.3.2	Modèles stellaires polytropiques	66
2.3.3	Quels sont les états de la matière stellaire?	69
2.3.4	Les sources d'énergie thermonucléaire: nucléosynthèse stellaire	72
2.3.5	Comment s'effectue le transport d'énergie?	77
2.3.6	Modèles numériques de structure stellaire	80
2.4	Évolution stellaire	82
2.4.1	Évolution des étoiles de faible masse ($M < 2 - 3 M_{\odot}$)	82
2.4.2	Évolution des étoiles massives ($M > 2 - 3 M_{\odot}$)	88
3	Les Objets Compacts	95
3.1	Les naines blanches	96
3.1.1	Equation d'état de la matière dégénérée	97
3.1.2	Structure mécanique: théorie de Chandrasekhar	100
3.1.3	Le refroidissement des naines blanches	102
3.2	Les étoiles à neutrons	109
3.2.1	Modèles d'étoiles à neutrons	109
3.2.2	Les pulsars ("Pulsating Stars")	116
3.2.3	Des "glitches" à la tectonique des plaques	128
3.3	Les trous noirs	135
3.3.1	Rappels de relativité restreinte	135
3.3.2	Notions élémentaires de relativité générale	140
3.3.3	Introduction à la physique des trous noirs	146
3.3.4	Les trous noirs en astrophysique	151
4	Les Systèmes Binaires	159
4.1	Formation et classification observationnelle	159
4.1.1	Formation des systèmes multiples	159
4.1.2	Classification observationnelle	160
4.2	Mécanique des systèmes binaires	161
4.2.1	Lois de Kepler	161
4.2.2	Circularisation et synchronisation	162
4.2.3	Le lobe de Roche	163
4.2.4	Transfert de masse entre les deux étoiles	165
4.3	La zoologie des systèmes binaires	167
4.3.1	Les variables cataclysmiques ou CV	167
4.3.2	Les binaires X	177
4.3.3	Autres systèmes binaires	185

Chapitre 1

Introduction au Transfert de Rayonnement

-
- *Définitions de l'intensité spécifique et des grandeurs associées*
 - *Equation de transfert et ses moments*
 - *Notions d'équilibre radiatif et ETL*
 - *Cas limites: régimes opaque et transparent*
 - *Force radiative et limite d'Eddington*
-

1.1 Description du champ de rayonnement

Pour décrire un champ de rayonnement, il y a plusieurs voies possibles. On peut construire une statistique de photons permettant de connaître, à tout instant et en tout point de l'espace, le nombre de photons dans un intervalle de fréquence et ayant une direction donnée. Cette approche est nécessaire dans des cas complexes. On peut également utiliser la notion de “rayon lumineux” issue de l'optique géométrique. C'est sur cette notion qu'est basée la théorie du transfert de rayonnement.

1.1.1 Intensité spécifique

Une grandeur élémentaire permettant de décrire un rayon lumineux est pertinente si elle reste conservée lorsque celui-ci se propage dans le vide. Un rayon (ie. une ligne) ne possède pas d'énergie puisque son volume est nul. Lui donner un volume revient à considérer un faisceau lumineux. Pour cela, on considère une surface élémentaire orientée $d\vec{A} = dA \vec{n}$, traversée par un faisceau de direction $\vec{k}$ donnée et d'extension l'angle solide élémentaire $d\Omega$ (voir figure). Par ailleurs, la seule information pertinente est la puissance (énergie ou nombre de photons par unité de temps) traversant la surface plutôt que l'énergie elle-même.

Ainsi, l'énergie E reçue pendant un temps dt par une surface dA de normale $\vec{n}$, traversée par un rayon lumineux monochromatique se propageant dans la direction

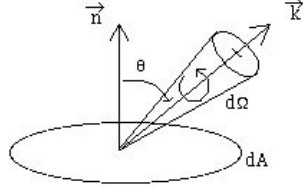


FIG. 1.1 – Rayon lumineux allant dans une direction $\vec{k}$ (vecteur unitaire à ne pas confondre avec un nombre d'onde) et d'angle solide $d\Omega$.

$\vec{k}$ est simplement

$$E = I_\nu(\vec{r}, \vec{k}, t) \vec{k} \cdot \vec{n} dA d\nu dt d\Omega \quad (1.1)$$

ce qui définit l'intensité spécifique monochromatique $I_\nu(\vec{r}, \vec{k}, t)$ (unités: $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{st}^{-1} \text{Hz}^{-1}$). En astrophysique, on utilise aussi l'énergie rayonnée par intervalle de longueur d'onde, ce qui conduit à définir une intensité spécifique en longueur d'onde I_λ . L'égalité d'énergie entraîne $I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu$, c'est à dire

$$I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu \quad (1.2)$$

Propriété

On peut montrer très facilement qu'il y a bien conservation de l'intensité spécifique le long du trajet d'un rayon lumineux dans le vide.

Soit un rayon lumineux allant de dS à dS' . Se propageant dans le vide, il y a conservation de l'énergie transportée par ce rayon lumineux. Cette énergie peut se calculer de deux façons, soit en partant de P, soit de P'. L'énergie traversant dS s'écrit

$$E = I_\nu \vec{k} \cdot \vec{n} dS d\nu dt d\Omega \quad (1.3)$$

où $d\Omega$ est l'angle solide soutendant dS' depuis P. On a donc $d\Omega = \vec{k} \cdot (-\vec{n}') dS' / PP'^2$. Par ailleurs, l'énergie traversant dS' s'écrit

$$E = I'_\nu \vec{k}' \cdot \vec{n}' dS' d\nu dt d\Omega' \quad (1.4)$$

où $d\Omega' = (-\vec{k}) \cdot \vec{n} dS / PP'^2$ est l'angle solide soutendant dS depuis P'. La conservation de l'énergie entre P et P' implique bien

$$I'_\nu = I_\nu . \quad (1.5)$$

En conséquence, la mesure de E, énergie reçue dans une bande de fréquence donnée, sur un récepteur de surface collectrice dS' permet de déterminer l'intensité spécifique du rayonnement émis par une source dS , à condition de connaître $d\Omega'$. La détermination de cette dernière grandeur nécessite toutefois que 1) dS soit spatialement résolue (impossible pour les étoiles) et 2) la distance à l'objet soit connue.

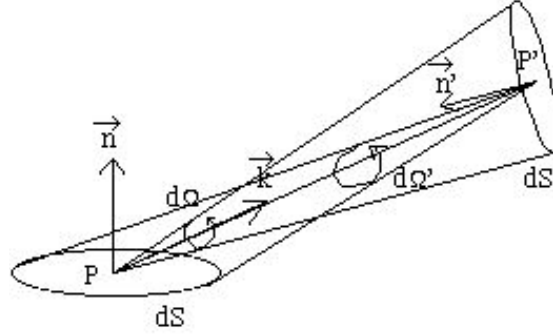


FIG. 1.2 – Illustration de la conservation de l'intensité spécifique dans le vide.

A partir de I_ν , on peut former l'intensité moyenne monochromatique

$$J_\nu = \int I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi}$$

(1.6)

C'est une grandeur qui intervient souvent dans les problèmes de transfert car tout écart à la moyenne provoque un ajustement du champ. Pour un champ de rayonnement isotrope, on a $I_\nu = J_\nu$.

1.1.2 Densité d'énergie radiative

Le champ de rayonnement transporte de l'énergie radiative. En considérant l'énergie E contenue dans un "cylindre" de hauteur $ds = cdt$ et de base $dA' = dA(\vec{n} \cdot \vec{k})$, on peut obtenir aisément la densité d'énergie radiative monochromatique, due aux rayons se propageant dans la direction $\vec{k}$,

$$\epsilon_\nu = \frac{E}{ds dA' d\nu d\Omega} = \frac{I_\nu}{c} . \quad (1.7)$$

En intégrant sur toutes les directions de propagation $\vec{k}$ on obtient alors la densité d'énergie monochratique du champ de rayonnement dans son ensemble (unités: $\text{J m}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$)

$$u_\nu = \int \epsilon_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

(1.8)

La densité d'énergie u_{rad} du champ de rayonnement (unités: J m^{-3}) est l'intégrale sur toutes les fréquences $u_{rad} = \int u_\nu d\nu$.

1.1.3 Flux d'énergie radiative

Si l'intensité spécifique décrit l'information élémentaire qui est transportée dans un rayon lumineux, le transport lui-même est décrit par le vecteur flux d'énergie. Il

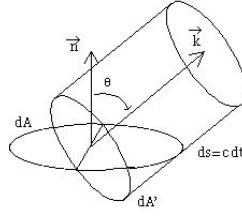


FIG. 1.3 – *Densité d'énergie radiative contenue dans un faisceau traversant une surface dA .*

s'écrit

$$d\vec{F}_\nu = I_\nu d\Omega \vec{k} \quad (1.9)$$

et a pour unités des $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$. Ce qui nous interesse est souvent le flux d'énergie reçu à travers une surface donnée (car c'est ce qui est mesuré, appelé également "éclat") dû à toutes les directions $\vec{k}$, autrement dit

$$F_\nu = \int d\vec{F}_\nu \cdot \vec{n} = \int I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (1.10)$$

(le faisceau "voit" une surface efficace $dA / \cos \theta$).

Flux émis par un objet

En coordonnées sphériques ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$), on peut réécrire le flux à travers une surface quelconque sous la forme suivante

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (1.11)$$

Dans le cas d'une étoile, la surface considérée est une surface fermée: le premier terme correspond au flux "sortant" (s'échappant hors de la surface) et le deuxième au flux entrant. Or, le rayonnement qui pourrait rentrer (dû à la présence d'autres étoiles) est négligeable et l'on a

$$F_\nu = \pi I_\nu \quad (1.12)$$

où l'on a fait l'hypothèse supplémentaire que le champ de rayonnement I_ν est isotrope.

Si le champ de rayonnement I_ν est globalement isotrope (autant d'énergie qui passe dans un sens que dans l'autre),

$$F_\nu = I_\nu \int \cos \theta d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

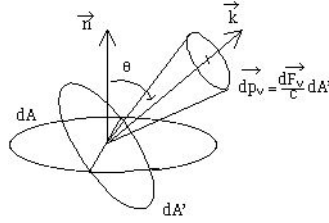


FIG. 1.4 – *Illustration de la pression de radiation, communiquée dans la direction $\vec{n}$, due à un faisceau se propageant dans la direction $\vec{k}$.*

le flux est nul. Cela traduit simplement la conservation de l'énergie en l'absence de sources ou de pertes contenues par la surface fermée. La surface d'une étoile (ou de tout objet brillant) n'est donc pas en équilibre thermodynamique global, mais décrit une discontinuité rapide entre deux régions.

Loi de décroissance du flux en $1/r^2$

Considérons le cas particulier d'une étoile de rayon R , émettant de façon isotrope dans l'espace. La puissance ou luminosité monochromatique rayonnée vaut

$$L_\nu = \int \vec{F}_\nu \cdot d\vec{A} = 4\pi R^2 F_\nu . \quad (1.14)$$

Une sphère de rayon $r > R$ interceptant tous les rayons lumineux issus de l'étoile, la conservation de l'intensité spécifique de chaque rayon implique la conservation de la puissance rayonnée et on a donc bien

$$F_\nu(r) = \frac{L_\nu}{4\pi r^2} \quad (1.15)$$

une décroissance du flux radiatif en $1/r^2$.

1.1.4 Pression de radiation

Chaque photon transporte une quantité de mouvement directement reliée à son énergie $\vec{p} = (h\nu/c)\vec{k}$ ($\vec{k}$ est unitaire). Donc, à un flux d'énergie radiative correspond également un flux de quantité de mouvement, autrement dit à une pression exercée par le champ de rayonnement. La quantité de mouvement $d\vec{p}_\nu$ transportée par un faisceau allant dans la direction $\vec{k}$ et traversant une surface $d\vec{A} = dA\vec{n}$ pendant dt est reliée à l'énergie radiative contenue dans le cylindre formé par la surface effective et la direction de propagation des rayons, c'est à dire

$$\begin{aligned} d\vec{p}_\nu &= \frac{u_\nu}{c} d\Omega \vec{k} = \frac{\epsilon_\nu (\vec{k} \cdot d\vec{A}) c dt}{c} d\Omega \vec{k} \\ &= \frac{d\vec{F}_\nu \cdot d\vec{A}}{c} dt \vec{k} \\ &= \frac{I_\nu}{c} \cos \theta dA d\Omega dt \vec{k} \end{aligned} \quad (1.16)$$

mais celle qui est *transférée* dans la direction normale à la surface est $dp_\nu = d\vec{p}_\nu \cdot \vec{n}$. La pression résultant du transfert d'impulsion associé aux rayons dans la direction $\vec{k}$ s'écrit

$$dP_\nu = \frac{dp_\nu}{dtdA} = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega \quad (1.17)$$

Ainsi, la pression de radiation monochromatique due à l'ensemble des rayons lumineux vaut

$$P_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega \quad (1.18)$$

Dans le cas d'un champ de rayonnement isotrope ($I_\nu = J_\nu$), la pression de radiation s'écrit simplement

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} J_\nu = \frac{u_\nu}{3} \quad (1.19)$$

fournissant une pression totale (intégrée sur toutes les fréquences) $P_{rad} = u_{rad}/3$.

Le tenseur pression de radiation

Ci-dessus, nous nous sommes intéressés essentiellement à la pression exercée contre une paroi dA , autrement dit au transfert d'impulsion dans la direction normale à la surface. En fait, pour une direction de propagation $\vec{k}$ donnée d'un rayon lumineux, il y a trois directions orthogonales possibles d'échange d'impulsion des photons avec un milieu. Mathématiquement, cela signifie que la pression de radiation doit être décrite par une matrice $\vec{\mathbf{P}}_\nu$ (tenseur d'ordre 2), dont les coefficients s'écrivent

$$P_\nu^{ij} = \int \frac{I_\nu}{c} k^i n^j d\Omega . \quad (1.20)$$

Clairement, cette matrice est symétrique ($P_\nu^{ij} = P_\nu^{ji}$), ce qui signifie qu'il faut 6 coefficients pour décrire complètement le transfert d'impulsion dû à un champ de rayonnement anisotrope. Lorsque le champ de rayonnement est isotrope (seul cas étudié ici) les éléments non diagonaux sont nuls et

$$\vec{\mathbf{P}}_\nu = \begin{pmatrix} P_\nu & 0 & 0 \\ 0 & P_\nu & 0 \\ 0 & 0 & P_\nu \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Ce tenseur est l'analogue du tenseur des contraintes dans l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement fluide. Les effets d'anisotropie d'un champ de rayonnement deviennent importants et pertinents surtout pour des milieux en mouvement relativiste.

1.2 Equation de transfert de rayonnement et ses dérivées

1.2.1 L'équation de transfert

L'équation de transfert décrit le fait que la variation de l'intensité spécifique $I_\nu(\vec{r}, t)$ le long d'un rayon lumineux est due à trois causes,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \left(\frac{dI_\nu}{ds}\right)_{\text{émission}} + \left(\frac{dI_\nu}{ds}\right)_{\text{absorption}} + \left(\frac{dI_\nu}{ds}\right)_{\text{diffusion}} \quad (1.22)$$

$ds = cdt$ étant l'élément de distance infinitésimal le long du trajet lumineux. Noter que la différentielle totale le long du trajet lumineux peut s'écrire également

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\vec{k} \cdot \vec{\nabla}) I_\nu \quad (1.23)$$

Emission

Par émission, on entend ici **émission spontanée** de la matière, qui enrichit ainsi en photons le champ de rayonnement indépendamment de celui-ci. L'apport en intensité peut donc s'écrire

$$dI_\nu = j_\nu ds \quad (1.24)$$

où j_ν est le *coefficient d'émission* de la matière (unités: $\text{J s}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ Hz}^{-1} \text{ st}^{-1}$). L'expression de j_ν dépend évidemment des processus microscopiques responsables de l'émission de ces photons. On distingue deux types de processus:

Processus thermiques: les photons sont émis par désexcitation collisionnelle d'atomes ou de molécules chauffés;

Processus non-thermiques: toute autre forme de création de photons. Exemples: rayonnement synchrotron (électrons spiralant autour d'un champ magnétique), Bremsstrahlung (déviations de la trajectoire d'électrons par collisions coulombiennes)...

Absorption

La matière a deux façons d'“absorber” un rayonnement incident. Soit, par une **vraie absorption** (l'énergie des photons absorbés reste stockée en énergie interne des particules: photoionisation, photoexcitation), soit lors d'une **émission induite** (où une fraction de l'énergie des photons absorbés est renvoyée dans le champ de rayonnement). Dans les deux cas, la perte ou le gain d'intensité est proportionnelle à l'intensité incidente et ces deux effets peuvent s'écrire

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \quad (1.25)$$

où α_ν est le *coefficient d'absorption* de la matière (unités: m^{-1}). Il est positif pour une vraie absorption, négatif pour une émission induite.

Diffusion

La diffusion de la lumière par des particules dépend, comme l'absorption, du champ de rayonnement incident. En toute généralité, la diffusion change la direction de propagation d'un photon, mais peut également modifier son énergie et donc agir comme une "source" (par ex, effet Compton). Dans ce cas, la diffusion ne dépend plus des propriétés locales et c'est ce qui rend sa prise en compte beaucoup plus difficile: diffusion avec un électron libre (diffusion Thomson), avec un atome ou molécule (diffusion Rayleigh), avec de la poussière (diffusion de Mie).

On se place dans le cas simple où la diffusion est élastique (par ex, diffusion Thomson), la fréquence des photons diffusés reste donc inchangée. La diminution d'intensité due à la diffusion des photons hors du faisceau lumineux peut alors s'écrire facilement

$$dI_\nu = -\sigma_\nu I_\nu ds, \quad (1.26)$$

où σ_ν est le *coefficient de diffusion* (unités: m^{-1}). Mais de la diffusion se produisant à l'extérieur du faisceau peut ramener des photons à l'intérieur de celui-ci et augmenter son intensité d'un facteur

$$dI_\nu = \int_{\Omega'} \sigma_\nu(\Omega, \Omega') I_\nu(\Omega') \frac{d\Omega'}{4\pi} ds \quad (1.27)$$

agissant ainsi comme une nouvelle fonction source. Si le milieu et le processus de diffusion considéré sont isotropes, l'effet de la diffusion seule peut s'écrire

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \quad (1.28)$$

où l'on peut remarquer que J_ν agit effectivement comme une source. La diffusion isotrope et élastique produit une sorte de relaxation puisque, sous son effet seul, le champ de rayonnement va tendre à devenir isotrope (I_ν tend vers J_ν , cf Eq. (1.28)).

Opacités

On voit donc que dans la théorie du transfert de rayonnement, toute la physique de l'interaction matière-rayonnement (émission, absorption et diffusion) est cachée dans les divers coefficients. Il existe plusieurs groupes de recherche uniquement voués au calcul de ces divers coefficients essentiels. En effet, il faut employer des moyens numériques lourds si l'on veut les calculer pour des gaz constitués de plusieurs atomes et molécules (voire des grains de poussières et des glaces pour le milieu interstellaire), chaque espèce ayant plusieurs transitions atomiques possibles ou bien encore subissant des transformations irréversibles (destruction des grains, sublimation de la glace).

Dans la plupart des cas cependant, les coefficients importants à connaître sont l'absorption et la diffusion. On utilise souvent les coefficients massiques ou *opacités*

$$\kappa_\nu = \frac{\alpha_\nu + \sigma_\nu}{\rho}$$

$$(1.29)$$

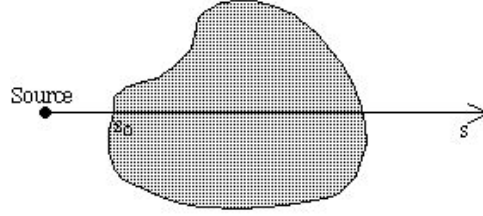


FIG. 1.5 – Rayon lumineux produit par une source se trouvant derrière un milieu purement absorbant ($j_\nu = \sigma_\nu = 0$).

(unités: $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$) où ρ est la densité de la matière. On parle d'opacités grises lorsque ces opacités sont indépendantes de la fréquence. A partir des calculs numériques lourds évoqués plus haut, il est ensuite d'usage (car pratique) d'utiliser des ajustements analytiques des tables d'opacités, du type $\kappa = \kappa_o \rho^\gamma T^\beta$, où κ_o et les indices γ et β sont connus et varient selon les domaines en densité et en température.

1.2.2 Solution formelle de l'équation de transfert

On ne considère ici que le cas simplifié où tous les coefficients sont isotropes et la diffusion élastique. L'équation de transfert complète s'écrit alors

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \sigma_\nu (I_\nu - J_\nu) . \quad (1.30)$$

Dans le cas le plus simple où un milieu ne comporte que des absorbants ($j_\nu = \sigma_\nu = 0$) et qu'il existe une source de rayonnement derrière ce milieu, l'équation de transfert (1.30) a pour solution

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_o) e^{-\int_{s_o}^s \alpha_\nu(s') ds'} \quad (1.31)$$

c'est-à-dire une décroissance exponentielle de l'intensité spécifique due aux sources situées derrière. Cette décroissance est d'autant plus forte pour un milieu où l'épaisseur optique

$$\tau_\nu = \int_{s_o}^s \alpha_\nu(s') ds' , \quad (1.32)$$

est grande. On qualifie d'optiquement épais ou opaque, un milieu où $\tau_\nu > 1$, d'optiquement mince ou transparent un milieu où $\tau_\nu < 1$. Noter que l'épaisseur optique dépend de la fréquence. Par exemple, un nuage interstellaire peut être opaque en lumière visible mais transparent en ondes radio.

En présence simultanée d'absorption et d'émission ($\sigma_\nu = 0$), l'équation de transfert s'écrit souvent sous la forme

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad (1.33)$$

où $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$ est épaisseur optique sur ds et $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$ est appelée *fonction source*. On peut interpréter cette équation comme une équation de "relaxation". En

effet, dans des milieux suffisamment opaques, la variation d'intensité spécifique avec l'épaisseur optique varie peu et I_ν tend vers S_ν .

Lorsque I_ν et S_ν ne sont que des fonctions de l'épaisseur optique τ_ν , cette équation a pour solution générale

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(\tau_{\nu,0})e^{\tau_{\nu,0}-\tau_\nu} + \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu)e^{\tau'_\nu-\tau_\nu} d\tau'_\nu. \quad (1.34)$$

L'intensité est donc la somme de deux contributions, l'une due uniquement à l'absorption et l'autre due à l'émission intégrée corrigée de l'absorption.

La présence de diffusion ($\sigma_\nu \neq 0$) introduit une modification de la fonction source d'un milieu. L'équation de transfert se met sous une forme similaire

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu^*} = S_\nu^* - I_\nu \quad (1.35)$$

mais où la nouvelle fonction source est

$$S_\nu^* = \frac{j_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \quad (1.36)$$

et où l'épaisseur optique est définie par $d\tau_\nu^* = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)ds$. Le coefficient $(\alpha_\nu + \sigma_\nu)$ est quelquefois appelé le *coefficient d'extinction*. L'introduction de la diffusion (même élastique et isotrope) a considérablement accru la complexité de l'équation de transfert.

1.2.3 Lois de conservation

L'équation de transfert (1.30) s'écrit

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{k} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \sigma_\nu (I_\nu - J_\nu) \quad (1.37)$$

Cette équation est, dans la plupart des cas, une équation intégral-différentielle aux dérivées partielles, horriblement compliquée à résoudre! Il existe cependant quelques cas simples, montrés dans la section suivante, pour lesquels il est peu coûteux d'obtenir une solution de cette équation.

Pour calculer $I_\nu(\vec{r}, \vec{k}, t)$, il faudrait connaître $J_\nu(\vec{r}, t)$ qui est l'intégrale de I_ν sur toutes les directions de propagation. La résolution de l'équation de transfert nous fournirait l'intensité spécifique (et les autres grandeurs associées) en fonction de 7 variables: $\vec{r}$, t , $\vec{k}$ (spécifié par 2 angles) et ν . L'une des façons d'amoindrir la difficulté de l'équation de transfert consiste à perdre l'information sur la direction de propagation. Pour cela, on forme de nouvelles équations qui vont porter sur de nouvelles grandeurs, proportionnelles aux divers moments de I_ν : densité d'énergie u_ν (scalaire, moment d'ordre 0), flux radiatif $\vec{F}_\nu$ (vecteur, moment d'ordre 1), pression de radiation $\vec{P}_\nu$ (tenseur, moment d'ordre 2). Les moments d'ordre supérieur ne possèdent pas de sens physique et ne sont pas utilisés.

Conservation de l'énergie radiative

En intégrant l'équation de transfert (1.37) sur toutes les directions, on obtient l'équation de conservation de la densité d'énergie radiative monochromatique

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\nu = 4\pi j_\nu - \alpha_\nu c u_\nu . \quad (1.38)$$

Cette équation décrit que la variation locale d'énergie du champ de rayonnement est due à deux causes: (1) au transport par les photons ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\nu$) et (2) aux écarts entre ce qui est émis et ce qui est absorbé par la matière. Noter que la diffusion élastique ne contribue pas au bilan énergétique.

Intégrée sur toutes les fréquences, l'équation (1.38) fournit la variation de la densité d'énergie radiative

$$\frac{\partial u_{rad}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} = \int_0^\infty \alpha_\nu (4\pi S_\nu - c u_\nu) d\nu \quad (1.39)$$

Le terme de droite décrit l'interaction avec la matière. En régime stationnaire ($\partial_t = 0$), il doit y avoir conservation de l'énergie du système matière-rayonnement. Si le champ de rayonnement perd de l'énergie (terme de droite négatif), cela signifie que la matière en reçoit. Autrement dit, l'équation de conservation d'énergie de la matière doit comporter un terme source associé au rayonnement.

Noter que l'équation portant sur E_{rad} fait maintenant intervenir $\vec{F}_{rad}$, le moment d'ordre supérieur. Soit on résout l'équation de transfert (qui nous donne I_ν) puis on calcule $\vec{F}_\nu$, soit il faut trouver une équation nous fournissant directement $\vec{F}_{rad}$.

Conservation du flux radiatif

En multipliant l'équation de transfert (1.37) par $\vec{k}$ et en l'intégrant sur toutes les directions, on obtient l'équation suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}_\nu = -\frac{\rho \kappa_\nu}{c} \vec{F}_\nu \quad (1.40)$$

où $\vec{\mathbf{P}}_\nu$ est le tenseur (6 composantes) de pression radiative monochromatique. En intégrant sur toutes les fréquences, on obtient ainsi une équation qui s'interprète comme l'équation de conservation de la quantité de mouvement des photons

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}_{rad}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}_{rad} = -\int_0^\infty \frac{\rho \kappa_\nu}{c} \vec{F}_\nu d\nu \quad (1.41)$$

Dans ce cours, nous ne considérerons que les cas simples où le tenseur de pression s'écrit $\vec{\mathbf{P}}_{rad} = P_{rad} \vec{\mathbf{I}}$, $\vec{\mathbf{I}}$ étant le tenseur identité. L'effet de la pression radiative est alors équivalent à un gradient de pression "hydrostatique": $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}_{rad} = \vec{\nabla} P_{rad}$.

Ici aussi, l'équation portant sur le flux $\vec{F}_{rad}$ fait intervenir une nouvelle inconnue, qui est le tenseur de pression radiative $\vec{P}_{rad}$. La méthode qui consiste à prendre les moments d'ordre de plus en plus élevés n'a en fait pas de fin et il faut faire intervenir une relation dite de fermeture. Par exemple, pour les équations fluides de l'hydrodynamique, c'est l'équation d'état qui fournit la relation $P(\rho, T)$ permettant de fermer le système d'équations. De même, il nous faudra utiliser une relation de fermeture de ce type lorsqu'on ne voudra (ou pourra) pas résoudre l'équation de transfert (1.37) directement, mais passer par les équations de conservation (1.39) et (1.41). Cette relation de fermeture doit donc être motivée (et obtenue) par des considérations physiques qui dépendent du système étudié.

1.3 Cas particuliers importants en astrophysique

1.3.1 Equilibre radiatif

Lorsqu'un champ de rayonnement interagit avec de la matière mais sans qu'il y ait échange d'énergie, on dit qu'un équilibre radiatif est établi. Cette hypothèse simplificatrice se traduit par la condition intégrale

$$\int_0^\infty \alpha_\nu (4\pi S_\nu - cu_\nu) d\nu = 0 \quad (1.42)$$

Cela ne signifie pas que le champ de rayonnement reste indemne. Par exemple, des grains de poussière, en interceptant la lumière d'une étoile chaude, absorbent le rayonnement préférentiellement dans le bleu et réémettent en infrarouge. La condition globale ci-dessus reste néanmoins satisfaite, la luminosité bolométrique émise par l'étoile étant conservée.

En régime stationnaire, l'énergie du champ de rayonnement doit être conservée ($\partial E_{rad}/\partial t = 0$). L'hypothèse d'équilibre radiatif impose alors la condition supplémentaire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} = 0 \quad (1.43)$$

c'est à dire la conservation du flux radiatif bolométrique (pas de pertes, ni de gains). On en déduit donc, dans le cas d'un objet de rayon R émettant de façon isotrope ($\vec{F}_{rad} = F_{rad}(r)\vec{u}_r$), une décroissance du flux $F_{rad}(r) = F_{rad}(R)(R/r)^2$.

Enfin, une autre façon d'obtenir un équilibre radiatif (et donc de satisfaire la condition (1.42)) est d'avoir

$$S_\nu = J_\nu \quad (1.44)$$

Cette condition est nettement plus restrictive que la précédente. Si elle est établie, alors un équilibre radiatif est aussitôt assuré.

Cette dernière situation ressemble à de la diffusion pure (cf Eq. (1.28)). En présence uniquement de diffusion élastique et isotrope ($j_\nu = \alpha_\nu = 0$), l'équation (1.39) s'écrit

$$\frac{\partial u_{rad}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} = 0 \quad (1.45)$$

et donc, la condition de stationarité implique directement la conservation du flux radiatif (trivialité due au fait que ce genre de diffusion ne contribue pas au bilan énergétique).

1.3.2 Equilibre thermodynamique local (ETL)

L'équilibre thermodynamique local (ETL) signifie que l'état microscopique local de la **matière** est décrit par une seule variable thermodynamique, la température T . Cette thermalisation de la matière est généralement due à des effets collisionnels. Seuls les plasmas peu denses seront donc hors-ETL: distribution de vitesses non-Maxwelliennes, populations des niveaux atomiques ou moléculaires ne suivant pas une distribution de Maxwell-Boltzmann. Il faudra alors traiter plus finement les conditions d'excitation et d'émission de ces milieux.

Le rayonnement est un peu particulier. Du fait de la faible section efficace de collision photon-photon aux basses énergies¹, le champ de rayonnement est “non-collisionnel” et serait donc hors-ETL s'il n'était en interaction avec la matière. En particulier, un champ de rayonnement donné porte la caractéristique de la matière qui en est responsable. Si celle-ci est à l'ETL, alors le champ de rayonnement le sera également et on pourra définir une “température” unique associée. Si la matière n'est pas à l'ETL, le rayonnement sera également hors-ETL et il n'y aura pas de température unique.

Lorsque la matière est à l'ETL, il existe des liens entre les propriétés microscopiques d'émission et d'absorption de la matière. Ces liens se verront plus loin, avec les coefficients d'Einstein. A l'ETL, la fonction source du rayonnement est donnée par la loi de Kirchhoff

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T) \quad (1.46)$$

où

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.47)$$

est la fonction de Planck et le rayonnement est dit **thermique**. Les processus d'émission non-thermique autres que la diffusion (par ex, rayonnement synchrotron ou Bremsstrahlung) ne seront pas décrits dans ce cours. En présence de diffusion, la fonction source d'un milieu à l'ETL est

$$S_\nu^* = (1 - A_\nu)B_\nu(T) + A_\nu J_\nu \quad (1.48)$$

où $A_\nu = \sigma_\nu/(\alpha_\nu + \sigma_\nu)$ est l'albedo par diffusion. Un gaz peut en effet émettre un rayonnement uniquement par diffusion de la lumière (ex, un nuage à proximité d'une étoile).

On peut définir une “température” pour le champ de rayonnement, en posant

$$I_\nu \equiv B_\nu(T_b) \quad (1.49)$$

1. Le champ de rayonnement devient “dense” à partir d'énergies correspondant aux rayons gamma.

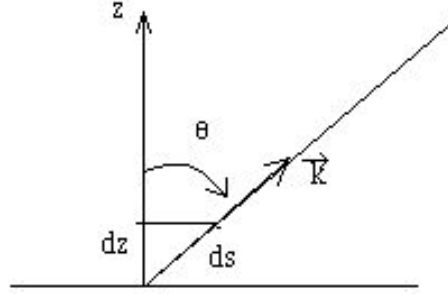


FIG. 1.6 – *Géométrie plan-parallèle. Toutes les grandeurs sont supposées invariantes selon x et y . Une telle géométrie est souvent utilisée pour les atmosphères stellaires.*

où T_b est la *température de brillance* du rayonnement, valable dans un intervalle de fréquence. Si le rayonnement est thermalisé avec la matière qui lui a donné naissance, on a

$$I_\nu = B_\nu(T) \quad \text{et} \quad T_b = T . \quad (1.50)$$

Cela ne peut se produire que s'il y a suffisamment d'interactions avec la matière, autrement dit pour $\tau_\nu \gg 1$ (cf Eq. (1.34): dans cette limite, $I_\nu \rightarrow S_\nu$). Un rayonnement de ce type est un rayonnement de **corps noir**. Par ailleurs, la fonction de Planck étant isotrope, on a également $I_\nu = J_\nu$, ce qui montre qu'un corps noir est à l'équilibre radiatif.

Si l'épaisseur optique du milieu est trop faible ($\tau_\nu \ll 1$), le rayonnement ne peut être à l'équilibre thermodynamique avec la matière et sa température de brillance ne sera pas égale à celle de la matière. Si on prend le cas particulier d'un nuage optiquement mince sans source située derrière ($\tau_{\nu,0} = 0$, $I_\nu(0) = 0$), l'équation générale (1.34) fournit

$$I_\nu \simeq \tau_\nu B_\nu(T) \quad \text{et} \quad T_b \ll T , \quad (1.51)$$

autrement dit une température de brillance beaucoup plus faible que celle de la matière. Un milieu à l'ETL, produisant un rayonnement thermique, aura donc une intensité maximale lorsqu'il est opaque (corps noir).

1.3.3 Milieux optiquement minces

Le milieu considéré est optiquement mince lorsque sa taille R est bien supérieure à l'échelle caractéristique de thermalisation du rayonnement λ_ν (cf section 1.4.4). L'hypothèse essentielle consiste ensuite à supposer l'ETL établi ou pas pour la matière.

Pour se fixer les idées, nous allons nous placer en géométrie plan-parallèle: on considère que les propriétés de la matière (température, opacités) dépendent uniquement de la profondeur z . L'intensité spécifique s'écrit alors $I_\nu = I_\nu(z, \mu)$ où $\mu = \cos \theta$, θ étant l'angle que fait le rayon lumineux considéré avec la verticale. On a alors

$$ds = \frac{dz}{\cos \theta} = \frac{dz}{\mu} \quad (1.52)$$

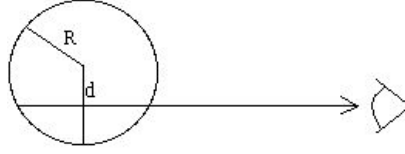


FIG. 1.7 – *Détection d'un rayon lumineux produit par un nuage sphérique de rayon R .*

et l'intensité spécifique (solution de l'équation de transfert (1.34) dans la limite $\tau_\nu \rightarrow 0$, ou ce qui est équivalent, en l'absence de source de rayonnement) s'écrit

$$I_\nu(z, \mu) = I_\nu(0, 1)e^{-\tau_\nu/\mu} \quad (1.53)$$

l'épaisseur optique $\tau_\nu = \int_0^z \alpha_\nu dz'$ étant exprimée indépendamment de l'angle. Or, dans un milieu optiquement mince, on peut considérer que les rayons lumineux ne sont pratiquement pas déviés par la matière. En première approximation, ils se propagent donc en ligne droite. On peut alors, dans ce cas extrême, écrire $I_\nu(z, \mu) \simeq I_\nu(z)\delta_{(\mu=1)}$, avec $I_\nu(z) = I_\nu(0, 1)e^{-\tau_\nu}$. Du coup, les autres grandeurs associées au champ de rayonnement deviennent

$$u_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu \simeq 2\pi \frac{I_\nu}{c} \quad (1.54)$$

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \simeq 2\pi I_\nu \quad (1.55)$$

$$P_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu^2 d\mu \simeq 2\pi \frac{I_\nu}{c} \quad (1.56)$$

Dans ce cas extrême, on a donc

$$P_\nu = u_\nu = \frac{F_\nu}{c} \quad (1.57)$$

c'est à dire une sorte d'équipartition entre pression, densité d'énergie et flux. Plus le milieu devient opaque et plus les interactions avec la matière introduisent des déviations des rayons lumineux, brisant cette équipartition.

Exercice 1: Un nuage sur la ligne de visée

Soit un nuage sphérique optiquement mince à l'ETL, de rayon R et température T , situé à une distance D de la Terre. Ce nuage homogène est constitué d'un gaz ayant un coefficient d'émission spontanée isotrope j_ν (unités: $J s^{-1} m^{-3} st^{-1} Hz^{-1}$) et un coefficient d'absorption α indépendant de la fréquence. Calculer son intensité spécifique, le flux monochromatique reçu, la température effective estimée et sa température de couleur.

Puisqu'il est optiquement mince, l'intensité spécifique du nuage peut se calculer directement par

$$I_\nu(d) = \int j_\nu dz = 2j_\nu \sqrt{R^2 - d^2}, \quad (1.58)$$

où d est la distance entre le rayon considéré et celui passant par le diamètre. On retrouve le même résultat par un autre raisonnement. A l'ETL et pour des processus thermiques on a $S_\nu = B_\nu(T)$, c'est à dire $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$. L'intensité spécifique s'obtient après intégration de l'équation de transfert et s'écrit

$$I_\nu(d) = B_\nu(1 - e^{-\tau(d)}) \simeq B_\nu \tau(d) \quad (1.59)$$

où $\tau(d) = \int \alpha dz = 2\alpha\sqrt{R^2 - d^2}$. Ces deux expressions sont donc bien semblables.

Le flux monochromatique du nuage atteignant la Terre est relié à la luminosité monochromatique $L_\nu = 4\pi D^2 F_\nu$. Le nuage étant optiquement mince et j_ν étant une puissance par unité de volume, d'angle solide et de fréquence, on a

$$L_\nu = \int d^3v \int j_\nu d\Omega = \frac{4}{3}\pi R^3 4\pi j_\nu \quad (1.60)$$

d'où le flux monochromatique reçu sur Terre

$$F_\nu = \frac{4\pi R^3 j_\nu}{3D^2} . \quad (1.61)$$

La *température effective* T_{eff} du nuage est celle qu'il aurait s'il avait un flux bolométrique (intégré sur toutes les fréquences) égal à celui d'un corps noir. Or, la luminosité totale du nuage vaut

$$L_{rad} = \int_0^\infty L_\nu d\nu = \frac{4}{3}\pi R^3 4\pi \int_0^\infty \alpha B_\nu(T) d\nu \quad (1.62)$$

$$\equiv 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (1.63)$$

d'où l'on tire une température effective

$$T_{eff} = \left(\frac{4}{3}\alpha R\right)^{1/4} T \quad (1.64)$$

beaucoup plus petite que sa température réelle T (le produit αR est une mesure de l'épaisseur optique du nuage, qui est ici supposée faible).

Enfin, la *température de couleur* ou température de brillance T_b est la température déduite du champ de rayonnement mesuré en posant $I_\nu = B_\nu(T_b)$. En régime optiquement mince, on a $I_\nu \simeq \tau_\nu B_\nu(T) \ll B_\nu(T)$, donc on “mesure” $T_b \ll T$. Evidemment, $T_b = T_{eff} = T$ pour un corps noir.

Exercice 2: Une étoile et son atmosphère

On considère une étoile de température effective T_c entourée d'une atmosphère à l'ETL de température effective $T_s < T_c$. Cette atmosphère possède une raie d'absorption étroite autour de la fréquence ν_0 et on regarde à deux fréquences, ν_0 et $\nu_1 > \nu_0$ (en dehors de la raie, mais suffisamment proche de ν_0 pour qu'on puisse considérer que la fonction source ne varie pas entre les deux). Comment varie l'intensité spécifique, pour chaque fréquence, et pour les deux rayons A et B?

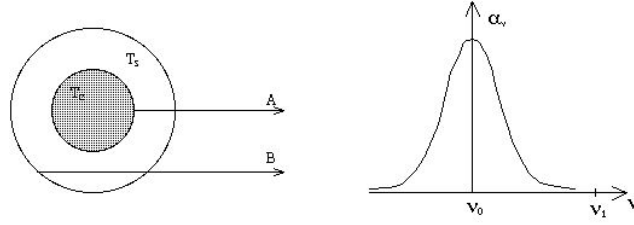


FIG. 1.8 – (a) Rayons lumineux produits par une étoile de température effective T_c entourée d’une atmosphère à l’ETL de température effective T_s . (b) Profil du coefficient d’absorption α_ν en fonction de la fréquence.

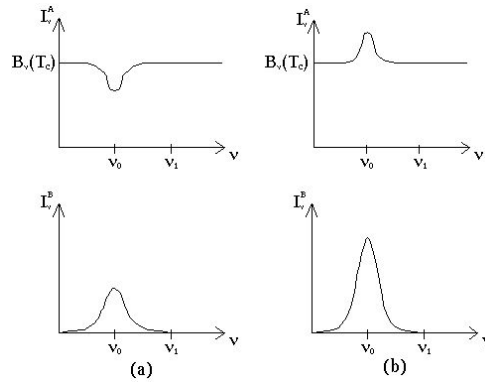


FIG. 1.9 – Intensité spécifique pour deux rayons A et B issus d’un corps noir de température T_c entouré par une atmosphère à la température T_s : (a) $T_c > T_s$; (b) $T_c < T_s$.

Pour chaque fréquence on a

$$\begin{aligned} I_\nu^A &= B_\nu(T_c)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T_s)(1 - e^{-\tau_\nu}) \\ I_\nu^B &= B_\nu(T_s)(1 - e^{-\tau_\nu}) \end{aligned} \quad (1.65)$$

A la fréquence ν_0 , l’épaisseur optique de l’atmosphère est grande et on a $I_{\nu_0}^A \simeq B_\nu(T_s)$, tandis que $I_{\nu_0}^B < B_\nu(T_s)$ (valeur maximale possible).

A la fréquence ν_1 , l’atmosphère est transparente et $I_{\nu_1}^A \simeq B_\nu(T_c)$, $I_{\nu_1}^B \simeq B_\nu(T_s)\tau_{\nu_1} \simeq 0$.

Du fait que $T_c > T_s$, on a $B_\nu(T_c) > B_\nu(T_s)$ et l’on verra une raie en “absorption” à la fréquence ν_0 pour le rayon A. Dans le cas contraire ($T_c < T_s$), on verra une raie en “émission”.

1.3.4 Milieux opaques: corps noir et approximation de diffusion

Le corps noir

Lorsqu'un milieu est si dense qu'il devient optiquement épais à toutes les longueurs d'onde, on peut utiliser l'approximation d'un corps noir. L'équilibre thermodynamique (ET) est réalisé globalement, matière et rayonnement partageant la même température. Dans ce cas, les diverses grandeurs associées au champ de rayonnement prennent les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}
 S_\nu &= B_\nu(T) && \text{(rayonnement thermique)} \\
 I_\nu &= S_\nu && (\tau_\nu \gg 1) \\
 \vec{F}_\nu &= \vec{0} && \text{(isotropie à l'intérieur du milieu)} \\
 F_\nu &= \pi I_\nu && \text{(flux émis à la surface)} \\
 u_\nu &= 4\pi B_\nu/c && (I_\nu = J_\nu) \\
 P_\nu &= u_\nu/3 && \text{(isotropie)} \\
 u_{rad} &= \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{4\sigma}{c} T^4 \\
 P_{rad} &= u_{rad}/3
 \end{aligned}$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4} . \quad (1.66)$$

Par exemple, la luminosité monochromatique émise à la surface d'une étoile s'écrit $L_\nu = 4\pi R^2 \pi B_\nu$, ce qui fournit une luminosité bolométrique $L_{rad} = 4\pi R^2 \sigma T^4$.

L'approximation de diffusion

L'hypothèse d'un corps noir global est cependant très restrictive. En effet, tant que l'on considère des échelles spatiales R beaucoup plus grandes que les échelles de thermalisation (de la matière et du rayonnement λ_ν), on peut faire l'approximation de l'ETL. Dans cette approximation, le champ de rayonnement sera effectivement isotrope et décrit par une même température (identique à celle de la matière), mais sur des échelles R plus petites que la taille du milieu considéré. Ainsi, sur une échelle plus grande, on pourra assister à des variations de température du milieu et donc à des flux non nuls.

Dans ce qui suit, on se place à nouveau dans la géométrie plan-parallèle: les propriétés de la matière ne dépendent que de la profondeur z et l'équation de transfert s'écrit

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = -(\alpha_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu^*) . \quad (1.67)$$

L'ETL et l'isotropie locale permettent d'écrire qu'à l'ordre zéro en dépendance angulaire $S_\nu^{*(0)} = B_\nu(T)$ et $I_\nu^{(0)}(z, \mu) \simeq I_\nu(z) \simeq B_\nu(T)$. Mais la variation $T(z)$ brise l'isotropie du milieu et fait apparaître une direction privilégiée dans laquelle va se propager l'énergie radiative (existence d'un flux dans la direction z). En réinjectant

ces termes d'ordre 0 dans l'équation de transfert et en la réécrivant sous la forme suivante

$$I_\nu^{(1)}(z, \mu) = B_\nu(T) - \frac{\mu}{\rho\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dz} \quad (1.68)$$

on voit apparaître la contribution au premier ordre en μ (deuxième terme). Alors que le terme $I_\nu^{(0)} = B_\nu(T)$ fournit un flux nul, la faible anisotropie due à la variation de température introduit un flux

$$F_\nu(z) = \int I_\nu^{(1)} \cos \theta d\Omega = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{dT}{dz} \quad (1.69)$$

dans la direction z (puisque $T = T(z)$). Pour calculer le flux radiatif bolométrique, il est commode d'introduire l'*opacité moyenne de Rosseland*, définie par

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1} \rho \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \quad (1.70)$$

On obtient alors le résultat important suivant

$$F_{rad}(z) = \int_0^\infty F_\nu d\nu = -\frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_R} \frac{dT}{dz} \quad (1.71)$$

qui relie le flux radiatif au gradient local de température. Dans un milieu suffisamment dense, le processus de transport d'énergie par le rayonnement ressemble donc à une diffusion, avec une diffusivité "radiative" $\kappa_{rad} = 16\sigma T^3/3\rho\kappa_R$. On peut généraliser l'expression du flux radiatif sous la forme vectorielle suivante

$$\vec{F}_{rad} = -\kappa_{rad} \vec{\nabla} T \quad (1.72)$$

1.3.5 Milieux "gris" dans l'approximation d'Eddington

L'approximation de diffusion nécessite $R \gg \lambda_\nu$ afin qu'il y ait à la fois, localement, isotropie et même température. Or, l'émission thermique et certains processus de diffusion sont eux-mêmes isotropes, ce qui fait que nous pouvons considérer qu'à des échelles encore plus petites (de l'ordre de λ_ν) le rayonnement soit déjà isotrope mais pas encore thermalisé. Il doit donc être possible de faire un traitement approché à ces échelles là. Celles-ci correspondent aux zones de transition entre une région optiquement épaisse et une région optiquement mince.

On se place à nouveau en géométrie plan-parallèle et on suppose que le champ de rayonnement est faiblement anisotrope

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = a_\nu(\tau_\nu) + b_\nu(\tau_\nu)\mu \quad (1.73)$$

où les coefficients a_ν et b_ν sont a priori quelconques. On peut alors aisément calculer l'intensité moyenne, le flux radiatif et la pression de radiation,

$$J_\nu = \int I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = a_\nu$$

$$\begin{aligned}
u_\nu &= \frac{4\pi}{c} J_\nu = \frac{4\pi}{c} a_\nu \\
F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu = \frac{4\pi}{3} b_\nu \\
P_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3c} a_\nu
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant (connu sous le nom d'approximation d'Ed-
dington),

$$P_\nu = \frac{u_\nu}{3} \tag{1.75}$$

valable quelque soit a_ν (même lorsque $a_\nu \neq B_\nu(T)$), pourvu que le champ de rayonne-
ment soit seulement faiblement anisotrope (au premier ordre). Cette approximation
constitue donc une relation de fermeture très couramment employée (quelque fois
sous la forme $P_{rad} = u_{rad}/3$). Valable en régime optiquement épais et à la transi-
tion épais-transparent, elle est clairement fausse en régime optiquement mince (où
 $P_\nu = u_\nu$).

Exercice: Photosphère stellaire

*Calculer la distribution de température d'une atmosphère stellaire grise, à la
transition entre les régions optiquement épaisse et optiquement mince.*

Il est d'usage, dans le traitement des atmosphères stellaires, d'orienter l'axe des
 z vers le “bas” avec $ds = -dz/\mu$. Ainsi, la “profondeur optique” $\tau_\nu(z) = \int_0^z \rho \kappa_\nu dz$
est nulle à la “surface” de l'atmosphère puis grandit vers l'intérieur, en conformité
avec ce que voit un observateur. L'équation de transfert s'écrit alors

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu^* \tag{1.76}$$

En l'intégrant sur tous les angles, on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} &= J_\nu - S_\nu^* \\
c \frac{dP_\nu}{d\tau_\nu} &= F_\nu
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Pour une atmosphère où les opacités sont indépendantes de la fréquence, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \frac{dF_{rad}}{d\tau} &= \int_0^\infty (J_\nu - S_\nu^*) d\nu \\
c \frac{dP_{rad}}{d\tau} &= F_{rad}
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Puisque nous considérons un régime stationnaire, l'atmosphère doit être en équilibre
radiatif (sinon, cela impliquerait qu'elle reçoive en permanence de l'énergie des zones

inférieures et ne pourrait donc rester en équilibre). Cela signifie donc que

$$\begin{aligned} \frac{dF_{rad}}{d\tau} &= 0 \\ \int S_\nu^* d\nu &= \int J_\nu d\nu = \int B_\nu d\nu . \end{aligned} \quad (1.79)$$

Par ailleurs, sur le Soleil par exemple, l'épaisseur de la zone de transition optiquement épais-optiquement mince vaut environ $10^{-3} R_\odot$, où $R_\odot$ est le rayon solaire. On peut donc faire l'hypothèse que le flux solaire reste à peu près constant sur cette zone de transition: $F_{rad} = \sigma T_{eff}^4$, indépendant de τ .

L'équilibre radiatif ainsi que l'approximation supplémentaire d'Eddington permettent alors d'écrire

$$P_{rad} = \frac{u_{rad}}{3} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty J_\nu d\nu = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \quad (1.80)$$

ce qui, après intégration de l'équation portant sur P_{rad} , nous fournit la distribution de la température dans l'atmosphère

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{eff}^4 (\tau + \tau_o) , \quad (1.81)$$

τ_o devant être déterminé par une condition aux limites. La condition évidente est d'imposer que le flux bolométrique émergent à la surface de l'atmosphère ($\tau = 0$) transporte bien F_{rad} , c'est à dire

$$F_{rad} = 2\pi \int_0^1 I(\mu, \tau = 0) \mu d\mu . \quad (1.82)$$

L'équation de transfert (1.34) nous fournit l'intensité spécifique monochromatique rayonnée en haut de l'atmosphère (où $\tau_\nu = 0$ par définition et en prenant $\tau_{\nu,0} \rightarrow \infty$ vers l'intérieur)

$$I_\nu(\mu, \tau_\nu = 0) = \int_0^\infty S_\nu^* e^{-\tau_\nu/\mu} d\tau_\nu / \mu \quad (1.83)$$

ce qui donne, en intégrant sur toutes les fréquences,

$$I(\mu, \tau_\nu = 0) = \int_0^\infty I_\nu(\mu, \tau_\nu = 0) d\nu = \int_0^\infty S^* e^{-\tau/\mu} d\tau / \mu \quad (1.84)$$

où la fonction source bolométrique vaut

$$S^* = \int_0^\infty S_\nu^* d\nu = \frac{3}{4\pi} F_{rad} (\tau + \tau_o) \quad (1.85)$$

En reportant cette expression dans le calcul du flux émergent, on obtient $\tau_o = 2/3$. On obtient donc la relation $T(\tau)$ valable pour une atmosphère grise,

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) . \quad (1.86)$$

L'intérêt essentiel de cette expression est de montrer que la *photosphère* d'une étoile, lieu en-deça duquel l'étoile est optiquement épaisse et rayonne comme un corps

noir, se trouve à une profondeur optique $\tau = 2/3$. Connaitre maintenant le profil de température avec l'altitude, c'est à dire relier la variable τ à l'altitude z , nécessite de calculer les diverses sources d'opacité ainsi que de résoudre le problème dynamique de l'atmosphère. En général cependant, le problème de transfert ne peut être découplé du problème dynamique...

On peut réexprimer l'intensité spécifique bolométrique émise à la “surface” de l'atmosphère sous la forme

$$I(\mu, 0) = I(1, 0) \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) . \quad (1.87)$$

Ainsi, l'intensité observée par un observateur au zénith est 5/2 fois plus importante que celle observée avec des angles rasants. C'est ce que l'on appelle l'“assombrissement centre-bord” observé sur le Soleil (bords moins brillants que le centre).

1.3.6 Couplage rayonnement-matière: équations fluides

Dans la plupart des cas en astrophysique, l'équation sur le flux radiatif (1.40) peut se ramener à

$$\vec{F}_\nu \simeq -\frac{c}{\rho\kappa_\nu} \vec{\nabla} P_\nu . \quad (1.88)$$

Pour cela, les variations temporelles du flux doivent être négligeables, ce qui se produit lorsque la condition

$$T \gg \frac{1}{\rho\kappa_\nu c} \quad (1.89)$$

est satisfaite: on considère des échelles de temps T beaucoup plus longues que le temps caractéristique pris par les photons entre deux interactions avec la matière (régime stationnaire du point de vue des photons).

Si la matière reçoit de l'énergie, elle absorbe également une certaine quantité de mouvement, ce qui va se traduire par une force radiative. L'expression générale de la densité de force par unité de fréquence (unités: $\text{N m}^{-3} \text{Hz}^{-1}$) est simplement

$$\vec{f}_\nu = \frac{\rho\kappa_\nu}{c} \vec{F}_\nu = -\vec{\nabla} P_\nu \quad (1.90)$$

évidemment fonction de l'opacité du milieu (attention, l'égalité de droite n'est valable qu'en régime stationnaire). Par exemple, une étoile peut expulser une partie de son atmosphère extérieure, grâce à la présence de raies d'absorption. Pour décrire finement les mouvements d'une telle atmosphère, il faut alors résoudre le problème couplé d'hydrodynamique et de transfert de rayonnement.

En première approximation, on peut simplement chercher à connaître l'effet global du rayonnement sur un écoulement à un fluide en intégrant sur toutes les fréquences. On utilisera alors des opacités “grises”, moyennées sur les fréquences. Ainsi, l'expression de la densité de force devient simplement

$$\vec{f}_{rad} = \frac{\rho\kappa_F}{c} \vec{F}_{rad} \simeq -\vec{\nabla} P_{rad} \quad (1.91)$$

où l'opacité grise κ_F est définie par la moyenne de flux pondéré

$$\kappa_F = \frac{\left| \int_0^\infty \kappa_\nu \vec{F}_\nu d\nu \right|}{\left| \int_0^\infty \vec{F}_\nu d\nu \right|}. \quad (1.92)$$

Cette opacité grise dépend du flux donc, ne sera connue qu'après résolution du transfert de rayonnement. Mais résoudre ce problème nécessite l'utilisation de κ_F . Il faudra donc utiliser une méthode itérative.

En général, lorsqu'on veut résoudre un problème d'hydrodynamique dans lequel intervient le champ de rayonnement (vents stellaires, phases d'éjection AGB, effondrement d'un nuage...), il faut écrire le système d'équations suivantes,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.93)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \Phi - \vec{\nabla} P + \int_0^\infty \frac{\rho \kappa_\nu}{c} \vec{F}_\nu \quad (1.94)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Sources + \int_0^\infty \alpha_\nu (cu_\nu - 4\pi S_\nu) d\nu \quad (1.95)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.96)$$

$$\rho e = \frac{P}{\gamma - 1} \quad (1.97)$$

auxquelles on doit rajouter les équations fournissant l'évolution de E_{rad} et $\vec{F}_{rad}$ (équations 1.39 et 1.41), une relation de fermeture pour le rayonnement (fournissant P_{rad}), ainsi que la donnée des opacités.

Les 3 premières équations ci-dessus décrivent la conservation de la masse², conservation de l'impulsion de la matière et une équation portant sur l'évolution de l'énergie interne par unité de masse e due à une compression ou détente (terme $P \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$), des sources extérieures éventuelles (ex, rayons cosmiques) et l'apport d'énergie du champ de rayonnement. La 4ème équation est l'équation de Poisson, qui permet de calculer le champ de gravitation Φ d'une distribution de masse ρ . Enfin, la dernière équation est l'équation d'état de la matière, qui sert de relation de fermeture $P = P(\rho, T)$. Dans la plupart des cas, l'équation ci-dessus (gaz parfaits, γ étant l'indice adiabatique) suffit.

Pour le champ de rayonnement, une relation de fermeture utilisée est souvent une interpolation entre les deux cas extrêmes:

$$\text{Régime opaque:} \quad P_{rad} = \frac{u_{rad}}{3} \gg \frac{F_{rad}}{c}$$

$$\text{Régime transparent:} \quad P_{rad} = u_{rad} = \frac{F_{rad}}{c}$$

En effet, en régime opaque, le grand nombre d'interactions entre matière et photons construit une grande pression de radiation et ne permet pas un grand flux. Si l'échelle caractéristique de variation de la pression de radiation est L , alors l'équation (1.88)

2. La notation $D./Dt = \partial./\partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$, décrit une dérivée lagrangienne.

implique $F_{rad}/cP_{rad} \sim 1/\rho\kappa L \sim \lambda_{rad}/L \ll 1$. Cette interpolation prend une forme analytique en général simple,

$$P_{rad} = \frac{u_{rad}}{3} + \frac{q}{3c}F_{rad} \quad (1.98)$$

où le coefficient q dépend de la position et est obtenu par itérations successives (q tend vers 2 pour un régime de plus en plus transparent). Une autre relation de fermeture consiste à utiliser un tenseur variable dit d'Eddington $\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{P}}_{rad}/u_{rad}$, permettant de décrire un champ de rayonnement anisotrope.

Exercice: la limite d'Eddington

Supposons qu'une étoile de masse M , rayon R et de luminosité bolométrique L_{rad} soit à une distance r d'un nuage d'Hydrogène optiquement mince. A quelle condition, la matière de ce nuage est-elle repoussée par la pression de radiation émanant de l'étoile?

La force par unité de masse subie par chaque atome d'hydrogène est radiale et vaut

$$\vec{f}_{rad} = \frac{\kappa}{c}\vec{F}_{rad} \quad (1.99)$$

où κ est l'opacité grise du nuage et $\vec{F}_{rad} = F_{rad}(r)\vec{u}_r$ est le flux émis par l'étoile. Ce flux est relié à la luminosité bolométrique par $L_{rad} = 4\pi R^2\sigma T_{eff}^4 = 4\pi r^2 F_{rad}(r)$.

Par ailleurs, l'attraction gravitationnelle fournit une force radiale

$$\vec{f}_{grav} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r. \quad (1.100)$$

Chaque atome d'hydrogène est donc repoussé si $f_{rad} + f_{grav} > 0$, autrement dit, si

$$\frac{M}{L} < \frac{\kappa}{4\pi Gc} \quad (1.101)$$

Pour des milieux complètement ionisés (à proximité d'étoiles chaudes), l'opacité est due à la diffusion Thomson et $\kappa = \sigma_T/m_p = 0.04 \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$ ($\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$, section efficace Thomson, et m_p masse du proton). Dans ce cas, la luminosité maximale, au-delà de laquelle la matière est repoussée par pression de radiation vaut

$$L_{EDD} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} = 1.25 \cdot 10^{31} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ J s}^{-1}$$

(1.102)

Cette luminosité limite est appelée luminosité d'Eddington. Ce type de calcul est intéressant dans beaucoup de contextes astrophysiques: formation d'étoiles massives qui se libèrent de leur cocon de poussières, disques de matière circumstellaire repoussés par l'étoile centrale, nuages "soufflés" par des étoiles massives, vents d'atmosphères stellaires...

1.4 Quelques remarques annexes

1.4.1 Relation avec une description statistique

Soit f_α la fonction de distribution de photons d'état de spin α . Le nombre de photons contenus dans un volume élémentaire de l'espace des phases est $f_\alpha d^3x d^3p$. L'énergie de tous ces photons vaut donc

$$E = \sum_{\alpha=1}^2 h\nu f_\alpha d^3x d^3p . \quad (1.103)$$

Or, $d^3x = c dt (\vec{k} \cdot \vec{n} dA)$ est le volume occupé pendant en temps dt et $d^3p = p^2 dp d\Omega$ si les photons possèdent une dispersion $d\Omega$ autour de leur direction de propagation $\vec{k}$. L'énergie peut alors s'écrire

$$E = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f_\alpha (\vec{k} \cdot \vec{n}) dt d\nu dA d\Omega \quad (1.104)$$

et on peut donc identifier immédiatement

$$I_\nu = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f_\alpha \quad (1.105)$$

1.4.2 Loi de Kirchhoff

Lorsque le gaz de photons est en équilibre thermodynamique avec la matière, la statistique de Bose-Einstein fournit le nombre d'occupation de photons par état de spin

$$\mathcal{N}_\alpha \equiv h^3 f_\alpha = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.106)$$

d'où l'expression suivante pour l'intensité spécifique

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \equiv B_\nu(T) . \quad (1.107)$$

En équilibre thermodynamique avec la matière, les photons obéissent donc à la loi de Planck (corps noir), le champ de rayonnement ne dépend alors que de la température de la matière (figure 1.10).

Ce fait fut énoncé par Kirchhoff et est connu sous le nom de **loi de Kirchhoff**. Le raisonnement pour l'établir est le suivant. Supposons deux enceintes remplies de photons, à même température mais avec une intensité spécifique différente dans une bande de fréquence donnée. Si on met en contact ces deux enceintes par un filtre laissant passer les photons dans cette bande de fréquence, il va y avoir un transport d'énergie radiative de l'une vers l'autre, puisque les intensités diffèrent. Or, cela signifie qu'il y a un travail entre deux systèmes de même température. Ceci est en contradiction avec le deuxième principe de la thermodynamique. Par conséquent, $I_\nu = I_\nu(T)$ lorsque le champ est à l'équilibre thermodynamique avec la matière.

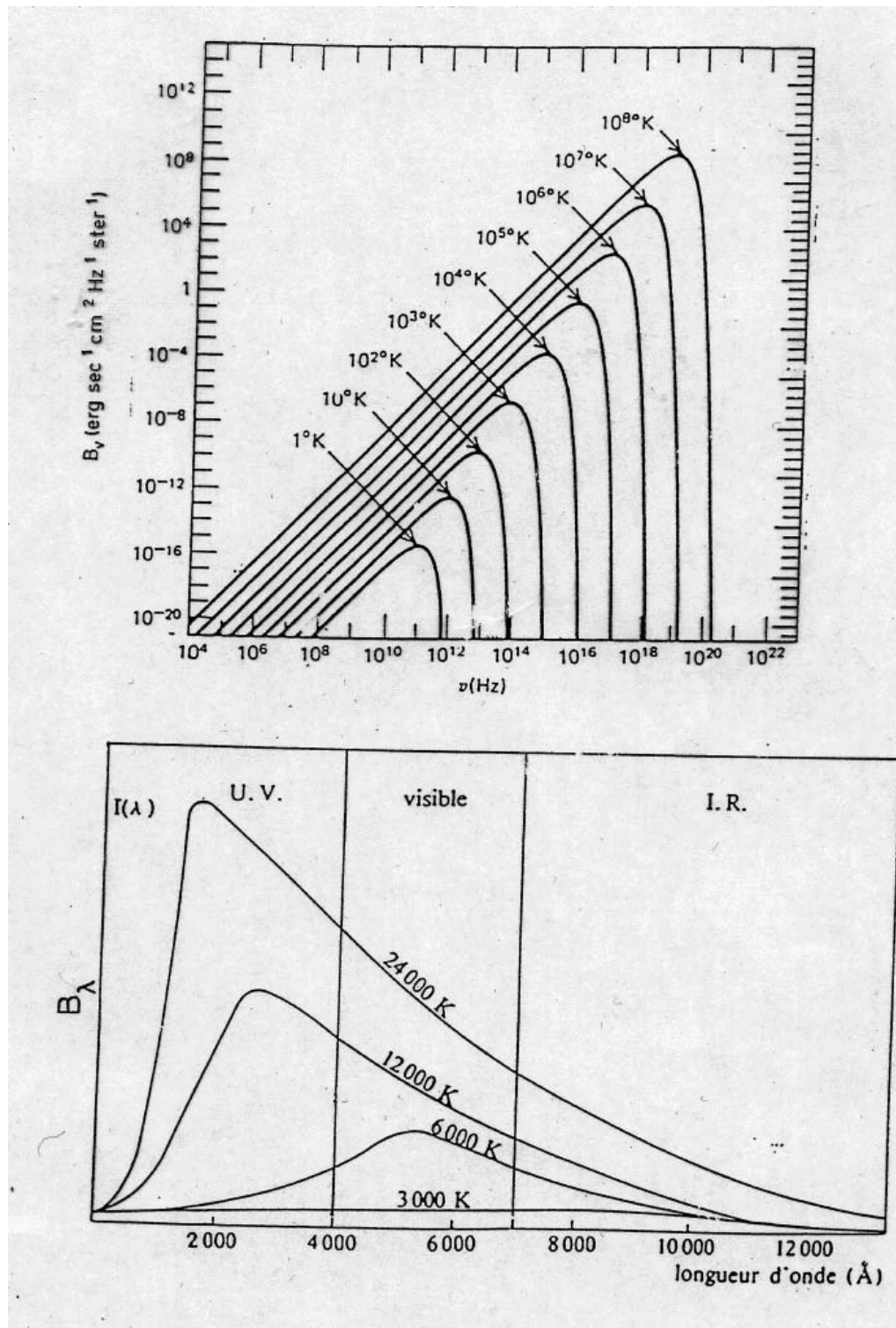


FIG. 1.10 – Fonction de Planck $B(T)$, en fonction de la fréquence ν et de la longueur d'onde λ .

1.4.3 Interaction matière-rayonnement

Coefficients d'Einstein

Un gaz de matière est constitué d'atomes (ou molécules) le plus souvent excités collisionnellement. Ces atomes auront donc des niveaux supérieurs d'énergie peuplés par des électrons qui ne demandent qu'à redescendre en émettant des photons. Le calcul des coefficients d'émission j_ν et d'absorption α_ν passe donc par des considérations microscopiques.

Le cas le plus simple concerne un atome à deux niveaux 1 et 2, de poids statistique g_1 et g_2 et séparés en énergie par $\Delta E = h\nu_o$.

Soit A_{21} la probabilité par unité de temps qu'une émission spontanée d'un photon se produise. Par spontanée, on entend indépendamment d'un champ de rayonnement extérieur.

Par contre, l'absorption d'un photon, elle, dépend du rayonnement en présence. Comme la raie possède une largeur naturelle (soit $\phi(\nu)$ son profil, défini sur une largeur $\Delta\nu$), la probabilité d'absorption s'écrit

$$B_{12}\bar{J} = B_{12} \frac{\int_0^\infty \phi(\nu) J_\nu d\nu}{\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu} \quad (1.108)$$

où l'on a supposé que le rayonnement était isotrope à l'échelle de l'atome ($I_\nu = J_\nu$).

L'émission stimulée suit exactement la même loi, puisqu'elle dépend également du rayonnement incident, c'est à dire avec une probabilité $B_{21}\bar{J}$. L'hypothèse supplémentaire nécessaire ici (presque toujours valable en astrophysique) concerne l'égalité des profils de raie d'absorption et d'émission.

Les coefficients A_{21} , B_{12} et B_{21} sont appelés les coefficients d'Einstein et sont reliés entre eux par les *relations d'Einstein*

$$\begin{aligned} g_1 B_{12} &= g_2 B_{21} \\ A_{21} &= 2 \frac{h\nu^3}{c^2} B_{21} \end{aligned} \quad (1.109)$$

Ces relations sont obtenues en faisant plusieurs hypothèses: (1) équilibre statistique ($n_1 B_{12}\bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21}\bar{J}$); (2) la matière est à l'ETL, autrement dit les populations des niveaux obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{h\nu_o/kT} \quad (1.110)$$

et (3) $\bar{J} = B_\nu(T)$ pour un champ de rayonnement isotrope à l'échelle des atomes et B_ν variant peu sur $\Delta\nu$.

Coefficients d'émission et d'absorption

Dans un volume $dV = dAdz$, la quantité totale d'énergie émise spontanément (par un gaz d'atomes à deux niveaux) pendant dt est

$$E = A_{21} dt n_2 dV \int_\nu h\nu \phi(\nu) d\nu \int_\Omega \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (1.111)$$

où n_2 est la densité d'atomes dans l'état 2. Dans des intervalles de fréquences $d\nu$ et d'angle solide $d\Omega$, l'énergie vaut

$$\begin{aligned} dE &= A_{21} dt n_2 dV h\nu \phi(\nu) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &= j_\nu dA ds dt d\Omega d\nu \end{aligned} \quad (1.112)$$

ce qui permet donc d'obtenir le coefficient d'émission spontanée

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) n_2 A_{21} . \quad (1.113)$$

On fait de même pour le coefficient d'absorption. Comme les caractéristiques des photons émis par stimulation sont les mêmes que ceux absorbés, on peut directement écrire que l'énergie totale vaut

$$E = dt dV (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \int_\nu h\nu \phi(\nu) I_\nu d\nu \int_\Omega \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (1.114)$$

et ainsi, obtenir le coefficient d'absorption

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \quad (1.115)$$

qui inclue les effets de l'émission stimulée.

1.4.4 Libre parcours moyen des photons

Le libre parcours moyen des photons, défini par

$$\lambda_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} = \frac{1}{\rho \kappa_\nu} \quad (1.116)$$

est la distance moyenne que peut parcourir un photon avant d'être absorbé (avec une probabilité $\xi_\nu = \alpha_\nu / (\alpha_\nu + \sigma_\nu)$) ou diffusé (avec une probabilité $1 - \xi_\nu$).

Connaissant les propriétés d'extinction d'un milieu, on peut donc déterminer la distance moyenne que va parcourir un photon, de son lieu de création à son lieu de destruction (par vraie absorption). La trajectoire d'un photon est en effet assimilable à une marche au hasard, de longueur totale λ_* et constituée de N lignes brisées de longueur λ_ν chacune. On a donc en moyenne

$$\lambda_*^2 = N \lambda_\nu^2 \quad (1.117)$$

avec $N \xi_\nu = 1$ par définition de N , ce qui fournit une longueur totale parcourue

$$\lambda_* = [\alpha_\nu (\alpha_\nu + \sigma_\nu)]^{-1/2} . \quad (1.118)$$

Cette longueur, appelée *longueur de diffusion* ou *parcours moyen effectif*, est également la *longueur de thermalisation*. En effet, c'est la longueur minimale d'homogénéisation du milieu (transport de l'information) par les photons.

Considérons un phénomène astrophysique se produisant à une échelle caractéristique de taille R . L'équilibre thermodynamique local (ETL) de la matière peut être alors assuré de deux façons différentes:

- **collisionnellement** si $R \gg \lambda_m$, où λ_m est le libre parcours moyen des particules entre deux collisions.
- **radiativement** si $R \gg \lambda_\nu$.

En général, les plasmas terrestres sont denses et sont maintenus à l'ETL collisionnellement. Certains milieux astrophysiques diffus (couronnes stellaires, nuages) sont trop peu denses pour que les quelques rares collisions thermalisent le milieu. C'est alors le rayonnement qui peut éventuellement jouer ce rôle. Si $R \ll \lambda_m$ et $R \ll \lambda_\nu$, alors le milieu sera hors ETL. Ce cas ne sera pas abordé dans ce cours. Par ailleurs, un rayonnement thermique ($S_\nu = B_\nu(T)$) nécessite que l'ETL soit établi.

Pour résumer, pour un corps maintenu collisionnellement à l'ETL:

- $R \gg \lambda_* \gg \lambda_\nu$, le rayonnement est thermalisé avec la matière du fait de ses multiples interactions et on a $I_\nu = S_\nu = B_\nu$ (régime optiquement épais avec $\tau_\nu \gg 1$).
- $R \ll \lambda_\nu$, il n'y a pas de thermalisation avec la matière possible et $I_\nu \neq S_\nu = B_\nu$ (régime optiquement mince avec $\tau_\nu \ll 1$).
- $\lambda_\nu \ll R \ll \lambda_*$, le milieu est dit translucide ($\tau_\nu \sim 1$), la plupart des photons arrivant à s'échapper avant d'être absorbés (ex: gaz contenu dans une ampoule électrique).

1.4.5 Grandeurs utiles en Astrophysique

Constantes physiques

Vitesse de la lumière (vide)	$c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Charge de l'électron	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Rapport des masses	$m_p/m_e = 1836.2$
Constante de la gravitation	$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6.6262 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	$k = 1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Stefan	$\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8} \text{ J s m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Perméabilité du vide	$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henry m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ farad m}^{-1}$
Electron Volt	$1 \text{ eV} \equiv 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \equiv 11605 \text{ K}$

Paramètres solaires

Age	$= 4.5 \cdot 10^9 \text{ yr}$
Masse	$M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Rayon	$R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Luminosité	$L_{\odot} = 3.86 \cdot 10^{26} \text{ J s}^{-1}$
Période	$P_{\odot} = 26 \text{ days}$
Température effective	$T_{eff} = 5785 \text{ K}$
Température centrale	$T_c = 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$

Distances astrophysiques

Unité Astrophysique	$1 \text{ AU} = 1.4959 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Année lumière	$1 \text{ al} = 9.4605 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3.26 \text{ al} = 3.0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$

Chapitre 2

L'Impermanence des Étoiles

-
- *Définitions des magnitudes et couleurs*
 - *Diagramme HR: interprétation, ordres de grandeur*
 - *Scenario de formation stellaire*
 - *Théorème du Viriel (sans champ magnétique) et applications*
 - *Modèles polytropiques: comment construire une étoile*
 - *Physique stellaire: transport de l'énergie (rayonnement et convection)*
 - *Scenario d'évolution stellaire*
-

2.1 Qu'est-ce qu'une étoile?

2.1.1 Paramètres théoriques d'une étoile

Une étoile est un objet constitué de gaz et possédant les caractéristiques suivantes:

- (1)- compact et connexe (au sens topologique),
- (2)- autogravitant,
- (3)- opaque à toute fréquence,
- (4)- intrinsèquement lumineux.

Ces propriétés vont donc se traduire par des paramètres physiques, tels que: la masse M , le rayon R , la température effective T_{eff} et la composition chimique du gaz. Comme une étoile rayonne, cela signifie qu'elle va évoluer et éventuellement modifier ces paramètres au cours du temps. C'est pourquoi, dans un schéma évolutif, on s'intéresse aux paramètres initiaux (ce qui suppose définir un temps zéro pour une étoile).

La première question qui se pose est donc de relier ces paramètres physiques à des grandeurs observables.

2.1.2 Observables et liens avec la théorie

Distance, Masse, Rayon, Composition chimique

La distance des étoiles proches ($d < 100$ pc) est obtenue par triangulation (méthode de la parallaxe), en utilisant le diamètre de l'orbite terrestre. Il y a quelques

milliers d'étoiles dans le voisinage du Soleil. Pour des étoiles plus lointaines, d'autres méthodes seront nécessaires.

La moitié environ des étoiles forme un système binaire gravitationnellement lié. En utilisant les lois de la gravitation keplerienne, il est alors possible de déterminer les paramètres du système et de remonter ainsi à *la masse* de chaque composante.

Lorsque la distance d'une étoile est connue, la mesure de son diamètre angulaire permet de connaître *son rayon*. Le problème est donc le manque de résolution angulaire actuel et la plupart des étoiles restent ponctuelles. La méthode d'occultation (qui consiste à mesurer le temps de passage d'un objet devant l'étoile), par la Lune ou bien par l'une des composantes dans un système binaire à éclipses, permet cependant d'obtenir les rayons de certaines de ces étoiles proches. Il faut noter que la définition précise du rayon d'une étoile est délicate. En effet, lorsque celle-ci est bien opaque à toutes les fréquences, le rayon correspond à la photosphère ($\tau = 2/3$). Lorsque ce n'est plus le cas (comme pour une géante rouge), le rayon dépend de la fréquence.

Chaque élément chimique possède sa signature spectroscopique. L'analyse des spectres stellaires a pu ainsi déterminer la présence dans l'atmosphère stellaire de tous les éléments stables connus sur Terre, depuis ^1H jusqu'à ^{209}Bi . L'abondance exacte est dépendante du modèle d'atmosphère.

Magnitudes apparentes et flux reçu

Hipparque (au II^e siècle avant J.C.) classifia les étoiles les unes par rapport aux autres par leur éclat apparent. Ainsi, les étoiles les plus brillantes du ciel étaient dites de "première grandeur", tandis que les suivantes, plus faibles, étaient dites de "deuxième", troisième grandeur etc... (jusqu'à six). Cette classification, effectuée à l'oeil nu, a en fait suivi une échelle logarithmique, puisqu'elle correspondait à la réponse logarithmique de l'oeil humain.

Lorsqu'au siècle dernier les astronomes ont voulu quantifier les flux reçus par les étoiles, ils ont choisi un système de mesure des flux qui retrouve les observations des "Anciens". Ce système est celui des magnitudes, où la *magnitude apparente* d'une étoile $m_{\nu,1}$, vue à une fréquence ν , se compare celle d'une autre étoile $m_{\nu,2}$ de la façon suivante

$$m_{\nu,1} - m_{\nu,2} = -2.5 \log \frac{f_{\nu,1}}{f_{\nu,2}} \quad (2.1)$$

où f_{ν} est le flux monochromatique reçu. Ainsi, la magnitude d'une étoile, dans une bande de fréquence donnée, se compare nécessairement à une étoile de référence.

En fait, les observations s'effectuent dans des bandes de fréquence données et bien répertoriées (système photométrique UBV). Ces bandes plutôt larges correspondent à des filtres précis et sont repérées par des lettres de l'alphabet: on note traditionnellement dans le domaine visible U ($0.36\mu\text{m}$), B ($0.43\mu\text{m}$), V ($0.54\mu\text{m}$), R ($0.7\mu\text{m}$) et dans le proche infrarouge I ($0.9\mu\text{m}$), J ($1.25\mu\text{m}$), H ($1.65\mu\text{m}$), K ($2.2\mu\text{m}$), L ($3.6\mu\text{m}$), M ($4.8\mu\text{m}$), N ($10\mu\text{m}$). Une magnitude apparente visuelle s'écrit m_V ou directement V.

Le choix de la référence s'est porté sur les étoiles de type spectral A0 (voir plus bas), de telle sorte que leur flux dans chaque bande photométrique corresponde à une magnitude apparente nulle. Du fait de ce choix, le Soleil devient une étoile de magnitude apparente visuelle $m_{V,\odot} = -26.74$ ¹. On peut distinguer à l'oeil nu des étoiles jusqu'à des magnitudes de +7, +26 avec le télescope spatial.

Magnitudes absolues et luminosité bolométrique

Les magnitudes apparentes sont une mesure du flux reçu dans une bande de fréquence, mais ce que l'on cherche à estimer est le flux total (intégré sur toutes fréquences) émis par l'étoile, afin de remonter à sa luminosité bolométrique.

En l'absence d'extinction (absorption et diffusion) du milieu interstellaire, l'intensité spécifique est conservée et le flux monochromatique reçu f_ν est donc relié à la luminosité monochromatique L_ν par

$$f_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi d^2} \quad (2.2)$$

où d est la distance de l'étoile, qui doit donc être connue. Mais le milieu interstellaire agit sur le rayonnement et modifie ses caractéristiques. Par exemple, dans le cas simple où il n'y aurait que de l'absorption, $I_\nu(d) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu(d)}$ où $\tau_\nu(d)$ est l'épaisseur optique le long du trajet lumineux. Le flux reçu est donc diminué d'autant ce qui, en termes de magnitudes, s'écrit

$$m_\nu = -2.5 \log L_\nu + 5 \log d + (2.5 \log e)\tau_\nu + Cte . \quad (2.3)$$

D'une façon générale, on introduit un facteur d'extinction interstellaire A_ν (en magnitudes) qui mesure l'absorption mais également la diffusion, donc une redistribution en fréquences. Ainsi, les grains de poussière du milieu interstellaire absorbent dans le visible mais réémettent dans l'infrarouge (effet dit de rougissement des spectres), avec un $A_V \simeq 1$ pour une distance de 1 kpc.

Le flux monochromatique émis par une étoile est alors mesuré par la *magnitude absolue* M_ν , définie par

$$m_\nu - M_\nu = 5 \log d_{pc} - 5 + A_\nu \quad (2.4)$$

à savoir, la magnitude apparente qu'aurait l'étoile si elle se trouvait à une distance de 10 pc, corrigée de l'extinction. Pour le soleil, elle vaut $M_{V,\odot} = 4.83$. Si l'on prend le Soleil comme deuxième étoile, les définitions (2.1) et (2.4) fournissent immédiatement

$$M_\nu - M_{\nu,\odot} = -2.5 \log \frac{L_\nu}{L_{\nu,\odot}} \quad (2.5)$$

On note $M_{\nu,o}$ la magnitude absolue corrigée de l'extinction.

1. L'un des avantages des magnitudes est "l'oubli" des unités de flux ($\text{J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$).

Cependant, connaître la luminosité bolométrique suppose la mesure des flux dans tout le spectre électromagnétique, ce qui n'est pas possible en pratique. Traditionnellement, on applique une *correction bolométrique* au flux mesuré dans la bande V, de la forme

$$M_{bol} = M_V + BC \quad (2.6)$$

où $BC < 0$ par construction. Pour le Soleil, cette correction est très faible (car il émet surtout dans le domaine visible) et vaut $BC_{\odot} = -0.08$. La correction bolométrique est fournie par l'observation (bolomètres, satellites, ballons) mais aussi par la théorie, car toutes les étoiles du ciel ne peuvent pas être observées à toutes les fréquences. La théorie consiste en l'utilisation de modèles d'atmosphères stellaires, la difficulté étant alors de savoir quel modèle utiliser pour une étoile donnée (il faut donc dégager des classes d'étoiles).

Grâce à cette dernière étape, on peut enfin obtenir la luminosité bolométrique d'une étoile

$$L = L_{\odot} 10^{-0.4(M_{bol} - M_{bol, \odot})} , \quad (2.7)$$

connaissant sa magnitude apparente m_V , sa distance d , l'extinction interstellaire A_V et la correction bolométrique BC ...

Indices de couleur et température effective

Nous avons vu que la surface d'une étoile rayonne comme un corps noir et que sa luminosité bolométrique vaut

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (2.8)$$

pour un rayon R et une température de corps noir T_{eff} . Connaissant le rayon et la luminosité bolométrique, il est alors possible de déterminer T_{eff} . L'inconvénient est que le rayon ne peut être mesuré que dans quelques cas et que, sans lui, il reste une indétermination. Ainsi, des étoiles très lumineuses et à grands rayons pourraient avoir la même température effective que des étoiles plus petites et moins lumineuses.

Un moyen photométrique d'obtenir la température effective d'une étoile consiste en l'utilisation des *indices de couleur*. La fonction de Planck $B_{\nu}(T_{eff})$ possède une valeur maximale en $\lambda_{max} = 2.9 \cdot 10^{-3} / T_{eff}$ m, ce qui signifie que le flux est dominé par cette longueur d'onde. C'est ce qui permet de parler de la "couleur" d'un corps noir (et par conséquent d'une étoile). En principe, il suffirait de faire la différence entre deux magnitudes apparentes, obtenues pour deux fréquences différentes. Cette différence est indépendante de la distance et il y aurait une seule courbe de Planck (une seule température) qui passerait par ces deux points. Cette différence est appelée l'indice de couleur et le plus utilisé est

$$(B - V)_o \equiv m_B - m_V = M_B - M_V + (A_B - A_V) \quad (2.9)$$

car l'extinction interstellaire varie peu du jaune au bleu ($A_V \simeq A_B$). On note avec un indice “o” lorsque les indices sont corrigés de l'extinction.

Cette méthode n'est cependant pas utilisée car les étoiles, selon leur phase d'évolution, peuvent avoir un écart à la loi du corps noir (ex, géantes rouges). Nous verrons plus bas que les étoiles s'agencent en cinq *classes de luminosités*. L'usage est alors de faire une sorte d'étalonnage entre l'indice de couleur $B - V$ observé et T_{eff} pour des étoiles de chaque classe pour lesquelles le rayon est également mesuré (donc T_{eff} connu). L'hypothèse (raisonnable) est ensuite qu'à l'intérieur de chaque classe les étoiles suivent la même loi $T_{eff} = F(B - V)$.

Types spectraux et température effective

Le type spectral d'une étoile est déterminé par l'analyse du spectre de ses raies (voir figure 2.1). En effet, les caractéristiques d'une raie en absorption (présence, intensité et forme) fournissent des informations sur:

- (1) **les conditions physiques locales**, telles que la température effective, la pression (gravité) et la luminosité;
- (2) **la composition chimique** de l'atmosphère.

Cette analyse fournit donc un autre moyen d'obtenir la température effective d'une étoile. Actuellement, il y a une bonne entente entre méthodes spectroscopique et photométrique (ce qui n'était pas le cas auparavant...). La difficulté de cette méthode réside dans le fait qu'elle nécessite l'étude détaillée de l'ensemble du spectre de raies.

Il y a ainsi 10 grands types spectraux²

O B A F G K M (R N S)

correspondant à un classement par ordre décroissant de la température effective stellaire³. Par exemple, les étoile O sont bleues avec $25000 < T_{eff} < 65000$ K, les étoile A sont blanches avec $7500 < T_{eff} < 11000$ K, les étoiles G sont jaunes avec $5300 < T_{eff} < 6300$ K, les étoiles M sont rouges avec $2400 < T_{eff} < 3900$ K. Les étoiles de types R, N et S ne sont pas plus froides que celle de type M, mais possèdent des abondances particulières en éléments lourds.

Dix subdivisions supplémentaires (notées de 0 à 9) furent introduites correspondant à des températures intermédiaires (et donc à l'observation de nouveaux éléments chimiques).

A même température effective, un grand rayon correspond à une grande luminosité. Or, plus le rayon d'une étoile est grand et plus sa gravité est faible ($g = GM/R^2$), ce qui diminue la pression atmosphérique. Celle-ci diminuant, les raies d'absorption sont moins élargies. Il y a donc une corrélation directe entre la largeur des raies spectrales d'une étoile et sa classe de luminosité. Par ailleurs, la gravité peut affecter également le degré d'ionisation des éléments chimiques et ainsi modifier les diagnostics spectraux sur la température effective. Par exemple, des

2. Une façon commode pour s'en rappeler: “Oh, be a fine girl/guy, kiss me! (Right now! Smack!)”

3. Historiquement, cela correspond à un classement des spectres du plus simple au plus compliqué.

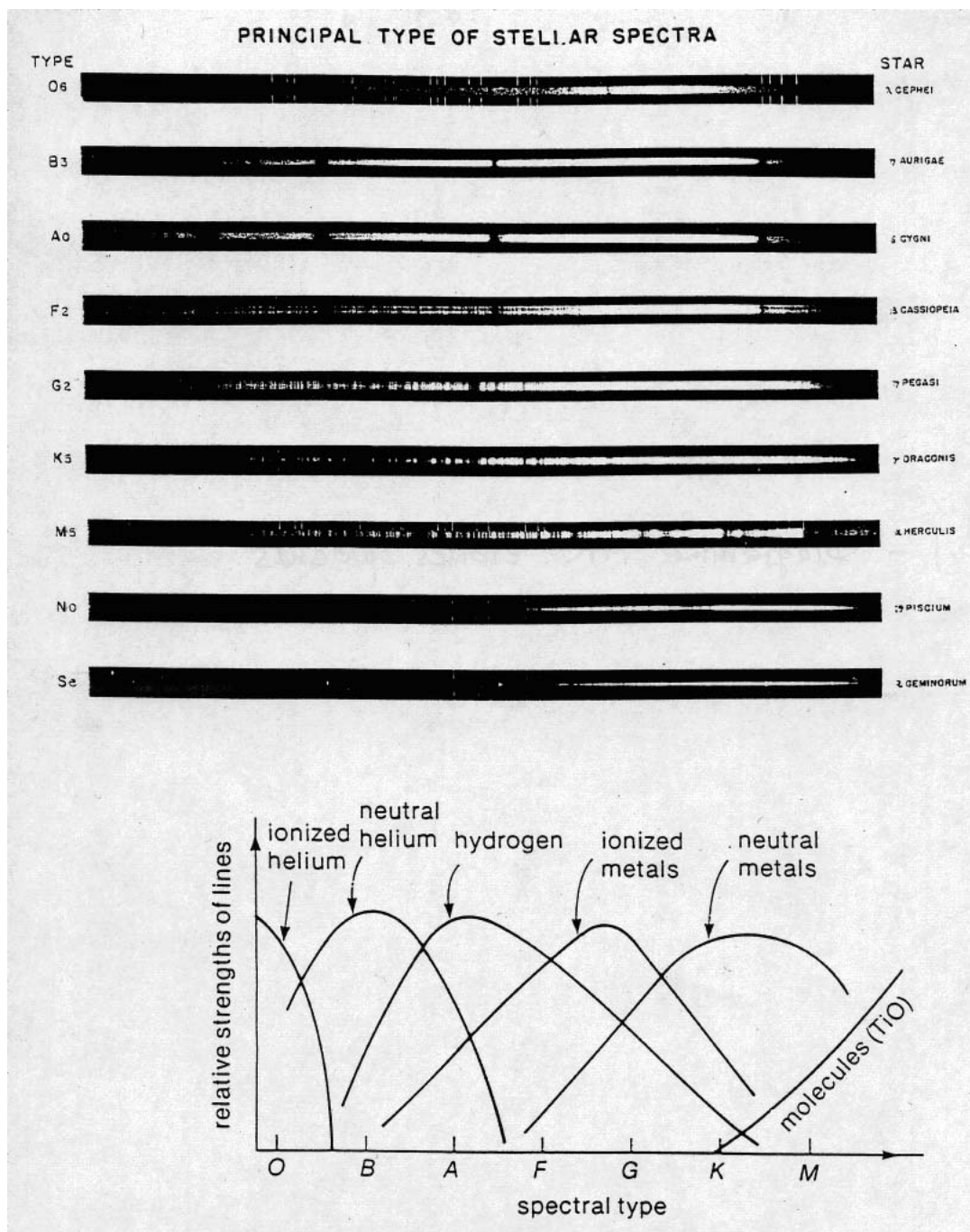


FIG. 2.1 – En haut: principaux types de spectres stellaires. Les bandes sombres correspondent à des raies d'absorption, les brillantes à des raies d'émission. En bas: forces de raies relatives utilisées pour déterminer un type spectral.

étoiles géantes de même type spectral (mêmes degrés d'ionisation et mêmes éléments présents) que des étoiles naines peuvent cependant avoir une température effective plus basse.

En pratique, la classification spectrale permet de remonter à la température effective d'une étoile moyennant la connaissance de sa classe de luminosité. Le Soleil est ainsi une étoile de type G2 V (les classes de luminosité sont notées I,II,...V).

2.1.3 Le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR)

Etabli de façon indépendante par l'astronome danois E. Hertzsprung en 1911 et l'astronome américain H.N. Russell en 1913, ce diagramme permet une classification de toutes les étoiles avec uniquement deux observables. Il y a types de diagrammes: soit un diagramme couleur-magnitude (magnitude visuelle V en fonction de l'indice de couleur $B - V$) soit un diagramme type spectral-magnitude (V en fonction du type spectral).

Ce diagramme est pertinent car chaque observable (photométrique et/ou spectroscopique) est indépendante et reliée à une grandeur physique de l'étoile, à savoir la luminosité et la température effective. Par contre, nous avons vu précédemment que le passage d'un diagramme HR observé à un diagramme HR théorique (luminosité-température) reste délicat...

Diagramme HR des étoiles proches

Comme la distance peut être obtenue facilement pour les étoiles proches, il est assez facile d'obtenir un diagramme HR. La plupart des étoiles se trouvent sur une courbe, appelée *séquence principale* (voir figure 2.2. Cela se comprend théoriquement par le fait que les étoiles y passent 90% de leur durée de vie, en train de consommer de l'hydrogène (voir cours de structure stellaire).

On observe également cinq classes de luminosité distinctes (mais aux frontières floues), regroupant des étoiles de moins en moins brillantes intrinsèquement. Ces classes sont les suivantes:

I: les Supergéantes

II: les Géantes lumineuses

III: les Géantes

IV: les Sous-Géantes

V: les Naines (étoiles sur la Séquence Principale)

Deux autres classes furent ensuite rajoutées: les sous-naines (VI) et les naines blanches (VII). Celles-ci constituent de petits astres faiblement lumineux qui, d'après la théorie de l'évolution stellaire, seraient la phase ultime de certaines étoiles. Mais la masse maximale observée de ces astres ne dépasse pas une masse solaire. Cela signifie donc soit que les étoiles ont perdu beaucoup de leur masse lors de leur évolution, soit qu'il existe d'autres formes de stades ultimes pour les étoiles très massives.

Il apparaît que les étoiles observées ont des paramètres physiques ayant une

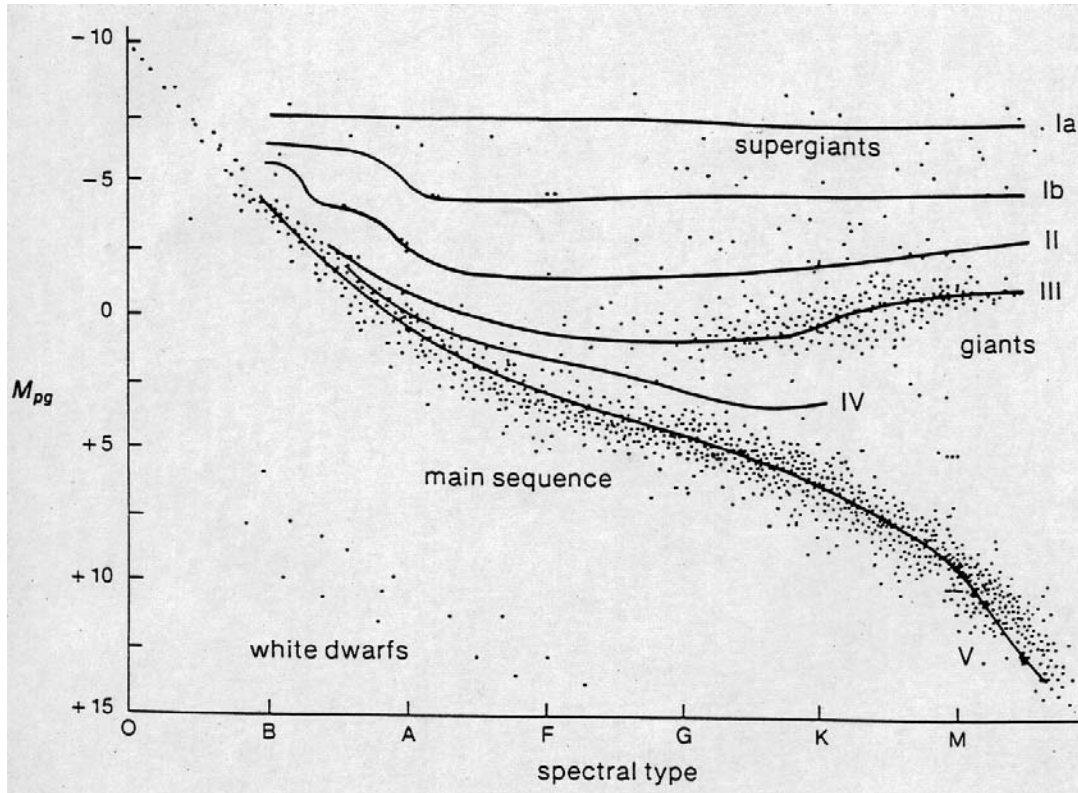


FIG. 2.2 – Diagramme de Hertzsprung-Russel (HR) pour les étoiles situées dans le voisinage du Soleil. Les lignes correspondent aux différentes classes de luminosité. Située sous la Séquence Principale se trouve la région des naines blanches. Ce diagramme rassemble des informations photométriques (magnitude absolue M) et spectroscopiques (types spectraux).

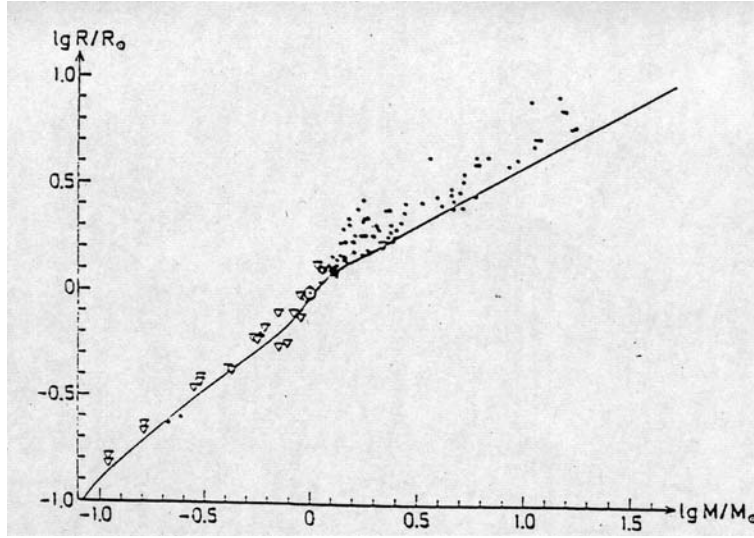


FIG. 2.3 – Relation Masse-Rayon pour les étoiles de la Séquence Principale.

grande variation

$$\begin{aligned}
 0.08 &< \frac{M}{M_{\odot}} < 60 \\
 0.02 &< \frac{R}{R_{\odot}} < 800 \\
 5 \cdot 10^{-3} &< \frac{L}{L_{\odot}} < 8 \cdot 10^5 \\
 2000 \text{ K} &< T_{eff} < 150000 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Cette grande dispersion des propriétés stellaires se comprend dans une perspective évolutive. Ainsi, la vie d'une étoile serait une succession de phases d'équilibre où elle consomme son combustible et de phases hors équilibre où elle se contracte jusqu'à trouver un nouveau combustible.

L'existence de masses limites se comprend aisément. Pour $M < 0.08 M_{\odot}$, l'étoile n'est pas assez massive pour produire une température centrale suffisante pour déclencher des réactions thermonucléaires. De tels astres seront donc des Jupiter (dont la masse est un millième la masse du Soleil). Pour $M > 60 M_{\odot}$, l'étoile devient rapidement tellement chaude que sa pression de radiation domine la gravité (limite d'Eddington), empêchant ainsi la formation d'une étoile plus massive.

Relations Masse-Luminosité, Masse-Rayon

A partir du diagramme HR, on peut voir qu'il existe une relation de proportionnalité entre ces diverses grandeurs pour les étoiles de la Séquence Principale (figures 2.3 et 2.4). Ces relations sont de la forme

$$\begin{aligned}
 L &\propto M^{\alpha} \\
 R &\propto M^{\beta}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\alpha = 3.3$ pour des étoiles de masse comprise entre 0.1 et $10 M_{\odot}$ et $\beta = 0.8$ pour $M < 1.1 M_{\odot}$, $\beta = 0.57$ pour des étoiles plus massives. L'existence d'une relation

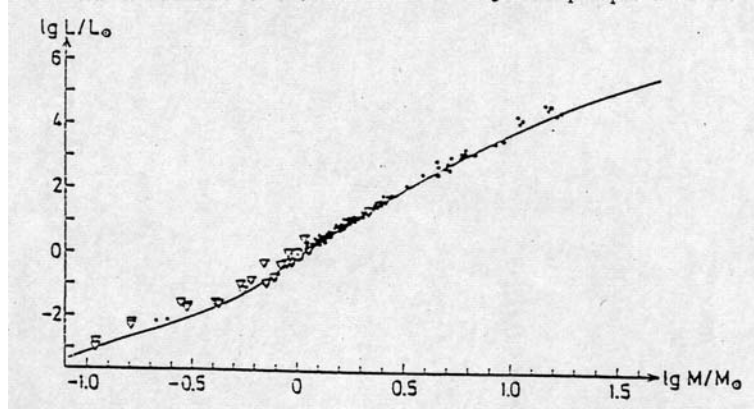


FIG. 2.4 – *Relation Masse-Luminosité pour les étoiles de la Séquence Principale.*

masse-luminosité pour les étoiles de la Séquence Principale montre que les étoiles géantes sont sur-lumineuses par rapport à leur masse, tandis que les naines blanches sont sous-lumineuses.

Pour une étoile émettant comme un corps noir, on obtient une nouvelle relation

$$L \propto T_{eff}^{\frac{4}{1-2\beta/\alpha}}, \quad (2.11)$$

c'est à dire une luminosité croissante pour une température (masse) croissante. Cette dernière relation n'est qu'une représentation de la Séquence Principale et n'explique donc rien. Ces relations observationnelles, qui furent évidemment établies pour les étoiles proches, constituent cependant un test critique des modèles d'évolution stellaire.

Si l'énergie qui alimente une étoile sur la Séquence Principale provient de son énergie de masse ($E \propto Mc^2$), alors on peut estimer de la relation masse-luminosité la durée de vie d'une étoile, $t_{vie} \propto M^{-2.3}$. La vie d'une étoile est donc à l'image d'une "peau de chagrin": soit elle vit longtemps mais sans grand éclat (masse petite), soit elle brille intensément mais pour une courte durée (grande masse).

Diagramme HR des amas d'étoiles

L'ensemble des étoiles proches ne constituant pas un groupe homogène (âge, masse, composition chimique initiale différents), une interprétation plus précise de ce diagramme est difficile.

L'idéal serait donc d'avoir un groupe d'étoiles ayant approximativement le même âge (donc avec la même composition chimique initiale) et situées à la même distance⁴, afin de ne discuter que de l'influence de la masse. Ces groupements ou amas

4. Avec cette hypothèse, on peut remplacer la magnitude absolue par la magnitude apparente. Ensuite, puisque les étoiles restent longtemps sur la SP, il est possible de faire coïncider la SP d'un amas avec celle établie pour les étoiles proches. Ceci est fait en déplaçant verticalement le diagramme HR de l'amas, donc en ajoutant une constante (la même pour toutes les étoiles de l'amas) aux magnitudes apparentes observées. Cette translation du diagramme HR offre donc un moyen indirect de mesurer la distance de l'amas.

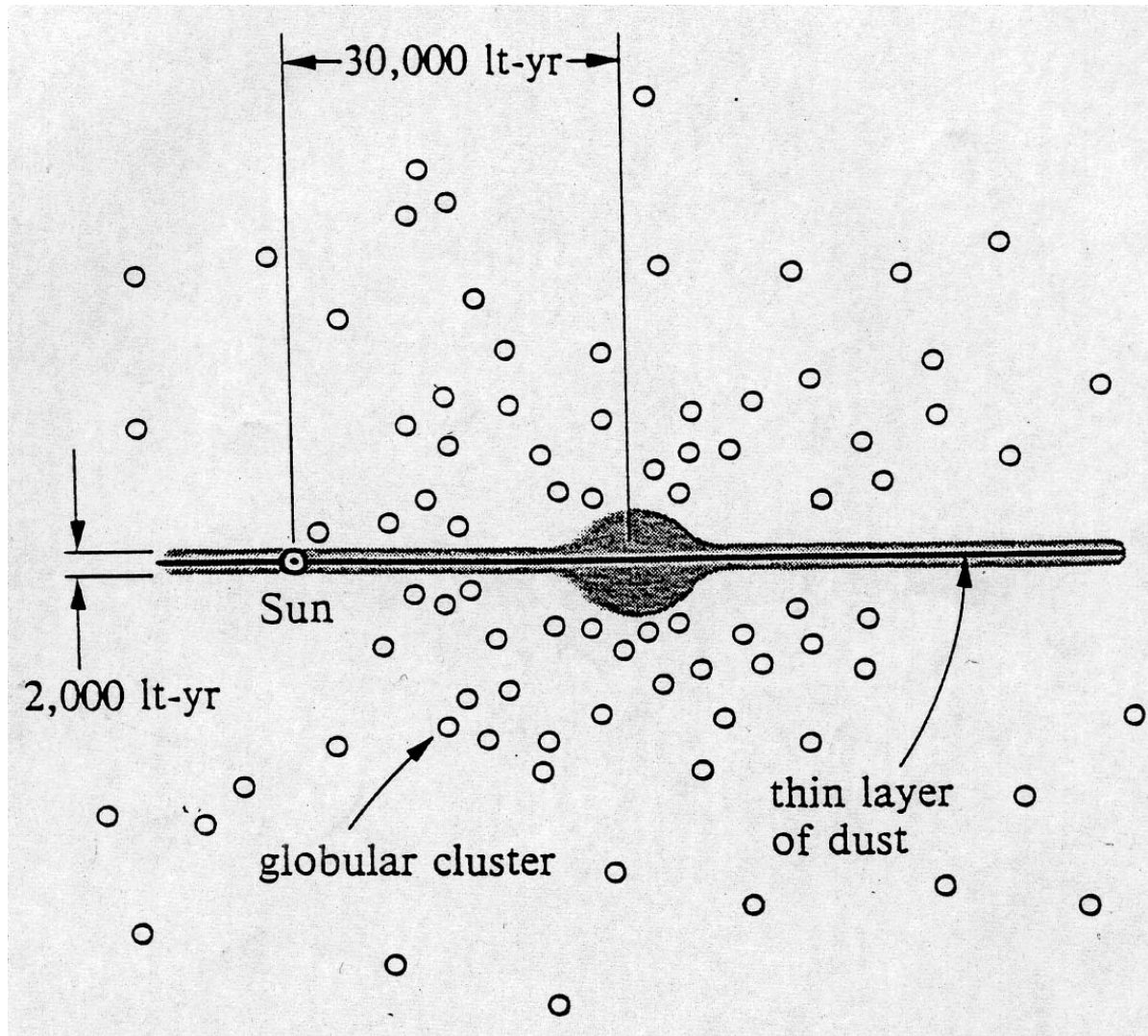


FIG. 2.5 – *Paradigme actuel de la Galaxie. Notre galaxie, de type spirale, serait constituée de trois composantes: un mince disque d'étoiles (Population I), de gaz et de poussières; un bulbe central et un halo constitué de vieilles étoiles (dites de Population II). Les amas globulaires se trouvent dans ce halo de forme quasi-sphérique. Leurs distances peuvent être mesurées précisément grâce à une relation période-luminosité de certaines étoiles variables (RR Lyrae) qui s'y trouvent. Une valeur typique de cette distance est 30000 années lumières.*

d'étoiles existent et sont de deux sortes: les *amas ouverts* situés dans le disque galactique et constitués d'une centaine d'étoile, et les *amas globulaires* situés dans le halo galactique et formés d'environ 10^5 étoiles (voir figure 2.5).

Le diagramme HR d'un amas est compact, ce qui montre que la dispersion dépend essentiellement d'un paramètre, la masse. Mais ces diagrammes étant différents d'un amas à l'autre, cela signifie que la masse n'est pas le seul facteur important.

En particulier, certains **amas galactiques** ont des supergéantes alors que d'autres n'en ont pas. Ce fait trouve une explication dans la théorie de l'évolution stellaire, où ces étoiles sont dans une phase évoluée de leur vie. Ainsi, les calculs d'évolution stellaire permettent de déterminer l'âge de l'amas. Plus celui-ci est vieux et moins il y aura d'étoiles brillantes bleues (et plus il y aura de naines blanches, stade final de l'évolution stellaire): le coude du diagramme HR se déplace vers les étoiles froides (voir figure 2.8).

En suivant ce raisonnement, il apparaît que les **amas globulaires** sont tous très vieux (figure 2.9). Cependant, l'analyse spectroscopique montre que les éléments chimiques plus lourds que H ou H_e y sont environ dix fois moins abondants que dans les amas galactiques. La théorie de l'évolution stellaire offre également une réponse. Les étoiles évoluent par consommation de leur combustible nucléaire, c'est à dire qu'elles agissent comme des convertisseurs de matière: à partir d'éléments légers, elles fabriquent des éléments lourds qu'elles dispersent dans le milieu interstellaire. Il suffit donc d'imaginer un scénario où les étoiles des amas globulaires se seraient formées à partir de gaz interstellaire pauvre en éléments lourds⁵. Ceci est cohérent avec le grand âge de ces amas: leurs étoiles formeraient les premières générations, tandis que celles des amas galactiques seraient de générations ultérieures.

On désigne par *population I* les étoiles riches en éléments lourds (étoiles du disque galactique), par *population II* les étoiles pauvres en éléments lourds (étoiles du halo). Un fait reste inexpliqué: les étoiles de la population II correspondent à des étoiles de faible masse.

5. Il faut également faire l'hypothèse que la composition chimique de l'atmosphère d'une étoile reflète encore sa composition chimique initiale, autrement dit qu'il n'y a pas eu de grand brassage de la matière stellaire lors de son évolution. Cette hypothèse est cohérente avec celle d'une évolution quasi-statique. Les étoiles de type spectral S font cependant exception.



FIG. 2.6 – Amas ouvert (galactique) des Pleïades ($M45$): situé à $0.38 \cdot 10^3$ années-lumières (al), d'un âge estimé à 100 millions d'années et ayant une magnitude absolue $M_V = 1.6$ mag. Si 9 étoiles sont visibles à l'oeil nu, 500 sont en fait détectées.

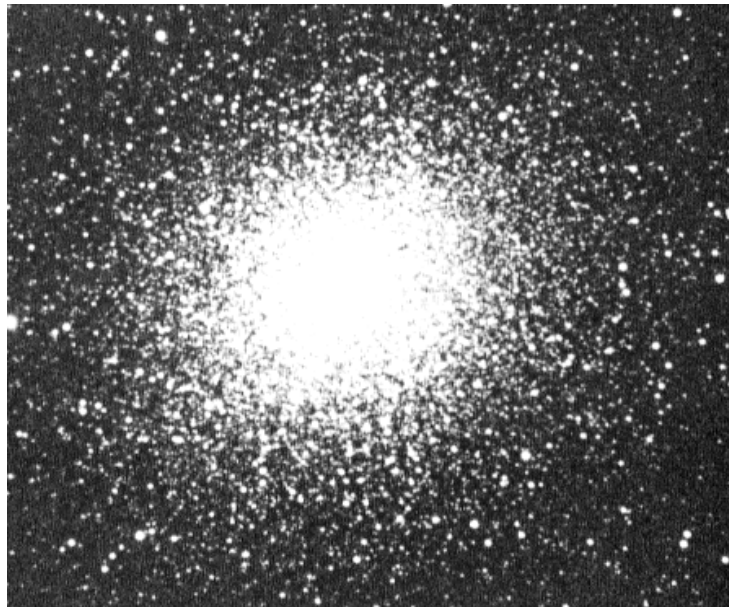


FIG. 2.7 – Amas globulaire d'Hercules ($M13$): situé à une distance de $22.8 \cdot 10^3$ années-lumières (al), d'un âge estimé à 24 milliards d'années et ayant une magnitude absolue $M_V = 5.8$ mag. On estime qu'il est constitué d'environ 10^5 étoiles.

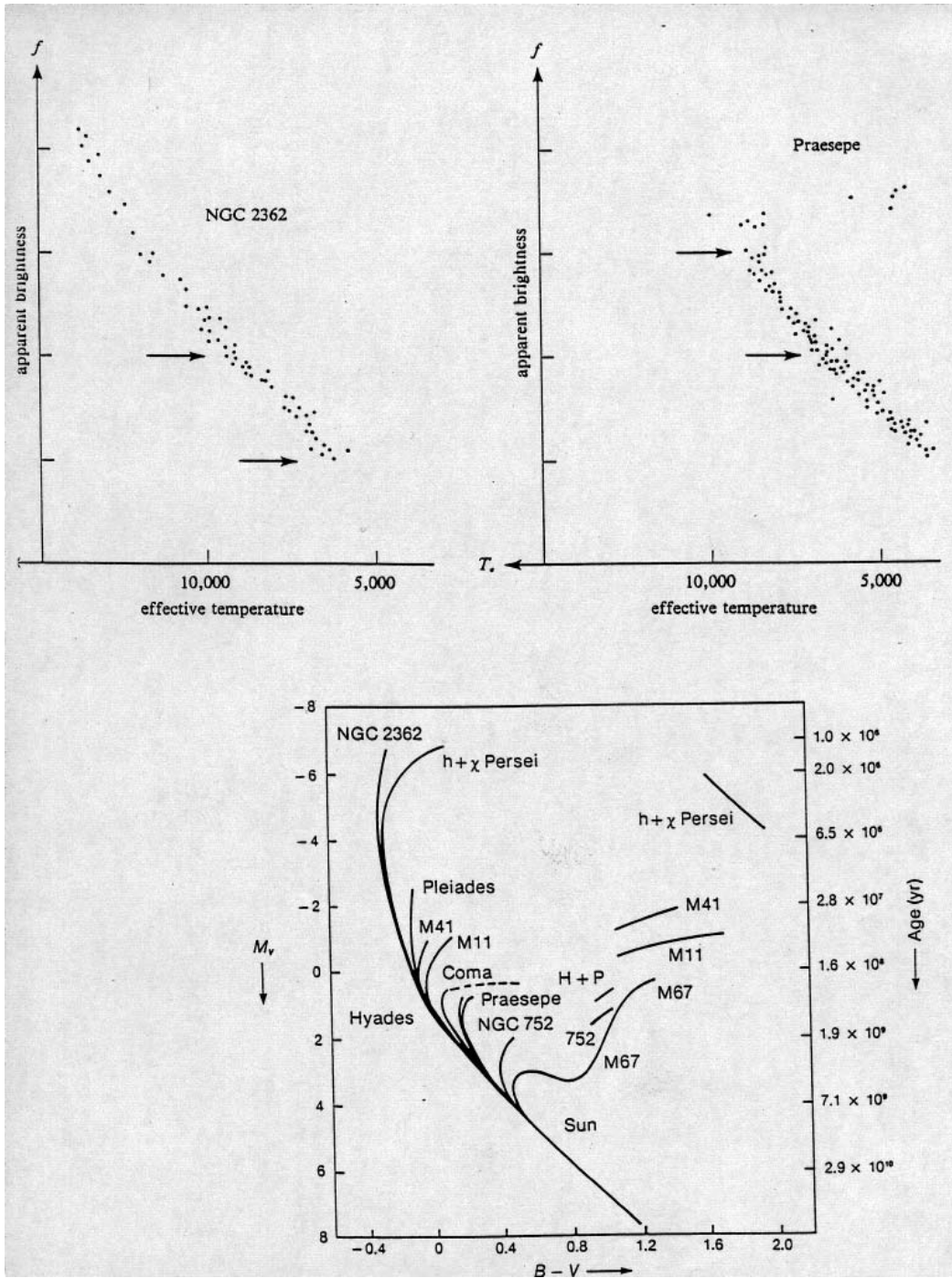


FIG. 2.8 – Diagrammes HR de divers amas ouverts (galactiques). Les flèches indiquent des étoiles (Population I) situées à la même position sur les deux diagrammes. L'existence d'étoiles plus chaudes (donc plus massives, donc plus jeunes) dans l'amas de gauche montre que celui-ci est plus jeune que celui de droite. Ainsi, la position de la fin (ou coude) de la Séquence Principale permet de dater un amas.

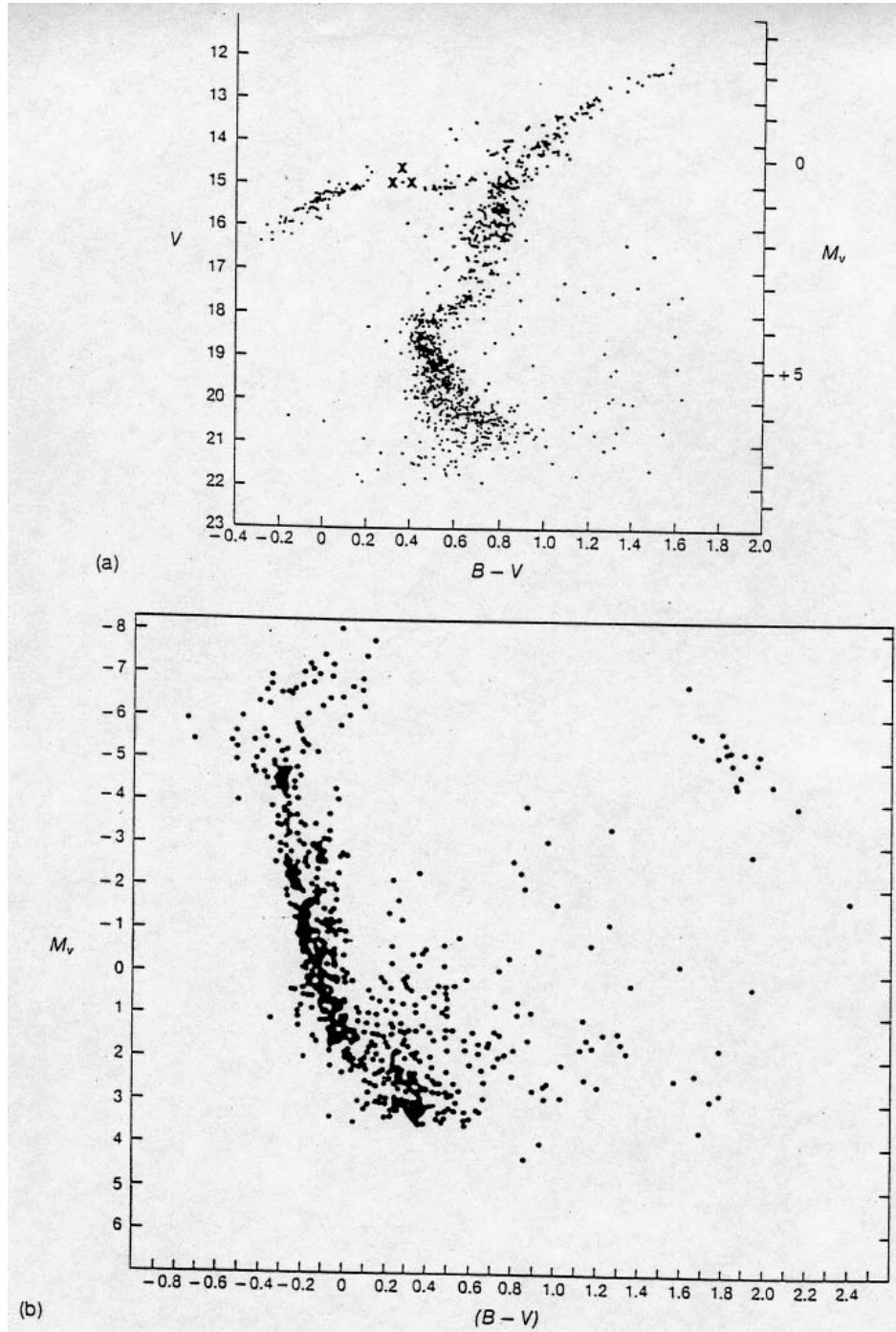


FIG. 2.9 – Diagrammes HR (couleur-magnitude) d'un amas globulaire (a) et galactique (b) typiques. En (a), l'amas M5, situé dans le Serpent. Les croix désignent des étoiles variables RR-Lyrae. En (b), l'amas galactique h et χ Persei.

2.2 Formation stellaire

2.2.1 Le milieu interstellaire

Un milieu hiérarchisé et à plusieurs composantes

Il a très vite été reconnu qu'il y avait de la matière entre les étoiles et ceci par plusieurs moyens. Des images directes (photométrie) montrent des nuages assombrissant la lumière d'étoiles qui y sont enfouies. Par la spectroscopie, il est ensuite possible d'identifier les éléments chimiques composant la matière interstellaire ainsi que leurs propriétés (densité, température, conditions d'ionisation, vitesse projetée). Enfin, il existe d'autres moyens plus indirects, comme par exemple l'utilisation de la distribution de vitesse des étoiles dans la Galaxie.

L'ensemble des moyens observationnels a permis de montrer que le milieu interstellaire pouvait se décomposer en trois phases:

Nuages moléculaires Ces nuages sont très hiérarchisés et inhomogènes, allant de tailles de l'ordre de 100 pc, une masse de $10^5 M_\odot$, une densité $n_H \sim 10^6 \text{ m}^{-3}$ et une température $T \sim 100 \text{ K}$ (nuages moléculaires géants), à des coeurs moléculaires plus denses d'une taille de 0.1 pc, de quelques $M_\odot$ seulement et d'une température $T \sim 10 - 30 \text{ K}$ (figures 2.10, 2.11).

Ces nuages sont constitués principalement d'atomes d'hydrogène, 10% d'hélium, de molécules (H_2 , CO , NH_3) mais également de grains de poussières (contribuant pour 1% de la masse). Ces grains ont des rayons de l'ordre de 10^{-7} m et une densité moyenne de 10^{-6} m^{-3} . Ces nuages sont situés autour du plan galactique.

Gaz inter-nuage Cette composante du milieu interstellaire est composée d'atomes d'hydrogène partiellement ionisés avec $n_H \sim 10^5 \text{ m}^{-3}$ et $T \sim 10^4 \text{ K}$. Elle est observée dans la raie interdite à 21 cm de l'hydrogène.

Ce gaz chaud et dilué est chauffé par rayons cosmiques et rayons X et remplit l'espace inter nuages.

Nébuleuses chaudes Ces nébuleuses sont constituées de gaz coronal, c'est à dire principalement d'atomes H complètement ionisé, de densités typiques $n = 10^4 - 10^6 \text{ m}^{-3}$ et de température $T \simeq 10^6 \text{ K}$.

Ces régions d'émission diffuse sont souvent dues à la présence d'une onde de choc (régions HII -figure 2.12-, nébuleuses planétaires, restes de supernova).

Lorsque cela est possible, l'effet Zeeman permet de mesurer le champ magnétique local. Dans les zones peu denses du milieu interstellaire, on mesure ainsi $B \sim 1 - 10 \mu\text{G}$ ($1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla}$). L'énergie magnétique semble être à équipartition avec l'énergie thermique de la matière. La mesure du champ magnétique dans les coeurs moléculaires denses n'est pas encore réalisée.



FIG. 2.10 – Nébuleuse de la Tête de Cheval (Barnard 33) dans la constellation d’Orion, située à $1.6 \cdot 10^3$ al. La partie sombre indique la présence de poussières absorbant la lumière de l’arrière plan. En bas à gauche se trouve une nébuleuse par réflexion (NGC 2023). En rouge, l’émission diffuse en H_α .

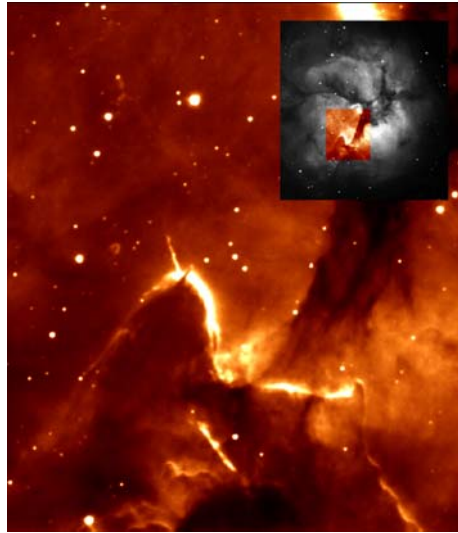


FIG. 2.11 – Nébuleuse de la Trifide (M20) située dans le Sagittaire, à une distance de $5.2 \cdot 10^3$ al et d’une magnitude absolue $M_V = 9.0$ mag. Nébuleuse en émission et réflexion. L’étoile centrale, ADS 10991, est en fait un système triple dont la composante la plus massive est une étoile de type O5. Les “cornes” que l’on observe sont des jets de matière issus de la région comprimée par la pression de radiation (zone brillante): ils sont les traceurs d’étoiles en formation dans cette zone.

Les sites de formation stellaire

Nous avons vu que dans le diagramme HR se trouvent présentes des étoiles vieilles et des étoiles jeunes. Cela signifie que le processus de formation stellaire est continu dans le temps et que l'on doit pouvoir identifier certains objets comme étant des proto-étoiles.

Les étoiles étant constituées de gaz, elles doivent donc se former à partir du milieu interstellaire. Autrement dit, il doit y avoir une condensation de matière suffisante pour passer d'une densité atomique typique de 10^6 m^{-3} à la densité stellaire moyenne 10^{30} m^{-3} .

Mais à quoi reconnaît-on une proto-étoile? Puisqu'elle est obtenue par l'effondrement d'un nuage moléculaire sur lui-même, on s'attend à un objet de rayon plus grand que le rayon initial stellaire (donc à une plus grande luminosité). Lorsque la proto-étoile devient suffisamment dense, elle va émettre comme un corps noir, sa puissance provenant de l'énergie gravitationnelle emmagasinée. On peut donc écrire

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \propto \frac{d}{dt} \left(\frac{GM^2}{R} \right) \quad (2.12)$$

ce qui permet d'estimer un temps caractéristique de contraction

$$t_c \sim \frac{GM^2/R}{4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4} \quad (2.13)$$

Cette expression n'est valable que si l'on peut négliger d'autres formes d'énergie, et en particulier l'énergie de rotation. La condition de validité peut s'écrire $t_c \ll t_{dyn}$, où t_{dyn} est le temps caractéristique de rotation keplerienne en un rayon R . En égalisant ces deux temps on trouve

$$R_{max} \simeq 500 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{5/9} \left(\frac{T_{eff}}{4000 \text{ K}} \right)^{-8/9} R_\odot \quad (2.14)$$

le rayon maximal d'une proto-étoile (objet opaque en contraction).

En fait, on observe bien des astres lumineux situés dans les cœurs denses moléculaires, voire complètement enfouis, avec une extinction $A_V \sim 50 - 100 \text{ mag}$ (figure 2.13). Le spectre de ces étoiles, appelées T-Tauri, montre des raies du Lithium. Cet élément chimique étant très rapidement détruit par les réaction nucléaires, il est naturel de penser qu'on observe bien là des proto-étoiles. L'autre argument en faveur de l'extrême jeunesse des T-Tauri est leur position dans le diagramme HR: elles sont toutes situées au-dessus de la Séquence Principale (figure 2.14). Elles vont donc rejoindre celle-ci en suivant une phase de contraction (baisse de la luminosité).

La rétroaction des étoiles sur le milieu interstellaire

Cette rétroaction se fait par trois processus distincts: photoionisation, vents stellaires et supernovae.

Les étoiles massives, de type spectral O B, sont souvent vues en associations (Pleiades). En fait, le temps caractéristique d'effondrement est tellement cours que la

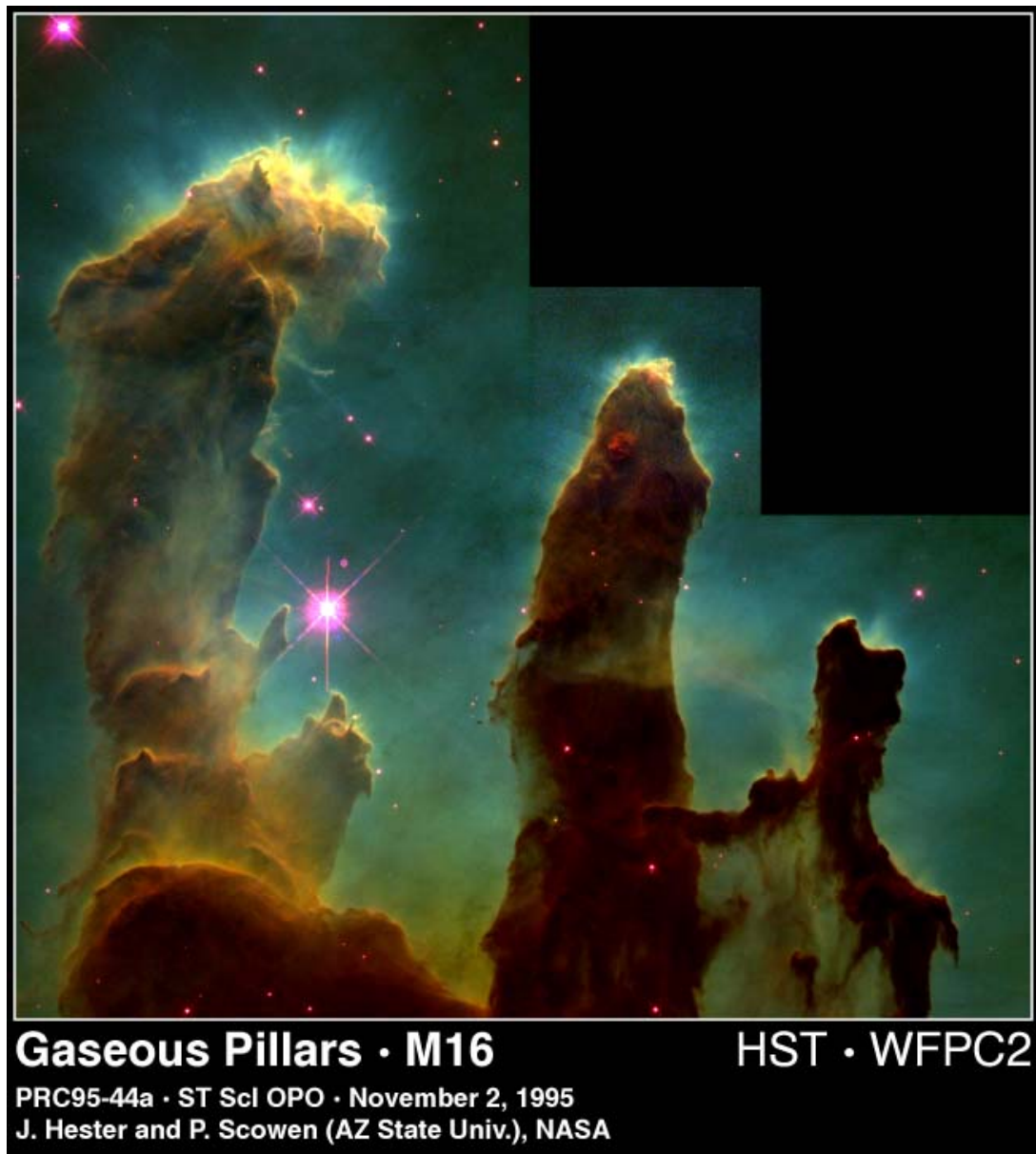


FIG. 2.12 – Nébuleuse de l'Aigle (M16), située dans un amas ouvert dans la constellation du Serpent, à $7 \cdot 10^3$ al et d'une magnitude absolue $M_V = 6.4$ mag. Son âge est estimé à $5.5 \cdot 10^6$ ans. C'est une nébuleuse en émission (molécule H_2 , due à de la photoévaporation par l'UV émis par des étoiles de type spectral O6. En rouge: émission du soufre SII (S^+), en vert hydrogène HII (H^+) et en bleu oxygène OIII (O^{2+}).

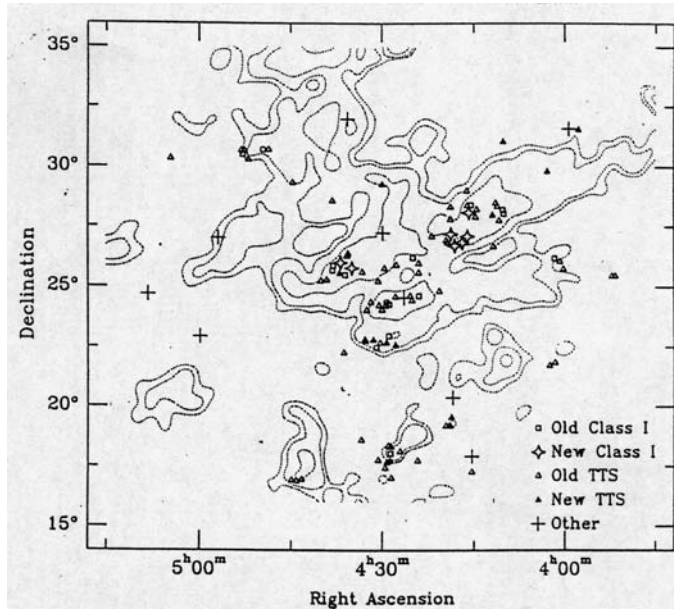


FIG. 2.13 – Image d’une région du Taureau. Les contours désignent les intensités mesurées en radio de l’émission de la molécule CO. Ils montrent ainsi la concentration de matière sous forme moléculaire. Les symboles désignent de jeunes étoiles en formation de faible masse (les T-Tauri). On remarque que toutes ces proto-étoiles naissent au coeur même des nuages.

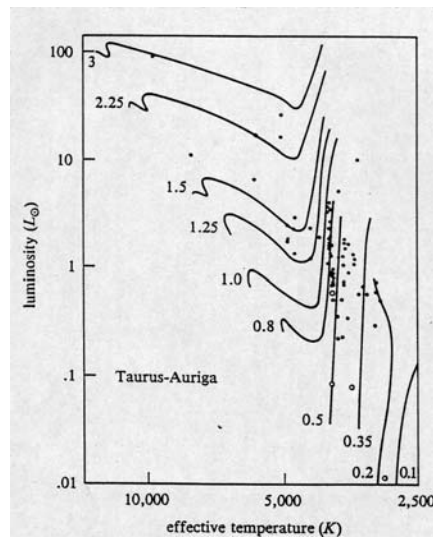


FIG. 2.14 – Diagramme HR d’étoiles du type T-Tauri, observées dans les nuages sombres du Taureau. Ces proto-étoiles sont systématiquement situées en haut (plus lumineuses) et à droite (plus rouges) de la Séquence Principale. Les courbes désignent des trajets évolutifs, calculés en supposant une contraction quasi-statique de la proto-étoile, en fonction de sa masse (en $M_{\odot}$).

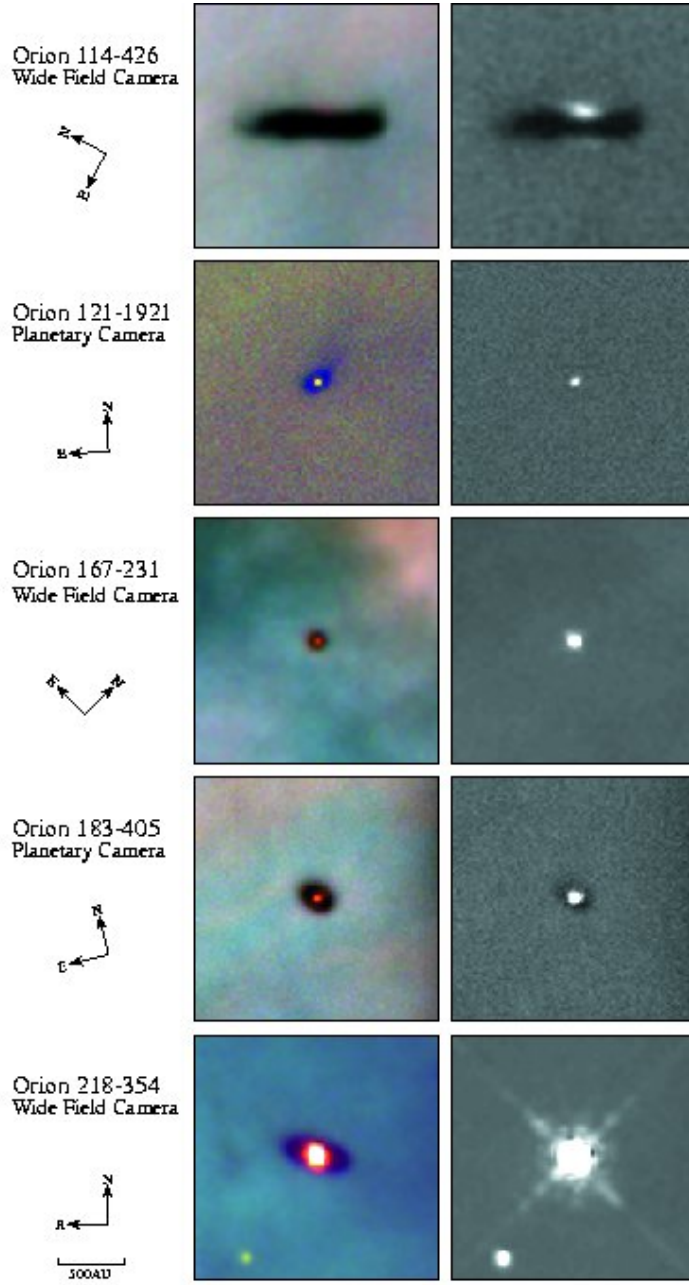


Fig. 1. - Five of the six dark silhouettes in the Orion Nebula. The left panels show emission line composites for each object, with blue representing [OIII], green HII, and red [NII]. These images show the silhouetted disk most clearly. The relative intensity scalings are arbitrary. The right panels show the F547M continuum image for each object, showing the central star most clearly, or in the case of 114-426, the polar reflection nebulae. Each panel covers 4.1×4.1 arcsec, and the orientation of the image is shown in each case.

FIG. 2.15 – *Premières images de disques circumstellaires vus par absorption (situés devant une région HII) dans la nébuleuse d'Orion. La taille caractéristique de ces disques est de quelques centaines d'unités astronomiques. Au centre, suivant l'inclinaison du disque, on distingue la protoétoile (T-Tauri classique, qui donnera lieu à une étoile de faible masse).*

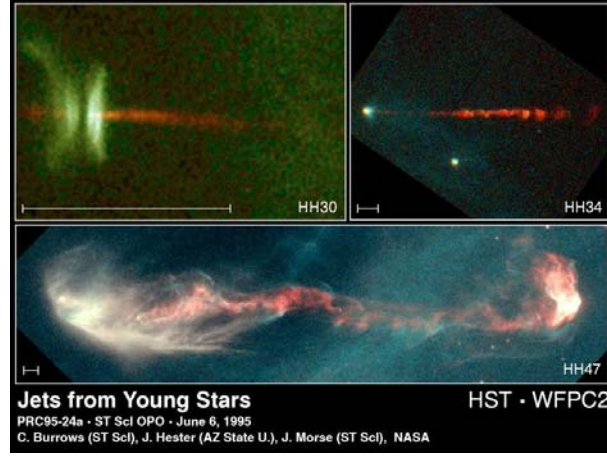


FIG. 2.16 – Images (émission dans le domaine visible) de trois jets issus de jeunes étoiles en formation (protoétoiles), encore enfouies dans leur cocon. Pour HH30, on voit clairement le disque circumstellaire par la tranche. Pour HH47, la protoétoile est située à gauche. Les vitesses caractéristiques de ces jets sont de l'ordre de 300 km/s. La production de tels jets met très probablement en jeu l'existence d'un champ magnétique à grande échelle, soit à partir du disque seul, soit à partir d'une interaction magnétosphérique entre le disque et la protoétoile.

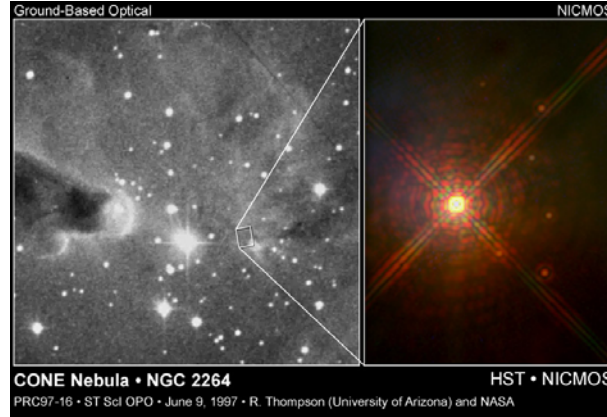


FIG. 2.17 – Un exemple possible de formation stellaire induite dans la nébuleuse du cône (NGC 2264), située à $2.5 \cdot 10^3$ al dans la constellation du Monoceros. À gauche, une image en lumière visible, montrant de l'obscurité due à du gaz et des poussières. À droite, un détail observé par Hubble en infrarouge, montrant une étoile massive (donc jeune) entourée de six étoiles de faible masse. Cette observation suggère que la formation de ces étoiles a pu être induite par l'étoile massive.

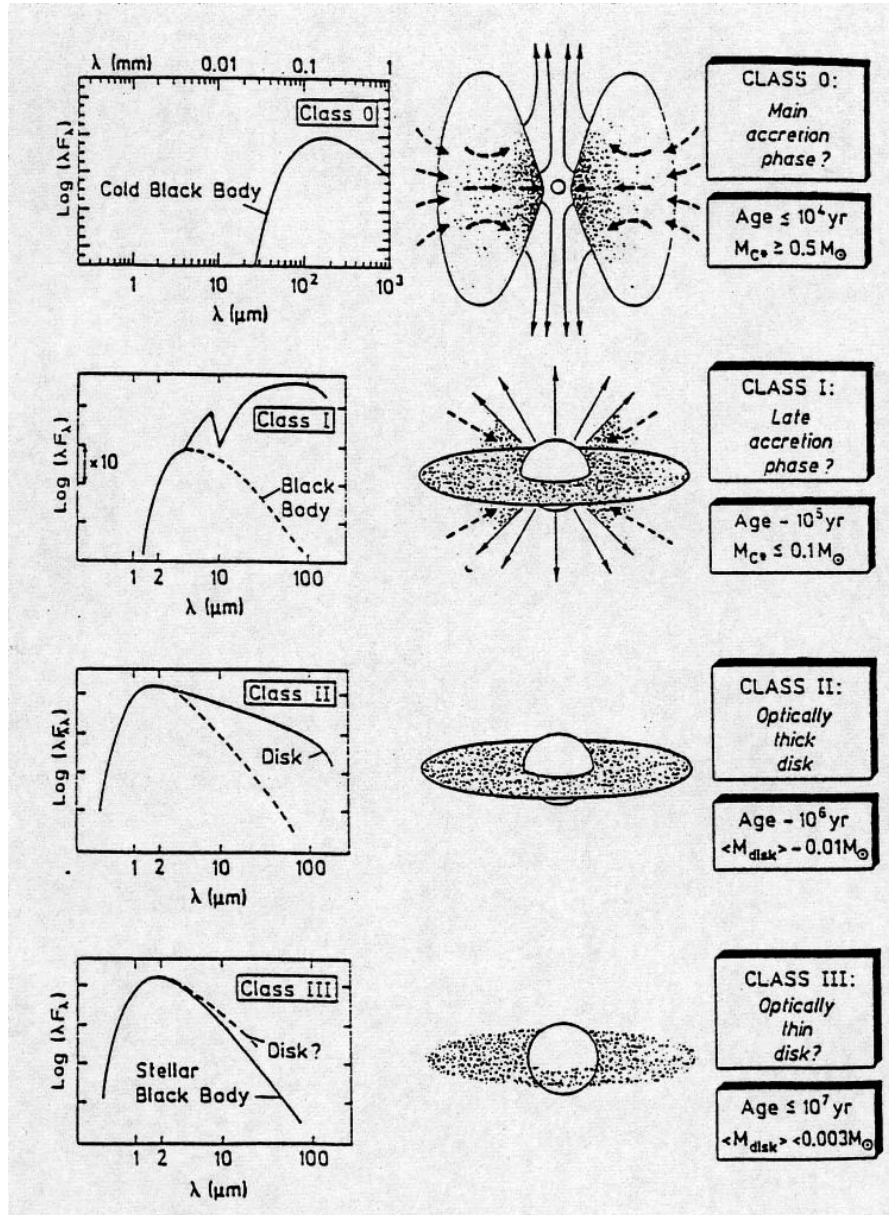


FIG. 2.18 – Paradigme actuel de la formation des étoiles de faible masse ($M < 3 M_{\odot}$). Les objets très jeunes (classe 0) sont complètement enfouis (ils ne sont visibles que dans le domaine millimétrique et X) et donnent lieu à des jets optiques et flots moléculaires très puissants. Les objets de classe I sont un peu moins enfouis (visibles en IR et en X) et ont des jets moins puissants. Les objets de classe II sont visibles dans tout le domaine électromagnétique et correspondent aux étoiles T-Tauri dites classiques: ils ont encore des signatures d'éjection (raies) ainsi que d'accrétion (disque). Enfin, les objets de classe III, les T-Tauri dites "nues" ou de faible émission, ne possèdent plus aucune indication détectable d'accrétion ou d'éjection.

protoétoile atteint très rapidement la température suffisante pour initier les réactions nucléaires. Le rayonnement stellaire ionise alors la matière environnante (ce qui a pour effet d'augmenter sa pression interne) et exerce une pression de radiation. Pour se refroidir, le gaz ionisé tend alors à se diluer, avec une vitesse atteignant 10 km s^{-1} . La cavité ainsi créée est connue sous le nom de région HII. Il faut noter que cette pression peut contribuer à l'effondrement gravitationnel de coeurs denses voisins, ce qui expliquerait la présence d'étoiles massives en associations.

Ces mêmes étoiles, pendant leur phase sur la Séquence Principale, émettent d'intenses vents stellaires ($v \sim 2000 \text{ km s}^{-1}$ et un flux de masse $\dot{M} \sim 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$). Ces vents agissent comme un piston et forment des fronts de chocs qui compriment et ionisent le milieu interstellaire (de densité typique $n \sim 10^8 \text{ m}^{-3}$).

Enfin, les plus massives de ces étoiles subissent une phase extrêmement violente, où elles éjectent presque la moitié de leur masse à des vitesses très rapides ($v \sim 1 - 6000 \text{ km s}^{-1}$). Ce sont les supernovae, explosions fantastiques où non seulement une quantité énorme d'énergie est libérée ($E \sim 10^{42} - 10^{44} \text{ J}$), mais où également l'étoile enrichit le milieu interstellaire (de densité typique $n \sim 10^6 \text{ m}^{-3}$) en éléments lourds. Le passage du front de choc dans un nuage peut également induire son effondrement.

Les étoiles de faible masse mettent plus de temps à atteindre la température d'ignition nucléaire et ont une luminosité bien plus faible. En conséquence, la matière en effondrement a le temps de s'organiser en un disque aplati, en rotation quasi-keplerienne autour de la proto-étoile (T Tauri). La formation de ce disque est due à l'existence d'un moment cinétique non nul du coeur dense. Lors de son effondrement, la conservation du moment cinétique produit une force centrifuge qui va compenser l'attraction gravitationnelle de la proto-étoile (barrière centrifuge). Ces étoiles jeunes, munies de leurs disques, sont alors la source de jets puissants ($v \simeq 300 \text{ km s}^{-1}$, pour un flux de masse $\dot{M} \sim 10^{-8} - 10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$) et collimatés (bipolaires). Ces jets déposent matière et énergie dans le milieu interstellaire, à des distances de l'ordre du parsec de l'étoile.

2.2.2 Le théorème du Viriel

Ce théorème décrit une relation de conservation entre diverses formes macroscopiques de l'énergie d'un système. Ses applications sont nombreuses, mais il est particulièrement utile pour connaître la répartition de l'énergie lors d'un équilibre. Il fournit également une base d'argumentation simple sur la stabilité d'un équilibre.

Il y a plusieurs façons de démontrer le Viriel mais l'approche fluide est choisie ici. On écrit la conservation de l'impulsion pour une particule fluide de densité ρ

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{f} \quad (2.15)$$

où P est la pression du gaz et $\vec{f}$ est la somme des forces appliquées (en pratique, forces gravitationnelle et magnétique). Le Viriel est obtenu en formant le produit scalaire de cette équation avec le vecteur position $\vec{r}$ et en intégrant sur tout le volume

$\mathcal{V}$ contenant la totalité de la masse considérée ($M = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$). Sachant que

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - v^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \rho \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathcal{V}} r^2 dm - 2 \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \frac{\rho v^2}{2} \\ &\equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T \end{aligned}$$

où I est le moment d'inertie associé à la masse M et T est son énergie cinétique (noter que l'on a supposé $dM/dt = 0$).

Le terme de pression donne, en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} P &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot P \vec{r} - \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} P \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \\ &= \int_{\Sigma} P \vec{r} \cdot d\vec{A} - 3 \int_{\mathcal{V}} P d\mathcal{V} \end{aligned}$$

où Σ est la surface fermée englobant le volume $\mathcal{V}$. Pour un gaz parfait non dégénéré $dP = (\gamma - 1)d\epsilon$, où ϵ est l'énergie interne volumique et γ l'indice adiabatique du gaz. On peut donc écrire⁶

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} P \equiv -3(\gamma - 1)U + \int_{\Sigma} P \vec{r} \cdot d\vec{A}$$

où $U = \int_{\mathcal{V}} \epsilon d\mathcal{V}$ est l'énergie interne totale.

La densité de force gravitationnelle exercée par l'ensemble du volume vaut

$$\vec{f}_g(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}' G \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.16)$$

L'intégrale sur le volume du produit scalaire s'écrit

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{f}_g = -G \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} d\mathcal{V}' \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

De part la nature de la force gravitationnelle, cette intégrale doit donner le même résultat si on échange les primes. On peut alors faire l'astuce suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{f}_g &= -\frac{G}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} d\mathcal{V}' \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \\ &= -\frac{G}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} d\mathcal{V}' \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\frac{G}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \frac{d\mathcal{V} d\mathcal{V}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\equiv V \end{aligned}$$

6. Ici, γ devient un indice moyen dans le volume.

où V est donc l'énergie gravitationnelle contenue dans le volume $\mathcal{V}$. Le facteur $1/2$ qui est apparu décrit le fait que les deux couples $\{(\vec{r}, \vec{r}'), (\vec{r}', \vec{r})\}$ mettent en jeu la même énergie d'interaction gravitationnelle.

Le champ magnétique est présent dans les nuages moléculaires et possède une énergie comparable à l'énergie interne. Si la matière est suffisamment ionisée (ou bien si le couplage ions-neutres est suffisant), le champ va donc exercer une influence sur la matière, qui va se traduire par une modification des bilans énergétiques. La prise en compte du champ magnétique, par la magnétohydrodynamique, n'est pas chose aisée. La description la plus simple consiste à faire l'hypothèse de l'écoulement à un fluide⁷. Dans ce contexte, la contribution du champ vaut

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \vec{r} \cdot \vec{f}_m \equiv W_m + \int_{\Sigma} d\vec{A} \cdot \left[(\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \frac{B^2}{2\mu_o} \vec{r} \right]$$

où

$$W_m = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \frac{B^2}{2\mu_o}$$

est l'énergie magnétique totale contenue dans le volume $\mathcal{V}$.

En regroupant l'ensemble de ces résultats on obtient l'expression fluide du théorème du Viriel pour un système autogravitant, magnétisé, isolé⁸ et occupant un volume donné,

$$2T + 3(\gamma - 1)U + V + W_m = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - \int_{\Sigma} d\vec{A} \cdot \left[(\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \left(P + \frac{B^2}{2\mu_o} \right) \vec{r} \right] . \quad (2.17)$$

Le Viriel relie donc les énergies cinétique T , interne U , gravitationnelle V et magnétique W_m de ce système aux variations temporelles de son moment d'inertie I et aux conditions aux limites s'exerçant sur sa surface Σ . Lorsque le champ magnétique est négligeable, le Viriel s'écrit plus simplement

$$2T + 3(\gamma - 1)U + V = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} + \int_{\Sigma} d\vec{A} \cdot P\vec{r} \quad (2.18)$$

Si on prend le cas simple d'une étoile en régime stationnaire et pour laquelle on néglige le champ magnétique⁹ et la pression externe, le Viriel nous donne la valeur de l'énergie interne emmagasinée

$$U = -\frac{1}{2}V \quad (2.19)$$

7. autant de neutres que d'ions, la vitesse du fluide étant la moyenne des deux vitesses pondérée par la masse.

8. puisqu'on n'a pas tenu compte de forces d'interaction supplémentaires.

9. Cette hypothèse est justifiée observationnellement mais pose du coup un grave problème: comment la matière interstellaire en effondrement a-t-elle pu se débarrasser de son champ magnétique?

où l'on a pris $\gamma = 5/3$ (atomes) comme indice adiabatique moyen. Le calcul de V nécessite la connaissance de la répartition de la masse dans l'étoile. Par ailleurs, cette expression n'est valable que pour les étoiles qui tournent lentement (T négligeable devant V).

2.2.3 L'effondrement des coeurs moléculaires denses

Un argument d'instabilité: le Viriel

Le théorème du Viriel peut fournir des résultats intéressants concernant une éventuelle rupture d'équilibre d'un objet (nuage ou étoile) qui l'amènerait à s'effondrer sur lui-même.

Lorsque l'énergie cinétique T est négligeable devant l'énergie gravitationnelle (par ex, pour une étoile dont la vitesse de rotation sur elle-même est beaucoup plus petite que la vitesse keplerienne à son équateur), l'énergie totale vaut $E = U + V$ et le Viriel s'écrit

$$E = \frac{\gamma - 4/3}{\gamma - 1} V + \frac{1}{6(\gamma - 1)} \frac{d^2 I}{dt^2} \quad (2.20)$$

L'indice adiabatique moyen de la matière est toujours supérieur à $4/3$ ($5/3$ pour des atomes, $7/5$ pour des molécules). Mais lors de certaines phases de son évolution, une étoile peut atteindre des états dégénérés où $\gamma = 4/3$ (photons ou matière relativiste). Or $E < 0$ initialement puisque l'étoile est autogravitante. Donc à l'instant où $\gamma = 4/3$, on doit avoir $d^2 I/dt^2 < 0$. Cette décroissance du moment d'inertie s'obtient par une perte de masse et/ou une décroissance du rayon: l'étoile se contracte avec un temps caractéristique dynamique $t_c \sim (I/\Delta E)^{1/2} \sim (R^3/GM)^{1/2}$. Ici, c'est donc une modification de la structure interne d'une étoile qui détruit son équilibre.

Une autre façon d'engendrer un effondrement est la perte progressive d'énergie. Par exemple, nous avons vu qu'une proto-étoile n'est pas en équilibre strict car sa luminosité provoque une décroissance du rayon sur des échelles de temps typiques $t_c \sim E/L_{rad} \sim V/L_{rad}$.

Enfin, un nuage peut s'effondrer sur lui-même à cause de l'influence d'une pression externe (supernovae, associations O-B..). Prenons le cas d'un nuage sphérique de rayon R , masse M à une température constante (nuage isotherme) T et pour lequel on peut négliger à la fois le champ magnétique et tout mouvement d'ensemble. Le Viriel s'écrit alors

$$2U + V = P_{ext} 4\pi R^3 \quad (2.21)$$

où l'on a supposé une symétrie sphérique et $\gamma = 5/3$. L'énergie interne vaut

$$U = \frac{3}{2} \int P dV = \frac{3}{2} \int \rho C_s^2 dV = \frac{3}{2} M C_s^2$$

où $C_s = (kT/\mu m_p)^{1/2}$ est la vitesse du son isotherme. En exprimant l'énergie gravitationnelle de la forme $V = -\alpha GM^2/R$ (α est un coefficient numérique sans dimension, qui devrait être de l'ordre de l'unité), on obtient qu'un tel équilibre est possible à condition que la pression externe satisfasse

$$P_{ext} = \frac{1}{4\pi R^3} \left(3MC_s^2 - \alpha \frac{GM^2}{R} \right) . \quad (2.22)$$

Cette pression idéale possède une valeur maximale en un rayon

$$R_c = \alpha \frac{4GM}{9C_s^2} .$$

Supposons que le nuage soit à l'équilibre avec un rayon $R < R_c$ et qu'une perturbation externe (onde de choc, front d'ionisation) force le nuage à se contracter. La pression externe requise pour un nouvel équilibre devrait être inférieure à la précédente, ce qui n'est pas le cas et le nuage se comprime de plus belle. Seuls les nuages avec $R > R_c$ sont effectivement stables et ne vont pas s'effondrer sur eux-mêmes.

La présence de champ magnétique modifie l'expression du rayon minimal de stabilité R_c . En fait, le champ magnétique offre un support supplémentaire contre l'effondrement, c'est à dire un rayon R d'un nuage plus grand pour une même pression extérieure. Une façon simple de le voir est d'exprimer les termes magnétiques sous la forme suivante

$$W_m + \int_{\Sigma} d\vec{A} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_o} (\vec{B} \cdot \vec{r}) = \beta \frac{\Phi^2}{\mu_o R}$$

où $\Phi = \int_{\Sigma_o} \vec{B} \cdot d\vec{A}$ est le flux magnétique à travers le plan équatorial du nuage et β est un paramètre qui devrait être de l'ordre de l'unité (comme α , il dépend de la géométrie). Un équilibre est possible si

$$P_{ext} = \frac{1}{4\pi R^3} \left(3MC_s^2 - \alpha \frac{GM^2}{R} + \beta \frac{\Phi^2}{\mu_o R} \right) ,$$

correspondant à un rayon minimal d'équilibre

$$R_c = \alpha \frac{4GM}{9C_s^2} \left(1 - \frac{\beta \Phi^2}{\alpha \mu_o GM^2} \right) .$$

On voit immédiatement sur cette expression que le support disparaît lorsque le rapport masse sur flux magnétique vaut

$$\frac{M_{\Phi}}{\Phi} = \left(\frac{\beta}{\alpha \mu_o G} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

correspondant à la masse critique

$$M_{\Phi} \simeq 10^3 \left(\frac{B}{30 \mu\text{G}} \right) \left(\frac{R}{2 \text{ pc}} \right)^2 M_{\odot}$$

où l'on a supposé $\Phi = \pi B R^2$ (champ uniforme) et pris $(\beta/\alpha)^{1/2} \simeq 0.13$ (valeur fournie par des simulations). Pour $M < M_{\Phi}$, le nuage est dit *sous-critique* et l'augmentation de la pression externe ne va pas provoquer un effondrement. Pour $M > M_{\Phi}$, le nuage est dit *super-critique* et l'effondrement est possible.

En régime dit magnétohydrodynamique idéal, la matière est couplée au champ de telle sorte qu'ils sont tous deux attachés l'un à l'autre. Ainsi, le flux magnétique

devrait se conserver lors d'une éventuelle contraction du nuage. Mais dans le milieu interstellaire, le couplage ions-neutres n'est pas parfait et les neutres peuvent diffuser à travers le champ (par un processus appelé diffusion ambipolaire). Les conséquences de cette diffusion sont de taille: un nuage initialement sous-critique peut perdre du flux magnétique (il diffuse hors du nuage) et devenir ainsi super-critique. L'effondrement serait dans ce cas spontané, mais il faut du temps pour que cette diffusion se produise.

Un calcul d'instabilité: le critère de Jeans

L'approche du Viriel est une approche énergétique de l'effondrement. Ici, on va avoir une approche basée sur un calcul d'instabilité. Les équations du nuage (autogravitant, sans rotation ni champ magnétique) sont les suivantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \Phi \\ \Delta \Phi &= 4\pi G \rho\end{aligned}$$

La méthode consiste à supposer connue une solution d'équilibre (indexée par 0), puis à faire une perturbation

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ P &= P_0 + P_1 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1\end{aligned}$$

Ensuite, on ne considère que les termes d'ordre un (l'ordre zéro est l'équilibre) et on obtient le système linéarisé suivant

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho_0 \vec{v}_1 + \vec{\nabla} \cdot \rho_1 \vec{v}_0 &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 &= -\vec{\nabla} \Phi_1 - (\vec{\nabla} P_1 - (\rho_1/\rho_0) \vec{\nabla} P_0)/\rho_0 \\ \Delta \Phi_1 &= 4\pi G \rho_1\end{aligned}$$

Le modèle de Jeans fut obtenu (en 1902) pour les conditions d'équilibre suivantes¹⁰

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \vec{0} \\ \rho_0 &= \text{Constante} \\ P_0 &= \rho_0 C_s^2 = \text{Constante}\end{aligned}$$

Après simplification du système linéarisé, on obtient l'équation pour ρ_1

$$\Delta \rho_1 - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \frac{4\pi G \rho_0}{C_s^2} \rho_1 = 0 \quad (2.24)$$

10. Cet équilibre est trivial (il implique $\rho_0 = 0$) et ne constitue donc pas un cas intéressant. Il permet cependant d'illustrer de façon simple un calcul d'instabilité.

qui est une équation d'ondes. Il y a donc des solutions de la forme $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, qui doivent obéir à l'équation de dispersion du système

$$\omega^2 = k^2 C_s^2 - 4\pi G \rho_0 . \quad (2.25)$$

Cette équation régit les modes de perturbations stables et instables. Pour $\omega^2 > 0$, les perturbations sont des ondes qui varient périodiquement avec le temps et dont l'amplitude reste faible. Par contre, les perturbations avec $\omega^2 < 0$ voient leur amplitude croître exponentiellement avec le temps. On obtient ainsi le nombre d'onde critique k_J en-deça duquel le nuage est instable. A ce nombre d'onde est associé la longueur d'onde

$$L_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left(\frac{\pi C_s^2}{G \rho_0} \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

dite *longueur de Jeans*. Tout nuage de taille $R > L_J$ est donc gravitationnellement instable. On peut remarquer que cette expression donne sensiblement le même résultat que par le Viriel (à des facteurs de l'ordre de l'unité près). La différence essentielle est qu'ici, nous avons un réel calcul d'instabilité, tandis qu'avec le Viriel nous n'avions qu'un argument de plausibilité. On peut réexprimer cette longueur en une masse, appelée la masse de Jeans

$$M_J = \frac{4}{3}\pi L_J^3 \rho \simeq 10^5 \left(\frac{T}{100 \text{ K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n_H}{10^6 \text{ m}^{-3}} \right)^{-1/2} M_\odot \quad (2.27)$$

Seuls les nuages de masse *supérieure* à la masse de Jeans sont instables et peuvent s'effondrer gravitationnellement sous l'effet de la moindre perturbation. Observationnellement, il est possible d'évaluer la masse d'un nuage (souvent à partir de son rayonnement) ainsi que la masse de Jeans. S'il apparaît que le nuage est super-critique ($M > M_J$) mais qu'aucun effondrement n'est observé, on en conclut qu'il existe un support supplémentaire contre l'effondrement, non pris en compte dans le calcul. Ce support est généralement fourni par un champ magnétique.

Calcul d'un effondrement: la sphère isotherme

L'équation de dispersion (2.25) montre que le temps caractéristique de l'instabilité $\tau_c \sim 2\pi\omega^{-1}$ vaut

$$\tau_c \sim (G \rho_0)^{-1/2} \quad (2.28)$$

c'est à dire que la contraction du nuage s'effectue avec le temps de chute libre. Pour une coeure dense de densité $n \sim 10^6 \text{ m}^{-3}$, ce temps serait de l'ordre de 10^8 années. Mais lors de la contraction, la densité augmente ce qui accélère d'autant plus la contraction (τ_c diminue). Cela signifie également que les régions centrales des nuages s'effondrent plus vite que les régions externes (en l'absence d'un piston extérieur).

Pourquoi un effondrement isotherme? Le nuage sera considéré isotherme s'il a le temps de se thermaliser lors de l'effondrement, autrement dit si le temps caractéristique d'ajustement thermique est plus court que celui de la contraction. Si ce n'est

pas le cas, il faudra plutôt considérer un effondrement adiabatique. Ce temps d'ajustement peut être estimé par $\tau_T \sim c_v T / \Lambda$, où $\Lambda \simeq 10^{-4} \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (valeur estimée) est la puissance rayonnée lors de la contraction. On trouve ainsi $\tau_T \sim 100 \text{ yr} \ll \tau_c$ et l'hypothèse isotherme est donc bien justifiée.

Lorsque $M > M_J$ le nuage s'effondre. Si l'on néglige le champ magnétique et la rotation de ce nuage, on obtient un effondrement radial qui ne peut être arrêté que par le gradient de pression. Or, le rapport entre force de gravité et la pression varie comme $1/r$ dans le cas isotherme: plus le nuage se contracte et plus la gravité domine. Les équations qui régissent l'évolution du nuage sont donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla}\Phi \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \Delta\Phi &= 4\pi G\rho \end{aligned}$$

où $d./dt$ est la dérivée Lagrangienne. En symétrie sphérique ces équations se ramènent à

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{Gm(r)}{r^2} \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{\partial m}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial m}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

où

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr'$$

est la masse comprise dans la sphère de rayon r . Si le nuage se contracte à partir d'un rayon r_0 à $t = 0$, la conservation de la masse s'écrit $m(r, t) = m(r_0, 0) = 4\pi r_0^3 \rho_0 / 3$ avec ρ_0 choisi uniforme. En multipliant l'équation sur le rayon de la sphère par $2\dot{r}$, celle-ci s'intègre facilement et donne

$$\frac{\dot{r}}{r_0} = - \left[\frac{8\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

ce qui, en posant $\cos^2 \theta = r/r_0$, devient

$$\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} = \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} t \quad (2.29)$$

lorsque la sphère s'effondre avec une vitesse initiale nulle. Ce résultat est indépendant de r_0 : contraction auto-similaire. Le temps pour atteindre le centre ($r = 0$ ou $\theta = \pi/2$)

$$t_{chute} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

est le même pour tout r_0 . Par contre, ce sont les régions internes qui s'effondrent d'abord, puisque dans un cas réaliste ρ_0 augmente vers le centre. Lorsque $r \rightarrow 0$, la densité augmente et le milieu devient opaque: on ne peut plus négliger la pression

et ce n'est plus une chute libre. L'effondrement s'arrête donc et ceci se produit dans les régions les plus centrales. On obtient donc trois situations différentes:

(1) **coeur central** auto-gravitant de masse M (proto-étoile) en contraction (équilibre quasi-hydrostatique) mais accréétant de la masse de son environnement;

(2) **enveloppe en effondrement** avec une vitesse de chute libre (auto-gravité négligée devant celle du coeur central);

(3) **zone extérieure** quasi-statique.

Soit $\dot{M} = 4\pi\rho r^2 v$ le taux d'accrétion de matière sur le coeur central. Si $t_{acc} \simeq M/\dot{M} \gg t_{chute}$, alors on peut considérer que ce taux d'accrétion reste constant au cours du temps et que la vitesse de chute libre vaut $v \simeq (2GM/r)^{1/2}$. Dans ce cas, on obtient une enveloppe avec une stratification en densité de la forme

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi(GM)^{1/2}r^{3/2}} \propto r^{-3/2}$$

Dans la région quasi-statique, l'équilibre entre l'auto-gravité et la pression s'écrit

$$\begin{aligned} C_s^2 \frac{d\rho}{dr} &= -\rho \frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 4\pi r^2 G\rho \end{aligned}$$

système d'équations qui possède comme solution particulière celle dite de la sphère singulière

$$\rho = \frac{C_s^2}{2\pi G r^2} \propto r^{-2}.$$

Les observations millimétriques récentes de condensations protostellaires montrent que ce type de stratification simple semble être effectivement grossièrement suivi. La cause de déviations à ces comportements réside dans les effets thermiques (chauffage et refroidissement de la matière) et dynamiques (rotation, champ magnétique) non pris en compte dans ce modèle simple.

Formation spontanée (isolée) vs. formation induite (groupée)

Les mécanismes qui amènent à l'effondrement d'un nuage sont encore mal compris et deux processus semblent à l'oeuvre.

Par exemple, le nuage du Taureau, vaste nuage moléculaire de masse d'environ $10^4 M_\odot$, est le lieu de formation d'une centaine d'étoiles (densité surfacique de 0.3 étoiles/pc²). Ces jeunes étoiles sont plutôt isolées et se trouvent enfouies dans des coeurs denses de quelques $M_\odot$, chaque coeur abritant de une à quelques étoiles.

Par contre, le complexe moléculaire ρ -Ophiuchus, d'une même masse totale de $10^4 M_\odot$, contient lui des coeurs denses bien plus gros que dans le Taureau, de l'ordre de 600 $M_\odot$. On observe dans ces coeurs denses également une centaine d'étoiles jeunes, ce qui correspond à une densité surfacique de 50 étoiles/pc². Ainsi, il apparaît que les étoiles de ce nuage se forment en associations et que ce mode de formation groupée ait une efficacité supérieure.

L'une des explications possible serait que chaque mode corresponde à un processus d'effondrement différent: soit contrôlé par l'auto-gravité seule (effondrement spontané pour les régions moins denses, donnant lieu à des étoiles isolées), soit induit par une compression extérieure (effondrement induit par la présence d'étoiles proches, donnant lieu à des étoiles en associations).

Quelques difficultés...

Environ 50% des étoiles appartiennent à des systèmes multiples (binaires, quelques fois en systèmes triples, très rarement quadruples). Cela signifie que dans le processus d'effondrement quelque chose va déterminer si le nuage va se fragmenter en plusieurs étoiles peu massives ou bien former une seule étoile très massive. Il est certain que la rotation initiale du nuage joue un rôle crucial dans la fragmentation. Mais ce rôle est encore mal compris et requiert de gros calculs numériques.

Mais le contraste en densité est tel, d'un coeur moléculaire à une étoile, qu'on ne peut pas suivre les calculs numériques d'effondrement jusqu'à la formation du coeur protostellaire. Par ailleurs, l'influence du champ magnétique de ces nuages n'est pas encore correctement prise en compte. C'est ce qui explique notre méconnaissance actuelle des paramètres stellaires initiaux (masse, rayon, vitesse de rotation, champ magnétique).

Enfin, il n'y a pas de théorie à l'heure actuelle qui décrive de façon satisfaisante l'évolution pré-Séquence Principale. Ainsi, les jeunes étoiles du type T-Tauri continuent à accréter de la masse par l'intermédiaire d'un disque de matière circumstellaire tout en se contractant. Cet apport de masse (et de moment cinétique) peut profondément bouleverser les calculs de structure stellaire actuels, où l'on suppose qu'une étoile évolue dans le vide.

2.3 Structure stellaire

2.3.1 Les principes de la structure stellaire

Une étoile est un gaz ionisé constitué de plusieurs espèces chimiques. Bien qu'à divers stades de son existence une étoile puisse engendrer des vents puissants (donc une perte de masse conséquente), on ne va s'intéresser qu'aux phases calmes (Séquence Principale) où l'on peut considérer qu'il y a conservation globale de la masse. On doit donc utiliser une description permettant de traduire cette conservation globale ainsi que les éventuels changements dans la composition chimique.

Une étoile rayonne une énorme quantité d'énergie. Le corollaire de ce rayonnement est son inexorable évolution: tout modèle réaliste doit donc pouvoir décrire les modifications subies par une étoile au cours du temps. La conservation de l'énergie impose que ce rayonnement provienne de la *variation temporelle* de diverses sources possibles:

potentielle: due à l'auto-gravité. En ordre de grandeur, l'énergie gravitationnelle du Soleil vaut

$$V_{\odot} \simeq -\frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} = -3.8 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

cinétique: une étoile tourne sur elle-même, mais sa vitesse de rotation est toujours inférieure à la vitesse de rupture (vitesse keplerienne), ce qui implique que l'énergie associée est toujours inférieure¹¹ à l'énergie gravitationnelle. Pour le Soleil, elle vaut

$$T_{\odot} \simeq \frac{1}{2} M_{\odot} \Omega_{\odot}^2 R_{\odot}^2 = 3.8 \cdot 10^{36} \text{ J}$$

magnétique: toutes les étoiles possèdent un champ magnétique, dont l'amplitude semble être d'autant plus grande que la vitesse de rotation de l'étoile l'est. Dans la plupart des étoiles, l'énergie contenue dans le champ est négligeable. Pour le Soleil par exemple,

$$W_{m,\odot} = \frac{4}{3} \pi R_{\odot}^3 \frac{\bar{B}_{\odot}^2}{\mu_0} = 1.1 \cdot 10^{23} \text{ J}$$

pour un champ magnétique moyen de 0.1 G (dans les régions dites actives, le champ atteint des valeurs de l'ordre du kG).

interne: Nous avons vu qu'un nuage, lors de son effondrement, était amené à se réchauffer (augmentation de son énergie interne) lorsqu'il devenait suffisamment dense. De même, une étoile pourrait briller uniquement du fait de sa contraction sur elle-même.

En utilisant le Viriel, et en faisant l'hypothèse (raisonnable) d'une étoile à l'équilibre, on obtient une énergie interne $U = -V/2$ et donc une énergie totale

11. Il est probable que cela ne soit pas vrai lors des phases pré-Séquence Principale: la proto-étoile tournerait à la vitesse de rupture. Il faudrait alors trouver un moyen de la freiner efficacement sur une échelle de temps courte. Ceci est l'un des problèmes majeurs actuels en formation stellaire.

$E = U + V$ (toutes les autres formes d'énergie décrites ci-dessus étant négligeables). Ainsi, la conservation de l'énergie du Soleil s'écrirait

$$L_{\odot} \equiv 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{eff}^4 = -\frac{dE}{dt} \sim \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot} \tau_{\odot}}$$

ce qui fournirait une durée de vie du Soleil (épuisement de sa réserve énergétique) $\tau_{\odot} \sim 10^7$ ans seulement. Or, les datations archéologiques montrent que la Terre (a fortiori le Soleil) est âgée de quelques 10^9 ans. La source d'énergie des étoiles ne peut donc être ni l'énergie gravitationnelle ni l'énergie interne (de même ordre de grandeur).

nucléaire: en fait, de part sa température centrale élevée ($T_c > 10^7$ K), une étoile peut entretenir des réactions de fusion et fission nucléaires en son sein. Connaître précisément la quantité d'énergie disponible à chaque réaction est relativement aisé: elle est proportionnelle 'l'énergie de masse'¹². Mais ce qui compte dans le bilan énergétique est la puissance globale libérée et il faut donc estimer convenablement les taux de réactions nucléaires.

Les principes de la structure stellaire sont alors les suivants. On écrit les équations de l'hydrodynamique en symétrie sphérique (problème 1D) et stationnaires. L'évolution des étoiles le long de la Séquence Principale est lente par rapport au temps caractéristique d'ajustement thermique. On peut donc considérer que cette évolution est quasi-statique, les grandeurs d'une étoile (température centrale, rayon) s'ajustant instantanément.

(1) Equilibre mécanique: hydrostatique

En négligeant tout mouvement ainsi que les effets du champ magnétique, on obtient l'équilibre mécanique

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad (2.31)$$

où

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \quad (2.32)$$

est la masse de la sphère de rayon r ($m(0) = 0$, $m(R) = M$). Combinée à une équation d'état valable pour un gaz parfait, $P \propto \rho T$, cet équilibre fournit la relation

$$T \propto \frac{M}{R}. \quad (2.33)$$

Plus une étoile est massive et plus sa température centrale est élevée; pour une étoile donnée, plus sa température augmente et plus petit doit être son rayon. On voit donc que les phases d'équilibre hydrostatique correspondent à des phases où le rayon stellaire s'ajuste à la température. Celle-ci est imposée par l'équation d'énergie.

12. $E_{nucl} \propto Mc^2$ (c'est une fraction libérée lors de la réaction). Donc $c \gg \sqrt{GM/R}$ implique très probablement $E_{nucl} \gg V$.

(2) Génération nucléaire d'énergie et propriétés de la matière

L'équation de conservation de l'énergie totale s'écrit en régime stationnaire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho\epsilon \quad (2.34)$$

où $\vec{F}$ est un terme de transport d'énergie et ϵ est un terme source d'énergie nucléaire (unités: $\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$). Toute la difficulté du traitement de la structure interne des étoiles provient donc de la prise en compte des propriétés de la matière: équation d'état, taux de réactions nucléaires de l'ensemble des réactions possibles, équations de conservation pour chaque espèce chimique.

Grâce à la physique nucléaire, la physique des plasmas, la physique statistique et la mécanique quantique, nous pouvons caractériser le terme source comme une fonction $\epsilon = \epsilon(T, \rho, C)$, où C est la composition chimique locale. De même, les mêmes outils théoriques vont nous fournir une équation d'état de la forme $P = P(T, \rho, C)$, indispensable pour l'équilibre hydrostatique.

(3) Equilibre thermique: transfert de l'énergie du coeur vers la surface

On peut réécrire l'équation de l'énergie de la forme

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho\epsilon \quad (2.35)$$

où $L(r) = 4\pi r^2 F_{rad}$ est la luminosité qui traverse la sphère de rayon r . Intégrée jusqu'à la surface,

$$L_{rad} + L_{neutr} = \int_0^R 4\pi r^2 \rho\epsilon dr \quad (2.36)$$

cette équation décrit que la luminosité rayonnée $L_{rad} = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ et celle transportée par les neutrinos L_{neutr} (difficilement mesurable) est produite par les réactions nucléaires: les pertes radiatives à la surface compensent le chauffage interne.

Mais résoudre localement la structure interne de l'étoile nécessite de connaître le terme $L(r)$. Il existe trois modes principaux de transport de l'énergie: le rayonnement (transport par photons), la conduction (transport par collisions entre particules) et la convection (transport par mouvements organisés de matière). Si les deux premiers sont relativement bien connus et décrits, le traitement local de la convection est encore approximativement modélisé.

2.3.2 Modèles stellaires polytropiques

Calcul d'un modèle stationnaire et statique

Lorsqu'on ne sait pas résoudre correctement l'équation d'énergie d'un système, on peut néanmoins rechercher une solution polytropique. Cette solution consiste à remplacer l'équation d'énergie par une équation de la forme $P = K\rho^\Gamma$, où K est a priori libre ainsi que l'indice polytropique Γ et dont la valeur est comprise entre 1 (cas isotherme) et γ (cas adiabatique). L'ensemble complet d'équations décrivant

une étoile polytropique statique, à symétrie sphérique, sont

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\rho \frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Phi}{dr} &= 4\pi G \rho \\ P &= K \rho^\Gamma\end{aligned}$$

L'équilibre hydrostatique et l'équation polytropique fournissent alors

$$\rho = \left(\frac{-\Phi}{K} \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right)^{1/(\Gamma-1)} \quad (2.37)$$

où l'on a choisi $\Phi = 0$ lorsque $\rho = 0$. Afin d'obtenir des résultats généraux, il est intéressant de dédimensionaliser les équations. Ainsi, on pose $\varphi = \Phi/\Phi_c$ et $x = r/R_*$, où

$$R_*^2 = -\frac{\Phi_c}{4\pi G} \left(\frac{K}{-\Phi_c} \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \right)^{1/(\Gamma-1)} \quad (2.38)$$

et l'indice "c" indique une valeur prise au centre de l'étoile ($x = 0$). Dans ces nouvelles variables l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\varphi}{dx} + \varphi^n = 0 \quad (2.39)$$

où $n = 1/(\Gamma - 1)$. Cette équation (appelée équation de Lane-Emden) est du second ordre et demande donc deux conditions aux limites:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 1 \\ \frac{d\varphi}{dx}(0) &= 0.\end{aligned}$$

On désire donc intégrer cette équation du centre ($x = 0$) vers la surface, définie par $\varphi(x_n) = 0$. Cette équation ne possède de solution analytique que dans trois cas:

$n = 0$: $\varphi = 1 - x^2/6$, c'est une sphère homogène de rayon $x_0 = \sqrt{6}$;

$n = 1$: $\varphi = \sin x/x$ de rayon $x_1 = \pi$;

$n = 5$: $\varphi = 1/(1 + x^2/3)^{1/2}$ de rayon infini (également vrai pour tout $n > 5$).

Les cas qui nous intéressent sont évidemment ceux pour lesquels il existe un rayon fini (correspondant donc à $n < 5$).

Comment construire une étoile?

Si l'on n'a aucun argument physique pour justifier l'utilisation d'un polytrope¹³, alors K est libre (sa valeur varie d'une étoile à l'autre) et l'on pourra construire un modèle d'étoile à partir de trois paramètres libres: M , R et n (ou Γ).

13. Nous verrons plus bas que lorsqu'une étoile est entièrement convective, elle peut être décrite par un polytrope avec $\Gamma = \gamma$, γ étant l'indice adiabatique du gaz.

La masse de l'étoile est fournie par

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \rho_c \int_0^R \varphi^n r^2 dr \\
 &= 4\pi \rho_c \frac{r^3}{x^3} \int_0^{x_n} \varphi^n x^2 dx = 4\pi \rho_c R_*^3 \left[-x^2 \frac{d\varphi}{dx} \right]_0^{x_n} \\
 &= 4\pi \rho_c R^3 \left(\frac{-1}{x} \frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=x_n}
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

dont le terme entre parenthèses ne dépend que de n . En se choisissant M et R , on connaît alors ρ_c , puis $R_* = R/x_n$. On a donc le lien entre la variable x et r et la loi de densité avec le rayon est alors connue: $\rho(r) = \rho_c \varphi^n(r/R_*)$. De même, R_* et ρ_c fournissent directement K et le profil de pression dans l'étoile: $P(r) = K\rho^\Gamma$. L'information obtenue grâce à un modèle polytropique consiste donc, pour une étoile de masse M et rayon R , en la donnée des densité et température centrales et de leurs variations avec le rayon (pour un n fixé).

Par exemple, on peut construire un tel modèle pour le Soleil avec $n = 3$ (correspondant à $\Gamma = 4/3$, milieu dominé par les photons; $M_\odot$ et $R_\odot$ fournis par les observations). Les tables fournissent $x_3 = 6.897$ et $6.15 \cdot 10^{-3}$ pour le terme entre parenthèses de l'équation (2.40). On en déduit alors une densité centrale $\rho_c = 7.64 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ et une température centrale $T_c = 1.2 \cdot 10^7 \text{ K}$. Les codes numériques, prenant en compte un grand nombre d'effets physiques, fournissent $T_c = 1.4 \cdot 10^7 \text{ K}$.

Il y a deux cas physiques où l'approximation polytropique est justifiée:

1. lorsque la matière stellaire est dégénérée (cf cours sur les naines blanches);
2. lorsque l'énergie n'est pas transportée par les photons (transport radiatif) mais par des mouvements d'ensemble (transport convectif, cf plus bas).

Puisque $n = 3$ reproduit assez bien le bon ordre de grandeur de température pour le Soleil, cela signifie qu'il existe une zone étendue à l'intérieur de celui-ci où le transport n'est pas radiatif (convection) et où la pression de radiation est beaucoup plus grande que la pression thermique du gaz ($\gamma = 4/3$ au lieu de $5/3$).

Dans ces deux cas, l'équation d'état fournit une relation du type $P = K\rho^\Gamma$, mais où K et Γ sont cette fois-ci imposés par la microphysique et sont donc connus. Un seul paramètre du modèle reste alors libre, le rayon R .

Bien que simples, les modèles polytropiques permettent d'avoir une idée, plus précise que par simples considérations d'ordres de grandeur, des conditions physiques régnant au coeur d'une étoile. Cependant, ils n'expliquent pas sa structure interne et ne peuvent évidemment pas plus rendre compte de son évolution.

Exercice: énergie gravitationnelle d'un polytrope

Calculer l'énergie gravitationnelle d'une étoile de masse M et rayon R en équilibre hydrostatique, en supposant qu'elle vérifie une relation polytropique.

L'énergie gravitationnelle d'un polytrope s'écrit

$$V = - \int_0^M dm \frac{Gm}{r} \quad (2.41)$$

puisque $m(r)$ est la masse contenue dans une sphère de rayon r . En utilisant l'équilibre hydrostatique (2.31) et les conditions aux limites $m/r(0) = 0$, $\Phi(R) = 0$, on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} V &= -\frac{GM^2}{2R} + \frac{1}{2} \int_0^M \Phi dm \\ &= -\frac{GM^2}{2R} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_0^M \frac{P}{\rho} dm \end{aligned} \quad (2.42)$$

Or, pour un polytrope on a également l'égalité

$$\begin{aligned} V &= \int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} dm \\ &= -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm \end{aligned} \quad (2.43)$$

En injectant cette expression dans la précédente on obtient alors l'énergie gravitationnelle d'un polytrope en équilibre hydrostatique

$$V = -3 \frac{\Gamma - 1}{5\Gamma - 6} \frac{GM^2}{R} \quad (2.44)$$

2.3.3 Quels sont les états de la matière stellaire?

La composition chimique

La matière stellaire est formée d'un ensemble d'éléments chimiques dont la composition exacte a une énorme influence sur la structure interne de l'étoile et son évolution temporelle. En effet, la composition chimique intervient dans le transport radiatif de l'énergie (à travers l'opacité et la conduction thermique par ex.) mais également dans la production elle-même de l'énergie (à travers les taux de réactions nucléaires).

Soit un élément chimique i , son abondance dans la composition chimique de la matière stellaire est décrite par le rapport

$$X_i = \frac{m_i n_i}{\rho} = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (2.45)$$

où ρ est la densité stellaire ($\sum_i^N X_i = 1$ pour N éléments différents en présence). Traditionnellement, on note

$$\begin{aligned} X &\equiv X_{\text{H}} \\ Y &\equiv X_{\text{He}} \\ Z &\equiv 1 - X - Y \end{aligned}$$

c'est à dire X est l'abondance d'Hydrogène, Y celle de l'Hélium et Z celle de tous les éléments plus lourds. Cette dernière reste toujours beaucoup plus faible que les deux premières. Pour le Soleil, ces abondances valent $X_{\odot} = 0.71$, $Y_{\odot} = 0.265$ et $Z_{\odot} = 0.025$. Ces valeurs sont typiques des abondances des étoiles de la population I.

La composition chimique n'est pas homogène à l'intérieur d'une étoile et varie dans le temps. Et c'est justement cette variation temporelle qui provoque l'évolution stellaire. Trois mécanismes peuvent modifier la composition chimique locale:

Diffusion: elle se produit lorsque, par exemple, il y a un gradient spatial de composition chimique. Mais dans les conditions stellaires "normales", cette diffusion se fait sur une échelle de temps très longue et peut donc être négligée.

Convection: au contraire de la diffusion, le brassage de la matière par les mouvements convectifs (voir plus bas) s'effectue sur une échelle de temps courte. On peut donc considérer que ce brassage est suffisamment efficace pour homogénéiser la zone convective: sa composition chimique reste uniforme et ne sera modifiée que par les conditions imposées à ses frontières.

Production-destruction par les réactions nucléaires. Soit r_{lm} le nombre de réactions par unité de volume et par unité de temps qui transforment un élément l en un autre élément m . La modification de l'abondance locale d'un élément i sera donc régie par une équation de la forme

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_{j=1}^N r_{ji} - \sum_{k=1}^N r_{ik} \right) \quad (2.46)$$

Gaz parfait ou gaz dégénéré?

Lorsque la matière suit la distribution de Boltzmann, elle forme ce qu'on appelle un gaz parfait. Les interactions coulombiennes entre particules ainsi que les corrections quantiques sont négligeables. L'équation d'état de la matière est alors de la forme

$$P = nkT \quad (2.47)$$

où n est la densité de particules, k la constante de Boltzmann et T la température. La matière du coeur stellaire est constituée de plusieurs gaz, un gaz d'électrons et N gaz de noyaux atomiques différents. Si tous ces gaz sont parfaits, la pression totale s'écrit alors

$$P = P_e + \sum_{i=1}^N P_i = (n_e + \sum_{i=1}^N n_i)kT \quad (2.48)$$

où la température des divers constituants est la même puisque le milieu est thermalisé (densité suffisamment élevée). Soit Z_i le nombre de protons de chaque noyau, la neutralité électrique impose $n_e = \sum_{i=1}^N Z_i n_i$. On peut donc réécrire l'équation d'état sous la forme

$$P = \frac{k}{\mu m_u} \rho T \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^N \frac{(1+Z_i)}{\mu_i} X_i$$

(2.49)

où $\mu_i = m_i/m_u \simeq A_i$ est le poids moléculaire de l'élément i et $m_u = 1.66053 \cdot 10^{-27}$ kg est l'unité de masse atomique. L'introduction du *poids moléculaire moyen* μ permet ainsi de décrire un ensemble de gaz parfaits comme un seul gaz parfait. Si, par exemple, le coeur stellaire est constitué uniquement d'atomes d'Hydrogène, on aura: $X_H = 1$, $\mu_H = 1$, $Z_H = 1$, donc $\mu = 1/2$. Si le coeur est constitué d'Hélium, $X_{He} = 1$, $\mu_{He} = 4$, $Z_{He} = 2$, donc $\mu = 4/3$.

Lorsque la matière n'obéit plus à la distribution de Boltzmann à cause d'effets quantiques, elle est dite dégénérée. Pour la matière stellaire, ce sont les électrons qui, les premiers, subissent l'effet quantique appelé principe d'exclusion de Pauli. Ce principe stipule qu'au maximum deux fermions peuvent occuper une cellule élémentaire de l'espace des phases. Le principe de Pauli va donc intervenir dans deux cas limites: (1) la température est faible (énergie minimale des électrons, formant une *mer de Pauli* d'états apariés: dégénérescence complète), (2) la densité est très élevée (présence simultanée d'électrons libres et d'une mer de Pauli: dégénérescence partielle).

Dans le cas dégénéré, l'équation d'état $P = P(\rho, T, \mu)$ est beaucoup plus complexe et seuls des cas limites permettent des approximations analytiques. De plus, la matière dégénérée peut être relativiste ou non-relativiste.

Enfin, une autre situation rend le gaz non-parfait, à savoir lorsque les interactions coulombiennes deviennent importantes: les ions se comportent alors comme un cristal. Cette cristallisation intervient dans les naines blanches.

Les réactions d'ionisation

Alors qu'au coeur des étoiles la matière est complètement ionisée, la fraction d'ionisation diminue lorsqu'on s'approche de la surface. Il faut donc prendre en compte une ionisation partielle. Elle modifie la pression des ions ainsi que celle des électrons. L'équilibre d'ionisation est décrit par l'équation dite de Saha, obtenue dans les conditions de l'ETL.

L'équation d'état de la matière stellaire

Ainsi, la description de l'état de la matière stellaire est un véritable problème en soi, qui suscite beaucoup de travaux de recherche. Par ailleurs, la présence des photons introduit également une pression de radiation dont il faut prendre compte. L'équation d'état de la matière stellaire est donc de la forme

$$P = P_e(\rho, T, \mu) + P_{ions}(\rho, T, \mu) + P_{rad} \quad (2.50)$$

où $P_{rad} = 4\sigma T^4/3c$ (vrai uniquement dans un milieu opaque, voir chap 1). Les expressions des pressions des gaz d'ions et d'électrons doivent prendre en compte les effets relativistes, la composition chimique du gaz et son degré d'ionisation et modéliser la transition entre un état parfait et un état dégénéré.

En général, l'équation d'état est implicite et nécessite des interpolations entre divers régimes limites. De plus, la description des états stellaires les plus évolués (naines blanches, étoiles à neutrons) fait appel à des processus collectifs (cristallisation ou effets quantiques), qui complexifient davantage l'équation d'état...

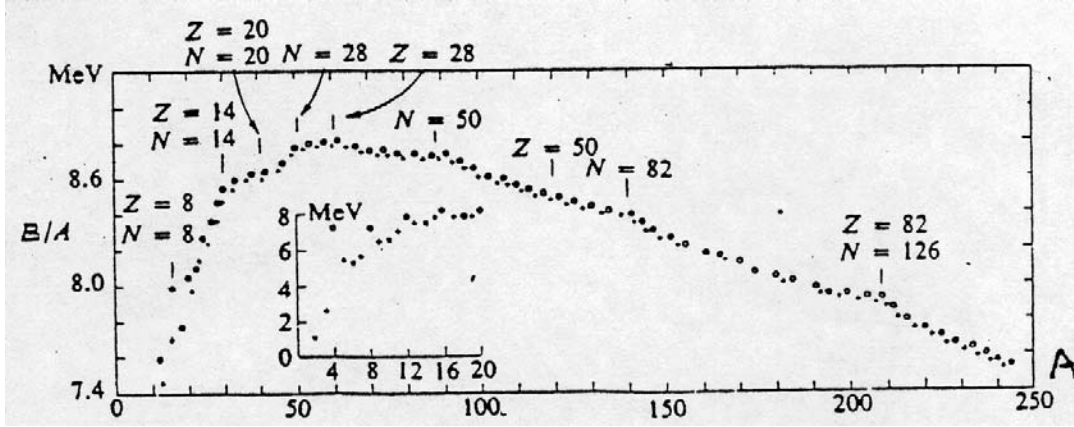


FIG. 2.19 – *Energie de liaison en MeV par nucléon B/A en fonction du nombre A de nucléons. Cette courbe indique directement les noyaux stables, c'est à dire nécessitant un apport d'énergie pour être détruits. Le Beryllium ($A = 8$) est stable ainsi que tous les éléments au-delà du Fer ($A = 56$).*

2.3.4 Les sources d'énergie thermonucléaire: nucléosynthèse stellaire

Masse atomique et énergie de liaison

Grâce aux spectromètres de masse, on peut mesurer précisément la masse atomique d'un élément chimique quelconque. A partir de ces mesures, a été définie l'unité de masse atomique (uma) par la relation exacte

$$M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ uma} \quad (2.51)$$

c'est à dire $1 \text{ uma} = 931,48 \text{ MeV}/c^2$. Du fait de l'égalité énergie-masse et d'une énergie de liaison différente pour chaque atome, la masse réelle (mesurée en uma) diffère du nombre de nucléons A . En effet, la masse atomique (en uma) d'un élément vaut

$$M_{at}(Z, A) = M_{noy}(Z, A) + Zm_e - B_e \quad (2.52)$$

où B_e est l'énergie de liaison des électrons dans l'atome. Cette contribution, qui est de l'ordre de 3 keV/nucléon, est faible devant l'énergie de liaison nucléaire (qui est de l'ordre de 8 MeV/nucléon). Par ailleurs, on a

$$M_{noy}(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - B_N \quad (2.53)$$

où B_N est l'énergie de liaison nucléaire. La masse des électrons étant négligeable et $m_p \simeq m_n$, on voit en combinant ces expressions que la masse atomique s'écrit

$$M_{at}(Z, A) \simeq A \left(m_p - \frac{B}{A} \right) . \quad (2.54)$$

Ainsi, la différence entre la masse atomique mesurée et le nombre de nucléons A dépend essentiellement du rapport B/A . Expérimentalement, on a donc accès à ce

rapport et il se trouve qu'il varie assez peu avec A (en moyenne de l'ordre de 8 Mev/nucléon). Ceci est dû à la courte portée de l'interaction nucléaire forte, responsable de la cohésion du noyau (tout se passe comme si un nucléon n'interagissait qu'avec ses voisins proches).

Une conséquence importante de ceci se voit en termes de quantité d'énergie Q dégagée lors d'une réaction nucléaire. Prenons la réaction suivante,



La conservation de l'énergie se traduit par

$$E = [M_{\text{noy}}(1) + M_{\text{noy}}(2)]c^2 + T_1 + T_2 = [M_{\text{noy}}(3) + M_{\text{noy}}(4)]c^2 + T_3 + T_4 \quad (2.56)$$

où T_i est l'énergie cinétique du noyau i dans le référentiel d'observation. On pose alors

$$Q = [M_{\text{noy}}(1) + M_{\text{noy}}(2) - M_{\text{noy}}(3) - M_{\text{noy}}(4)]c^2 , \quad (2.57)$$

grandeur indépendante du référentiel. La conservation du nombre de nucléons impose alors

$$Q = B_N(3) + B_N(4) - B_N(1) - B_N(2) . \quad (2.58)$$

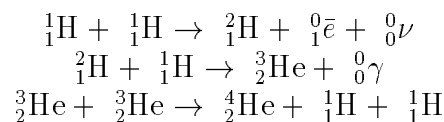
On peut donc définir trois types de réactions:

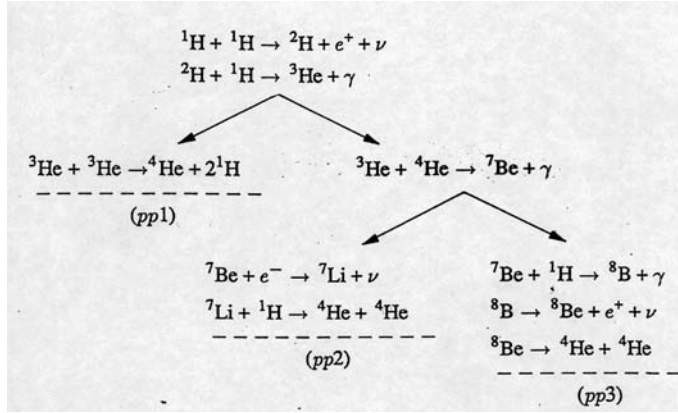
- $Q = 0$ réactions élastiques: en général, ce sont des diffusions élastiques d'éléments ne modifiant pas leur structure interne;
- $Q < 0$ réactions endothermiques: il faut fournir une énergie seuil (égale à Q dans le référentiel du centre de masse) pour que cette réaction puisse effectivement se produire. Elle ne sera donc pas spontanée;
- $Q > 0$ réactions exothermiques: se produisant spontanément dès que certaines conditions sont réunies et dégageant de l'énergie.

La figure 2.19 montre la courbe expérimentale B/A en fonction de A . Celle-ci est croissante jusqu'à $A = 7$ (Lithium), possède un décrochement en $A = 8$ (Beryllium), puis croît à nouveau jusqu'à $A = 56$ (Fer). Au delà du Fer, cette courbe décroît avec A . Cela signifie que la fusion de deux éléments légers (sauf pour $A = 8$, voir plus bas) ne posera pas de problème jusqu'au Fer puisqu'on aura bien des réactions exothermiques ($Q > 0$). Par contre, il sera impossible de synthétiser des éléments plus lourds par des réactions à l'équilibre statistique.

De l'Hydrogène à l'Hélium: la chaîne proton-proton (pp)

La chaîne de réactions les plus probables qui permettent de former un atome d'Hélium-4 à partir de quatre atomes d'Hydrogène est la suivante (figure 2.20):



FIG. 2.20 – *Chaine proton-proton.*

La présence du neutrino ${}^0_0\nu$ dans la première de ces réactions montre qu'elle s'effectue en partie grâce à la force nucléaire faible. C'est ce qui explique que ce type de réaction s'effectue avec une faible probabilité (la force faible étant de courte portée, la section efficace de la réaction est petite). Non seulement la barrière Coulombienne doit être vaincue, mais il faut que la force faible agisse pendant le court instant où elle l'est (lors de la collision entre deux atomes d'hydrogène).

Enfin, les neutrinos interagissant peu avec la matière, quittent les étoiles en emportant de l'énergie. Le flux de neutrinos constitue donc une perte de puissance pour l'étoile et une mine de renseignements sur les intérieurs stellaires.

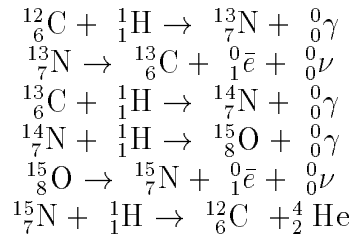
La chaîne pp est le moyen utilisé par les étoiles de faible masse ($M < 2 - 3 M_\odot$, type spectral F, G, K, M) pour brûler leur combustible ($T_c < 1.5 \cdot 10^7$ K). Elle libère 26.731 Mev, c'est à dire

$$\Delta E_H = 6.35 \cdot 10^{14} \text{ J kg}^{-1} \quad (2.59)$$

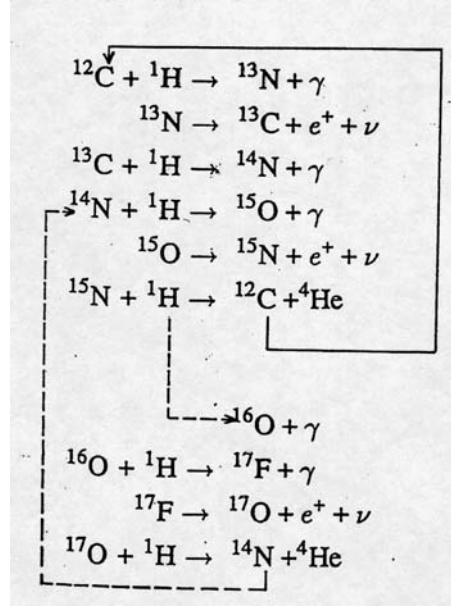
mais les neutrinos emportent de 2 à 30% de cette énergie. Cette réaction est très exothermique car la particule α (atome d'Hélium) est très stable.

De l'Hydrogène à l'Hélium: le cycle Carbone-Azote-Oxygène (CNO)

Ce cycle, découvert par Bethe et von Weizsäcker, synthétise également de l'Hélium-4 à partir d'Hydrogène mais utilise des éléments plus lourds comme catalyseurs (figure 2.21):



Les deux réactions impliquant la radioactivité beta s'effectuent aussi grâce à la force faible. Ici, cela ne ralentit pas le taux de réaction du cycle car il ne faut pas vaincre de barrière Coulombienne.

FIG. 2.21 – *Cycle CNO.*

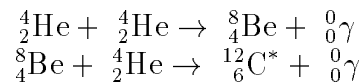
Le cycle CNO est le moyen préférentiel pour brûler l'Hydrogène utilisé par les étoiles massives ($M > 3 M_{\odot}$, type O, B et A). La température requise est de $T_c > 1.5 \cdot 10^7$ K et elle libère environ 24.97 Mev. Au delà de $T_c \simeq 5 \cdot 10^7$ K, l'Hydrogène est très rapidement consommé (dans le coeur).

Le poids respectif des réactions pp ou CNO dépend du nombre d'éléments lourds catalyseurs en présence. Pour le Soleil par exemple, on estime à 96% la part d'énergie libérée par la chaîne pp (56% pp1 et 40% pp2) et à 4% celle par le cycle CNO.

De l'Hélium au Carbone: le processus Triple α

L'Hélium-4 est un élément extrêmement stable, deux de ces atomes contiennent plus d'énergie de liaison qu'un atome de Beryllium-8. Comment peut donc s'effectuer la synthèse d'éléments plus lourds que l'Hélium-4? La solution fut trouvée par les astrophysiciens E. Salpeter et F. Hoyle et est appelée *processus triple- α* .

C'est une réaction à deux temps qui se produit lorsque $T_c \sim 10^8$ K et $n_c \sim 10^5$ g.cm⁻³ et s'effectue de la façon suivante:



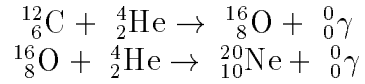
où le Carbone-12 formé est dans un état nucléaire excité. La nécessité d'un tel état est simple: puisque cette réaction comporte deux étapes, le taux de réaction risquerait d'être trop faible dans des conditions stellaires normales, s'il ne se produisait pas avec une plus grande probabilité. Il suffisait donc d'imaginer une réaction résonante (préférentielle) avec un état du Carbone-12 ayant une plus grande section efficace. Il devait donc exister un état nucléaire excité du Carbone-12 aux alentours de 10^8 K. L'existence d'un tel état fut bien vérifiée expérimentalement, mais plus tard.

L'énergie libérée est de 7.275 Mev par atome de Carbone-12, c'est à dire

$$\Delta E_{\text{He}} = 2.4 \cdot 10^{14} \text{ J kg}^{-1} \quad (2.60)$$

une libération d'énergie par unité de masse environ 10 fois moindre que lors du cycle CNO.

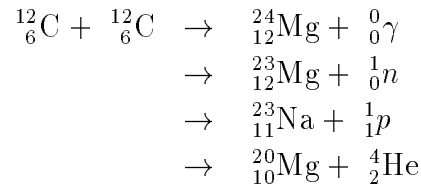
Mais le Carbone-12 ainsi produit va également réagir avec son environnement,



et donc former un coeur composé d'un mélange de ${}^{12}\text{C}$ et ${}^{16}\text{O}$, plus quelques autres éléments plus massifs (rarement au delà du ${}^{20}\text{Ne}$).

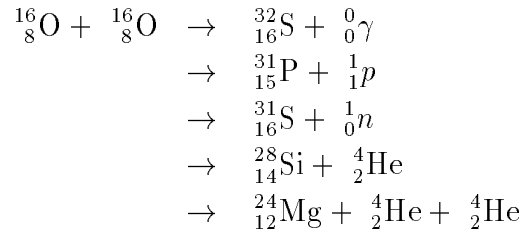
Au delà du Carbone

Une fois le Carbone-12 synthétisé, le processus de formation des autres éléments chimique est clair. Il nécessite seulement une température centrale de plus en plus forte, afin de vaincre une barrière Coulombienne de plus en plus élevée. Ainsi, le Carbone-12 est lui-même brûlé pour $T_c \sim 5 - 8 \cdot 10^8 \text{ K}$, correspondant aux réactions suivantes



où les neutrons et protons produits interagissent eux-mêmes avec les éléments ambiants.

Le brûlage de l'Oxygène nécessite $T_c \simeq 1.5 \cdot 10^9 \text{ K}$ et forme



ainsi de suite, jusqu'au ${}^{56}\text{Fe}$ (à partir d'un coeur chaud composé de Silicium-28). Au-delà du fer, les éléments ne sont plus stables car ils deviennent trop "gros" et la force nucléaire forte ne peut plus maintenir leur cohésion contre la répulsion électromagnétique. Les éléments plus lourds ne peuvent donc pas être formés dans les étoiles par des réactions à l'équilibre. Mais leur présence dans l'Univers prouve qu'ils ont bien été formés et ceci, à une époque plus récente que leur durée de vie. Alors?

2.3.5 Comment s'effectue le transport d'énergie?

Maintenant que nous savons produire de l'énergie au coeur des étoiles, il reste à l'évacuer vers la surface et à obtenir ainsi (on l'espère pour la survie de l'étoile) un équilibre entre chauffage et refroidissement.

Le transport par rayonnement

Si l'on considère que l'opacité stellaire est due à la diffusion Thomson ($\kappa_T = 0.04 \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$), on peut alors estimer grossièrement le libre parcours moyen des photons dans le Soleil

$$\lambda_{rad,\odot} = \frac{1}{\kappa_T \bar{\rho}_\odot} = \frac{4\pi R_\odot^3}{3\kappa_T M_\odot} \simeq 1.8 \text{ cm} \quad (2.61)$$

ce qui signifie qu'une étoile est opaque au rayonnement. On peut donc utiliser l'approximation de diffusion pour le flux radiatif

$$\vec{F}_{rad} = -\kappa_{rad} \vec{\nabla} T \quad (2.62)$$

où

$$\kappa_{rad} = \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_R} \quad (2.63)$$

est une “conductibilité” radiative et κ_R est l'opacité moyenne de Rosseland. En présence de plusieurs espèces chimiques (H, He etc...) cette opacité moyenne doit être définie avec précaution.

Le transport par conduction

D'une façon générale, l'équation de diffusion d'une grandeur scalaire E s'écrit (loi de Fick)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.64)$$

où le flux associé de la grandeur E s'écrit

$$\vec{F} = -D \vec{\nabla} E \quad (2.65)$$

D étant le coefficient de diffusion. Ce coefficient peut s'écrire

$$D = \frac{1}{3} l_D v_D \quad (2.66)$$

où l_D est une longueur caractéristique de diffusion et v_D la vitesse associée. Ainsi, le flux radiatif obéit bien à cette loi avec $E_{rad} = 4\sigma T^4/c$, $l_{rad} = \lambda_{rad}$ et $v_{rad} = c$. Pour la matière stellaire non-dégénérée, $l_{cond} \ll \lambda_{rad}$ et $v_{cond} \ll c$: la conduction est négligeable devant le flux radiatif.

En général, on incorpore au terme de rayonnement les effets de la conduction en écrivant $\vec{F}_{rad} = -\kappa \vec{\nabla} T$, où le coefficient de diffusion total est simplement $\kappa = \kappa_{rad} + \kappa_{cond}$.

En théorie de la structure stellaire il est d'usage d'introduire la notation suivante

$$\begin{aligned}\nabla_{rad} &\equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{rad} \\ &= \frac{3}{64\pi\sigma G} \frac{\kappa L P}{m T^4}\end{aligned}\tag{2.67}$$

où la deuxième ligne est obtenue en utilisant l'équilibre hydrostatique et où $L(r) = 4\pi r^2 F_{rad}$ est la luminosité stellaire émise au rayon $r(m)$.

Le transport par convection

La convection se met en place lorsque les deux moyens précédents ne sont pas assez efficaces pour transporter l'énergie, ce qui fait qu'il se développe une zone très chaude à proximité de zones plus froides. On s'attend donc à trouver un seuil concernant le gradient de température: lorsque ce gradient est supérieur à une certaine valeur, le terme dominant de transport ne sera plus F_{rad} (incluant la conduction) mais F_{conv} . On a donc deux énigmes à résoudre: (1) Quel est ce seuil? et (2) Comment s'exprime F_{conv} ?

Considérons le mouvement d'une particule fluide à l'équilibre avec son environnement. Les équations qui régissent cet équilibre sont

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P \\ \frac{dP_i}{dr} &= -\rho_i g \end{aligned} \right\} \quad \text{équation du mouvement}$$

$$\rho_i = \rho_i(P_i, T_i, \mu_i) \quad \text{équation d'état}$$

$$T_i = T_i(P_i, T_i, \mu_i) \quad \text{équation d'énergie}$$

où l'indice "i" indique la particule fluide tandis que l'absence d'indice indique le milieu extérieur (qui partage la même équation d'état). Si on déplace cette particule en $r + dr$ de telle sorte qu'elle reste à l'équilibre horizontal ($P_i = P$), elle subira néanmoins une poussée d'Archimède dirigée vers le haut si elle est moins dense que son environnement, c'est à dire si

$$\frac{d\rho_i}{dr} < \frac{d\rho}{dr} .\tag{2.68}$$

Pour exprimer cette condition d'instabilité en une condition portant sur la température, il faut utiliser l'équation d'état, que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} + \varphi \frac{d\mu}{\mu}\tag{2.69}$$

où les coefficients α , δ et φ sont les mêmes pour la particule et le fluide environnant¹⁴. Par ailleurs, si l'on suppose que le déplacement dr s'effectue suffisamment rapidement pour qu'il n'y ait pas d'échange de chaleur entre la particule fluide et

14. Ces coefficients sont reliés aux dérivées partielles de ρ . Ils valent tous l'unité dans le cas d'un gaz parfait ($\rho = (m_p/k)\mu P/T$).

son environnement, l'équation d'énergie du fluide est remplacée par une condition d'adiabaticité. Pour un gaz parfait, par exemple, cette condition s'écrit

$$P_i = K \rho_i^\gamma \quad \text{c'est à dire} \quad \nabla_{adia} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{adia} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (2.70)$$

Pour un gaz plus général, cette condition met en jeu sa composition chimique ainsi que le degré d'ionisation de chaque composant. Puisque la particule reste à l'équilibre de pression avec son environnement et qu'elle-même ne subie pas de variation de composition chimique, la condition d'instabilité (2.68) devient

$$\left(\frac{d \ln T}{dr} \right) - \left(\frac{d \ln T}{dr} \right)_i - \left(\frac{\varphi}{\delta} \frac{d \ln \mu}{dr} \right) < 0 . \quad (2.71)$$

En multipliant cette inégalité par $-dr/d \ln P > 0$ (échelle caractéristique de pression), on obtient

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right) > \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_i + \frac{\varphi}{\delta} \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right) \quad (2.72)$$

c'est à dire, en introduisant les notations habituelles en structure stellaire,

$$\nabla > \nabla_{adia} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_\mu . \quad (2.73)$$

le critère de Ledoux. En l'absence de modification chimique ($\nabla_\mu = 0$), cette condition d'instabilité se résume au célèbre *critère de Schwarzschild*

$$\nabla > \nabla_{adia}$$

(2.74)

Dès que le gradient local de température devient supérieur au gradient adiabatique, le transport convectif se met en place.

Le seuil d'instabilité convective étant connu, reste à comprendre comment va s'effectuer le transport d'énergie. Grossièrement, des mouvements de matière à grande échelle (cellules de convection) vont se mettre en place, permettant ainsi un brassage de la matière centrale chaude avec la matière superficielle plus froide. Ces mouvements sont globaux, c'est à dire qu'ils dépendent des conditions aux limites et non pas de la physique locale (bien que le seuil d'instabilité soit local). On voit donc toute la difficulté de décrire, par un vecteur flux $\vec{F}_{conv}$ local, un phénomène de transport global. Par ailleurs la forme des cellules de convection dépend de la rotation et également du champ magnétique, deux effets non pris en compte dans la structure interne stellaire.

A ce stade, il y a deux possibilités de modélisation. L'effet de la convection s'arrêtant dès que le gradient devient adiabatique, on peut simplement dire que la convection maintient le gradient au niveau adiabatique. L'équation d'énergie est alors remplacée par la condition d'adiabaticité dans la région convective.

Une façon plus précise consiste à utiliser le modèle dit *de la longueur de mélange*. Le flux convectif est alors décrit par

$$\vec{F}_{conv} = \rho c_P (\Delta T) \vec{v}_{conv} \quad (2.75)$$

où c_P est la chaleur spécifique à pression constante, $\vec{v}_{conv}$ est une vitesse caractéristique des particules convectives et $\Delta T = T' - T$ est la différence de température entre ces particules (T') et le milieu ambiant (T). Cette différence de température est reliée au gradient local par

$$\Delta T = \Lambda \left(\frac{dT'}{dr} - \frac{dT}{dr} \right) \quad (2.76)$$

où l'on a introduit la longueur de mélange Λ . Cette longueur est une distance caractéristique au bout de laquelle un élément de matière chaude ascendant (poussé par la force d'Archimède) se dissout dans l'environnement ambiant. Comme cette longueur doit être reliée à l'échelle de variation de la pression H , il fut adopté la prescription suivante

$$\Lambda = \alpha H \quad \text{où} \quad H \equiv P/|\nabla P| \quad (2.77)$$

avec α un nombre compris typiquement entre 1 et 2 pour les intérieurs stellaires (afin d'obtenir des calculs d'évolution solaire comparables aux observations actuelles du Soleil). Des considérations énergétiques et thermodynamiques (relativement) simples permettent ensuite de connaître $\vec{F}_{conv}$ en fonction des conditions locales (flux d'énergie qui doit être évacuée $L(r)$ et $\vec{F}_{rad}$). Dans ce type de traitement, les globules de matière convective ne produisent pas eux-mêmes d'énergie mais se contentent de la transporter ailleurs.

2.3.6 Modèles numériques de structure stellaire

Les équations différentielles pour une étoile à symétrie sphérique sont:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{\partial P}{\partial m} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial L}{\partial m} &= \epsilon_{nucl} - \epsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial m} &= -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \\ \frac{\partial X_i}{\partial t} &= \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.78)$$

La dernière de ces équations est en fait un système de N équations décrivant la modification des abondances des N noyaux i de masse m_i , régie par les taux de réactions nucléaires $r_{jk} = r_{jk}(P, T, X_i)$.

Le gradient de température $\nabla = d \ln T / d \ln P$ est soit ∇_{rad} dans une région radiative, soit ∇_{conv} lorsque la convection est dominante. Les opacités moyennes de Rosseland, $\kappa_R(P, T, X_i)$ nécessaires au transport radiatif, sont obtenues à partir de tables (elles-mêmes calculées après un gros effort numérique).

Il faut ensuite rajouter à ces équations les relations thermodynamiques (obtenues à partir de l'équation d'état) fournissant: la capacité calorifique $c_P(P, T, X_i)$, les coefficients $\alpha(P, T, X_i)$, $\delta(P, T, X_i)$ et $\varphi(P, T, X_i)$ et le gradient adiabatique $\nabla_{adia}(P, T, X_i)$.

Enfin, l'équation d'énergie indique que les variations temporelles de l'énergie interne (dues à une contraction ou dilatation de l'étoile) doivent être compensées par la production d'énergie nucléaire $\epsilon_{nucl} = \epsilon_{nucl}(P, T, X_i)$, les pertes dues aux neutrinos $\epsilon_\nu = \epsilon_\nu(P, T, X_i)$ et par le flux local d'énergie $L(m)$ (relié soit à ∇_{rad} , soit à ∇_{conv}).

Les équations de la structure stellaire forment ainsi un système complet de $N + 4$ équations pour les $N + 4$ fonctions indépendantes $r, P, T, L, X_1, \dots, X_N$. Les conditions aux limites à imposer sont de deux types:

Au centre lorsque $m = 0$. On doit avoir $r = 0$ et $L = 0$, mais P_c et T_c restent a priori libres (ils peuvent donc être pris comme paramètres).

A la surface lorsque $m = M$, mais choisie plus précisément à la photosphère (épaisseur optique égale à $2/3$). On aura $r = R$, $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ et $P \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_{eff}$. En fait, les modèles numériques actuels utilisent plutôt un véritable raccord avec un modèle d'atmosphère stellaire pour fixer $P(R)$ et $T(R)$.

Suivre l'évolution stellaire nécessite d'avoir déjà une solution initiale du problème complet, à partir de laquelle on itère dans le temps. Une étoile est ainsi discrétisée spatialement et est décrite par une grille (en fait une ligne, allant de $m = 0$ à $m = M$) où, en chaque point, on connaît toutes les grandeurs du problème. L'évolution temporelle de ces grandeurs est alors calculée en utilisant le système d'équations (2.78). Pour une étoile de masse M et composition chimique initiale (X, Y, Z) données, on peut ainsi construire un trajet évolutif dans le diagramme HR.

2.4 Évolution stellaire

Comme nous l'avons vu au chapitre 2.2, il n'existe pas à l'heure actuelle de calculs complets *ab initio* partant d'un nuage moléculaire en effondrement et obtenant une ou plusieurs étoiles. Les difficultés à la fois numériques mais aussi physiques sont encore trop grandes. En général, les calculs supposent un objet sphérique déjà formé, de masse M et rayon R donnés, et ayant une certaine composition chimique. Ces conditions initiales, si elles ne permettent pas un équilibre hydrostatique, vont donner lieu à une évolution rapide (sur un temps de Kelvin-Helmholtz) où l'objet va se contracter. En se contractant, sa température interne augmente jusqu'à ce que des réactions thermonucléaires s'allument. La première de ces réactions est l'allumage du Deutérium, mais elle reste cependant insuffisante à stopper la contraction. Celle-ci ne s'arrête qu'à une température plus élevée, correspondant à l'arrivée de cette proto-étoile sur la Séquence Principale (SP). Toute cette phase jeune d'évolution (calculée à partir de conditions initiales inconnues) est appelée évolution pré-SP (figure 2.22).

2.4.1 Évolution des étoiles de faible masse ($M < 2 - 3 M_{\odot}$)

La Séquence Principale

L'arrivée sur la Séquence Principale (SP) correspond à l'allumage des réactions nucléaires qui transforment l'Hydrogène en Hélium: l'étoile est "née". Et voilà déjà qu'elle vieillit inexorablement, son combustible s'amenuisant avec le temps.

L'étoile passe 90 % de sa durée de vie sur la SP, à convertir H en He. On appelle ces étoiles les **naines**, par comparaison avec la taille des géantes (figure 2.23).

La chaîne pp est plus efficace à basse température et ne nécessite pas la présence d'éléments chimiques plus lourds. C'est donc le moyen de combustion préférentiel des étoiles de masse $M < 2 - 3 M_{\odot}$ (type spectral F, G, K ou M). Leur structure interne sera organisée de la façon suivante, selon leur masse:

$0.08 M_{\odot} < M \leq 0.4 M_{\odot}$	entièrement convective
$0.4 M_{\odot} < M \leq 1.1 M_{\odot}$	coeur radiatif, enveloppe convective
$1.1 M_{\odot} < M \leq 1.5 M_{\odot}$	entièrement convective
$1.5 M_{\odot} < M$	coeur convectif, enveloppe radiative

Les étoiles de très faible masse, entièrement convectives, ont une composition chimique uniforme. Ainsi, c'est toute la masse de l'étoile qui sert de combustible: leur évolution sera donc des plus lentes.

Lorsque l'Hydrogène disparaît dans le coeur, les réactions nucléaires s'arrêtent et la pression centrale diminue. Pour une étoile de masse $M = 1.3 M_{\odot}$, ceci se produit au bout de $6 \cdot 10^9$ yr. L'équilibre hydrostatique n'est alors plus réalisé et le coeur s'effondre en premier, suivi des couches externes. L'étoile quitte alors la SP et s'en va explorer d'autres régions du diagramme HR.

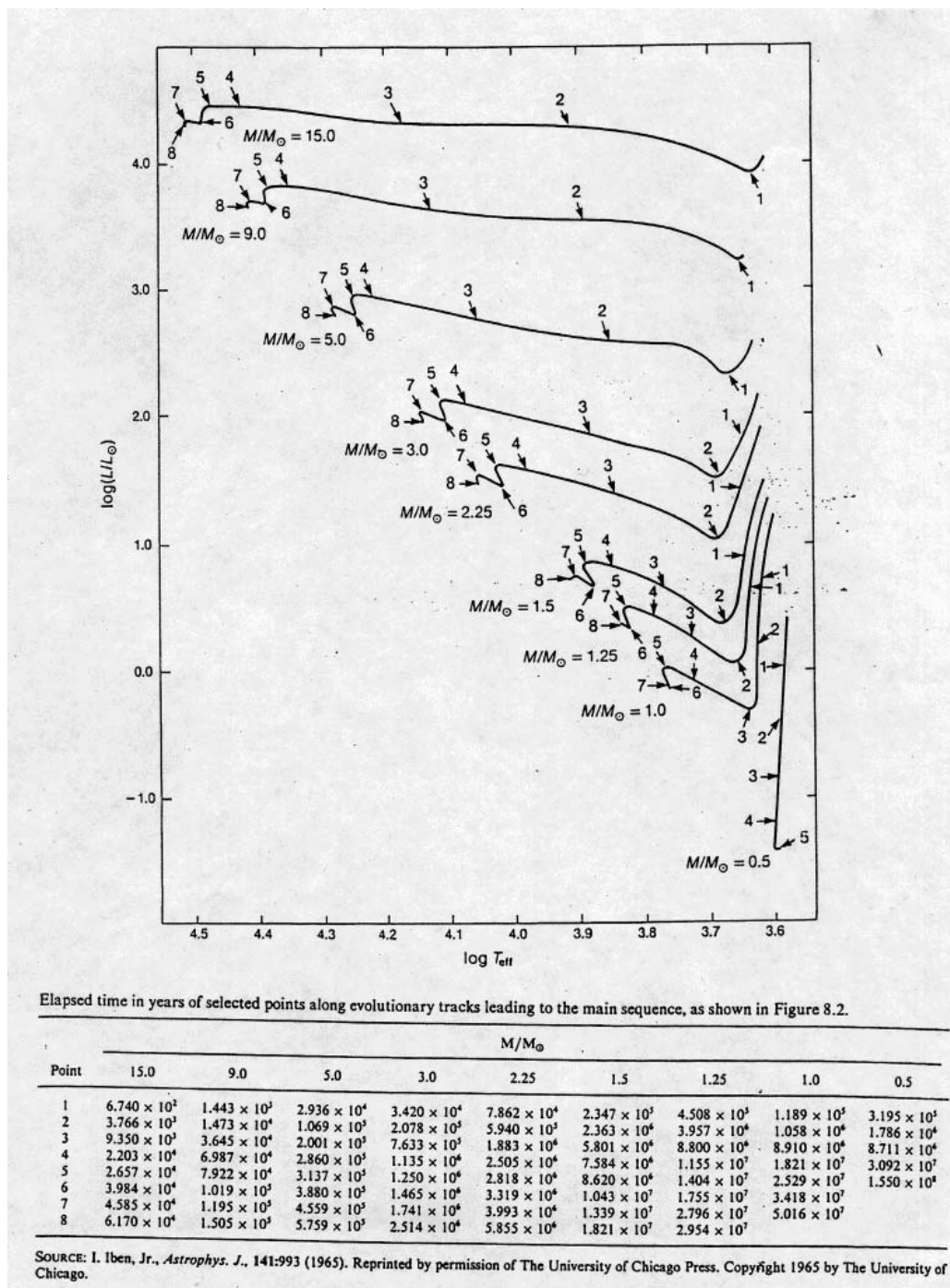


FIG. 2.22 – Trajets évolutifs pré-Séquence Principale de proto-étoiles en fonction de leur masse. Les chiffres le long de chaque trajet correspondent au tableau et indiquent le temps écoulé depuis un instant “zero”, arbitraire.

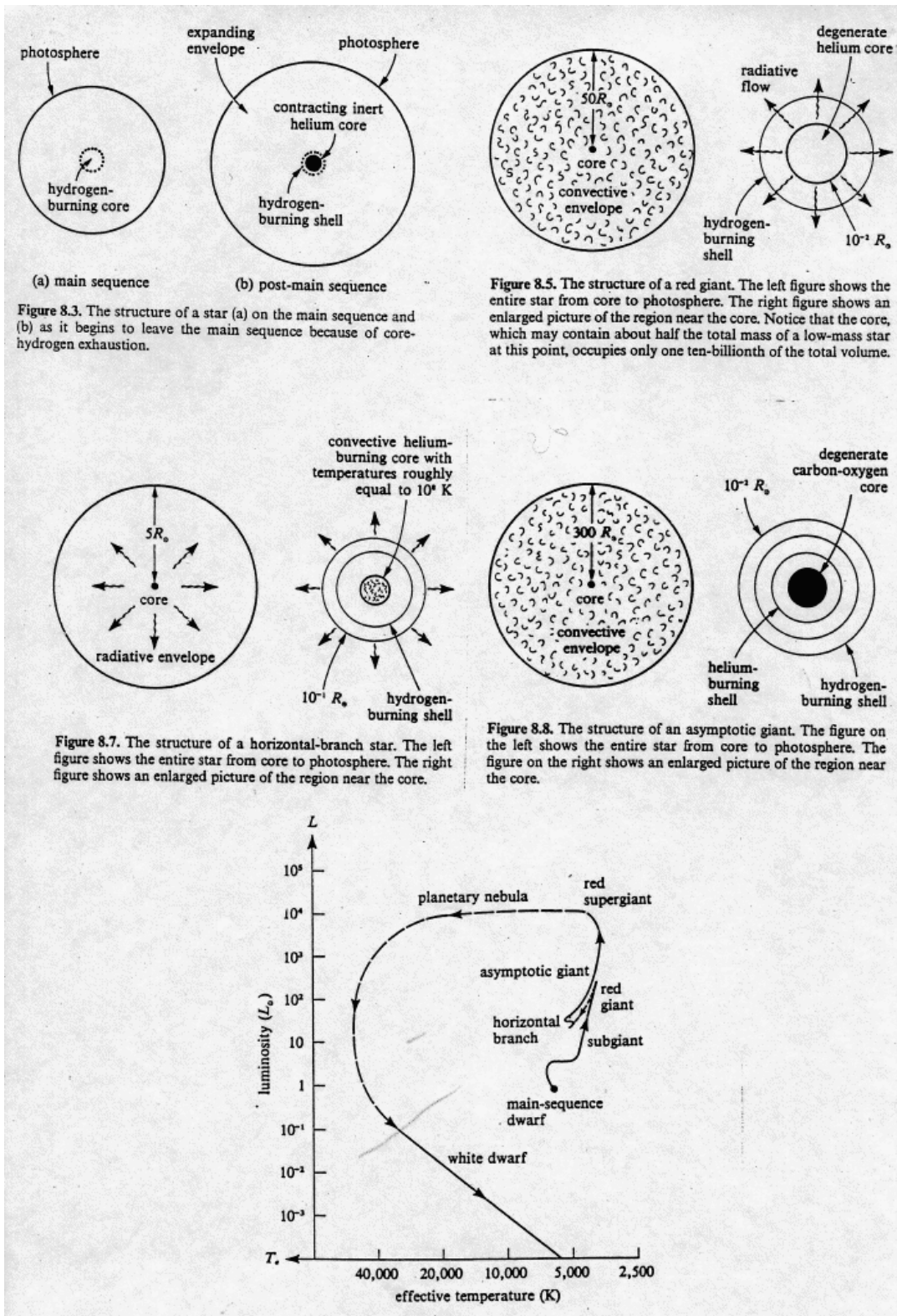


FIG. 2.23 – Vision schématique de l'évolution d'une étoile de faible masse et trajet dans un diagramme HR théorique. Après une phase spectaculaire de nébuleuse planétaire, le cœur dégénéré d'une telle étoile va lentement se refroidir sous la forme d'un objet compact peu massif, une naine blanche.

La Branche des Géantes

L'effondrement du coeur a deux conséquences: (1) le coeur se réchauffe et (2) il produit une luminosité qui repousse les couches externes. Le chauffage des couches externes est suffisant pour y engendrer le brûlage de l'Hydrogène. Ne pouvant évacuer radiativement l'énergie aussi rapidement qu'elle est produite, les couches externes entrent en expansion (le rayon stellaire augmente).

Cette phase d'expansion se produisant initialement à luminosité $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ constante, cela signifie que T_{eff} diminue jusqu'à atteindre une valeur minimale d'environ 2000 K. L'étoile se déplace vers la droite sur le diagramme HR: c'est une **sous-géante** rouge.

Le brûlage de la couche d'Hydrogène produit de l'Hélium qui, étant quatre fois plus massif que l'Hydrogène, tombe vers le centre. La masse du coeur augmente alors lentement, ce qui augmente d'autant sa luminosité (avec T_{eff} à peu près constant). Afin d'évacuer son énergie tout en restant en équilibre quasi-hydrostatique, l'étoile augmente encore son rayon et devient ainsi une **géante** rouge, avec une enveloppe entièrement convective (ex, Bételgeuse, de rayon 1 UA).

Toute cette phase d'effondrement du coeur d'Hélium s'effectue sur une durée de l'ordre du temps de contraction du coeur, $\sim 5 \cdot 10^8$ yr (Kelvin-Helmholtz). Elle est caractérisée par une intense perte de masse par *vent stellaire*. En effet, le rayon étant devenu énorme, la gravité superficielle de la géante ne peut plus compenser la pression de radiation, et l'étoile se vide d'une grande fraction de son enveloppe (peut-être jusqu'à 80 % de sa masse). Les mécanismes responsables de ce vent stellaire restent cependant mal contrôlés, ce qui pose un sérieux problème puisque l'évolution ultérieure d'une étoile va justement dépendre de sa masse encore disponible.

Le flash de l'Hélium et la descente vers la Branche Horizontale

Pendant ce temps, la contraction du coeur d'Hélium continue et les électrons y deviennent dégénérés ($M_c \sim 0.4 M_\odot$). Grâce à l'apport d'Hélium provenant des couches supérieures, la masse du coeur augmente lentement et permet ainsi à celui-ci d'atteindre une température centrale $T_c \sim 10^8$ K lorsque $M_c \simeq 0.45 M_\odot$. Le processus triple- α s'enclenche aussitôt, mais dans des conditions dégénérées.

Normalement (conditions du gaz parfait), s'il se produit une légère augmentation de température, la pression augmente ce qui provoque un accroissement du rayon, et donc un refroidissement: l'étoile est thermiquement stable. Dans le cas dégénéré, la pression est essentiellement celle des électrons: si la température augmente, la mer de Fermi s'agrandit mais l'accroissement de la pression est faible, ce qui n'entraîne pas de modification notable du rayon et donc pas de refroidissement. Ainsi, le processus est instable et à la moindre fluctuation de température, il y aura un emballement: c'est ce qu'on appelle le **flash de l'Hélium**.

Cette combustion violente et soudaine (quelques secondes) libère beaucoup d'énergie (jusqu'à $10^{11} L_\odot$), mais elle se produit trop rapidement et profondément dans l'étoile pour être observable. Simplement, la température centrale augmente, levant la dégénérescence et l'étoile se dilate. Mais, du coup, le coeur se refroidit (M_c/R_c diminue) ce qui amoindrit les taux de réactions et donc diminue la luminosité pro-

duite. On obtient alors une étoile au coeur d'He stable, entourée d'une enveloppe d'H (deux sources d'énergie).

Sur le diagramme HR, l'étoile migre vers le bas à gauche (T_{eff} plus grand, L plus petit): c'est la **branche horizontale**. Les trajets exacts dépendent fortement de la perte de masse pendant la phase précédente de géante. Cette phase de combustion calme de l'Hélium dure environ 10^7 ans pour une étoile de masse $M = 1.3 M_{\odot}$: c'est l'analogue de la séquence principale, mais pour l'Hélium.

La Branche Asymptotique des Géantes (rouges)

Sur la branche horizontale, l'étoile possède deux sources d'énergie thermonucléaire: le coeur d'He et une couche d'H. Lorsque l'He disparaît dans le coeur (entièrement converti en ^{12}C et ^{16}O), le coeur perd son support contre sa propre gravité et se contracte à nouveau. Le même scénario se produit: alors que le coeur se contracte, les couches superficielles sont chauffées et entrent en expansion.

L'étoile redevient une géante, lors d'une phase appelée la **branche asymptotique des géantes** (AGB en anglais). Cette phase est d'autant plus courte que le coeur est massif (temps de Kelvin-Helmholtz, de l'ordre de quelques 10^6 ans).

Les Supergéantes (rouges)

Au cours de sa contraction, le coeur de Carbone et d'Oxygène devient à son tour dégénéré, mais plus compact (donc possédant une gravité superficielle supérieure) que le coeur d'Hélium des phases antérieures. La raison de ceci tient à deux causes: (1) la dégénérescence impose $R_c \propto M_c^{-1/3}$ (cf Chapitre 3.1, eq (3.21) pour $n = 3/2$); (2) $M_c(\text{C,O}) > M_c(\text{He})$ car les couches superficielles ont alimenté le coeur par leurs "déchets".

Ainsi, la température de ce coeur de Carbone et d'Oxygène est beaucoup plus élevée que celle du coeur d'Hélium, ce qui produit une forte luminosité: l'étoile est devenue une **Supergéante**.

Une telle débauche d'énergie ne peut durer très longtemps. Étant supergéante et extrêmement lumineuse, l'étoile ne peut maintenir son enveloppe et il s'ensuit une très efficace perte de masse. Toute l'enveloppe est éjectée, donnant lieu à ce qu'on appelle une **nébuleuse planétaire** (figures 2.24, 2.25). La physique de cette éjection est encore très mal comprise. La rotation de l'étoile ainsi que la présence d'instabilités thermiques dans la couche d'Hélium (violentes impulsions cycliques), doivent certainement contribuer à l'éjection de la matière. De très récentes observations semblent indiquer que l'éjection n'est pas du tout à symétrie sphérique, mais plutôt grossièrement bipolaire.

Une fin morne: les Naines Blanches

Le coeur dégénéré de carbone et d'oxygène, dont la masse est inférieure à la masse de Chandrasekhar ($M_c < 1.44 M_{\odot}$, voir cours sur les naines blanches), continue à se contracter et à se refroidir par rayonnement. L'étoile (dont le rayon est devenu

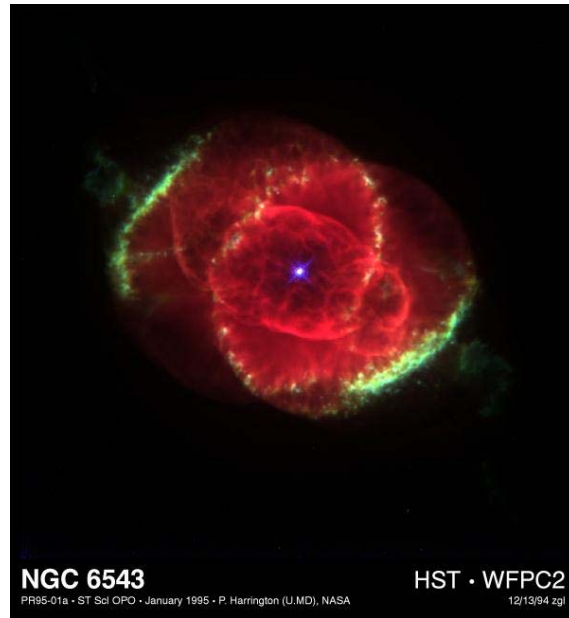


FIG. 2.24 – Nébuleuse planétaire du Dragon (NGC 6543) ou “l’œil du chat”, située à $3.6 \cdot 10^3$ al, d’une magnitude absolue $M_V = 8.1$ mag et d’un âge estimé à 10^3 ans. En rouge, la raie $H\alpha$ (HI), bleu OI, vert NII. Les propriétés de cette nébuleuse pourraient s’expliquer par l’existence d’un système double (imposant une précession au vent vu en HI). L’émission en NII pourrait provenir d’un choc entre ce vent et un jet à grande vitesse issu du compagnon...

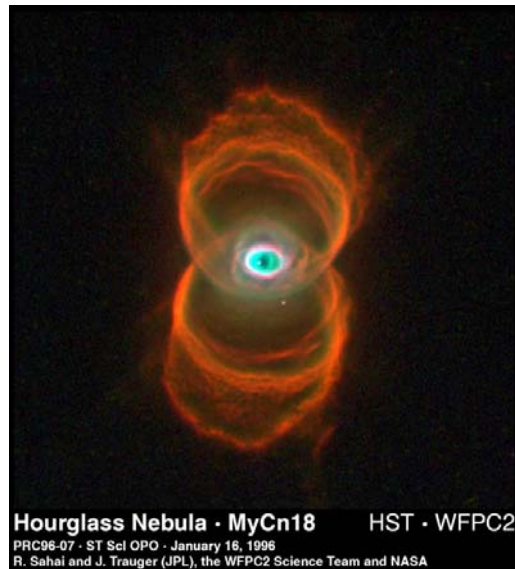


FIG. 2.25 – Nébuleuse planétaire MyCn18, située à 8 kpc. En rouge, Azote ionisé (NII), en vert l’Hydrogène et en bleu Oxygène (OIII). Dans cette nébuleuse, l’étoile n’est pas au centre de l’éjection! La forme bipolaire de l’éjection (et non sphérique) peut s’expliquer par une densité plus élevée à l’équateur qu’aux pôles.

subitement très petit après la perte de son enveloppe) décrit donc une courbe descendante dans le diagramme HR et vient “finir ses jours” dans le cimetière des **naines blanches**, petits astres peu lumineux. Ce trajet, une fois l'enveloppe disparue, prend environ 10^4 ans.

2.4.2 Évolution des étoiles massives ($M > 2 - 3 M_{\odot}$)

Les étoiles massives ont une évolution similaire (le moteur est le même, à savoir l'évolution de la composition chimique) mais sur une échelle de temps bien plus courte. Cette différence introduit cependant de profonds changements dans le devenir de ces étoiles.

La Séquence Principale

L'étoile, de type spectral O, B ou A, brûle son Hydrogène par le cycle CNO. Elle possède un cœur convectif et une enveloppe radiative. Elle quitte la SP dès que l'Hydrogène est épuisé au cœur, ce qui se produit au bout de $6 \cdot 10^7$ ans pour une étoile de $5 M_{\odot}$ (figure 2.26).

La branche des Géantes (rouges et bleues)

Comme les étoiles moins massives, le cœur d'He s'effondre et provoque le réchauffement des couches superficielles et leur expansion. L'étoile devient une **géante** rouge ou bleue. Mais ici, le cœur d'He est beaucoup plus massif: son ignition se produit plus rapidement sans nécessiter une forte contraction. La conséquence est importante: le brûlage de l'He en Carbone par le processus triple- α s'effectue dans des conditions non-dégénérées, donc de façon continue. Cet allumage s'effectue en $\sim 3 \cdot 10^6$ ans pour une étoile de $5 M_{\odot}$: c'est tellement court que l'on ne peut observer les étoiles pendant de telles phases.

Avec la présence de deux sources d'énergie thermonucléaire, la luminosité stellaire est plus grande. Cependant, la contribution majeure à la luminosité provient du brûlage en couche de l'Hydrogène et non de l'Hélium dans le cœur (plus grande libération d'énergie lors de la fusion).

Après $\sim 10^7$ ans (environ 20% de la durée de la SP), l'Hélium lui-même vient à manquer dans le cœur et celui-ci se contracte jusqu'à atteindre $T_c \sim 5 \cdot 10^8$ K. À partir de cette température, le Carbone peut servir de combustible.

Les réactions thermonucléaires mettant en jeu le Carbone sont très sensibles à la température et des problèmes de stabilité de l'étoile se posent. Or, cette stabilité dépend fortement de l'équation d'état et en particulier de la dégénérescence ou non du cœur. Pour des étoiles de masse intermédiaire ($3 M_{\odot} < M < 10 M_{\odot}$), cette question n'est pas encore très claire et une catastrophe thermique pourrait bien s'y produire. Cela laisse le destin des étoiles de masses intermédiaires dans le flou...

Par contre les étoiles plus massives ($M > 10 M_{\odot}$) évoluent plus rapidement, élaborent un cœur de Carbone peu dégénéré et leur évolution est stabilisée. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'à ces étoiles massives.

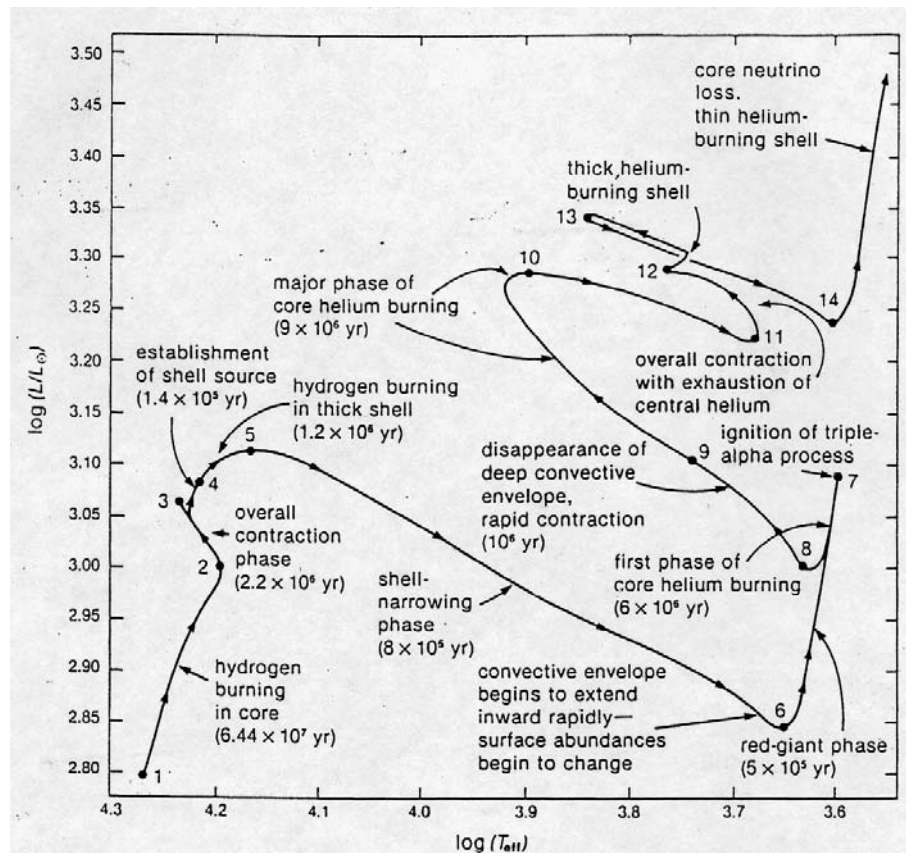


FIG. 2.26 – Trajet évolutif d'une étoile de Population I de $5 M_{\odot}$ dans un diagramme HR. Le temps apparaissant entre parenthèses est le temps écoulé entre les points numérotés (celui-ci est de 10^6 ans entre les points 10 et 11).

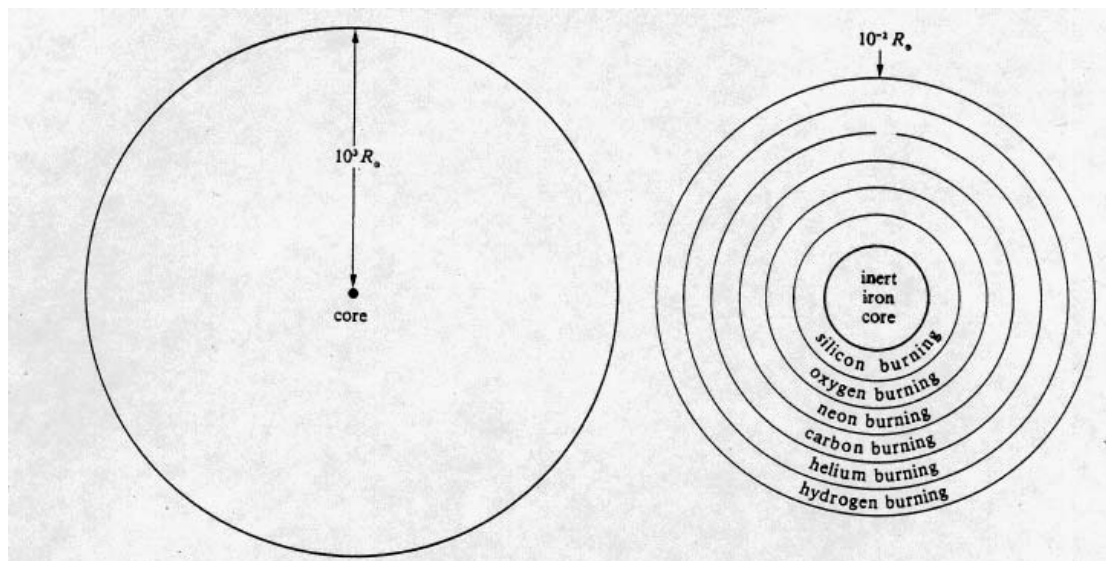


Figure 8.13. The onion-ring structure of a pre-supernova star (a very evolved star of high mass). The diagram on the left shows the dimensions of the entire star, a red supergiant, from core to photosphere. The diagram on the right shows the nuclear-burning regions near the inert iron core.

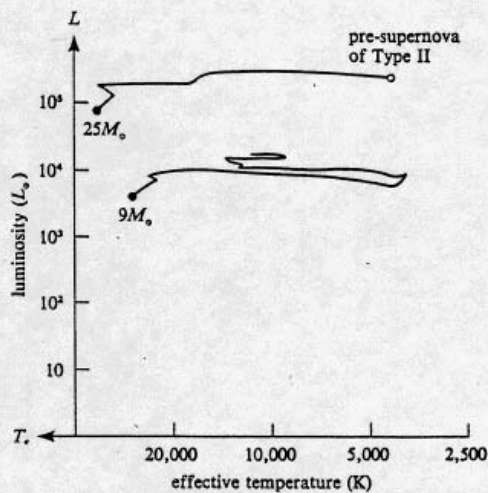


Figure 8.11. Evolution of a high-mass and a very-high-mass star in the Hertzsprung-Russell diagram. (Adapted from Icko Iben and from Weaver and Woosley, *Ninth Texas Symp. Rel. Ap., Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 336, 1980, 335.)

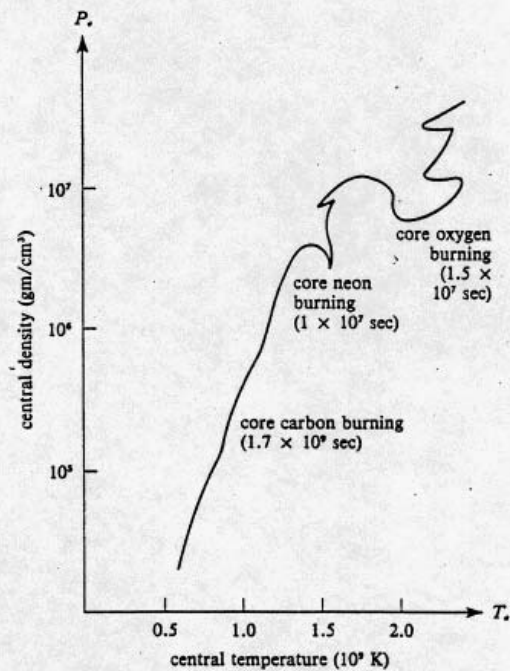


Figure 8.12. Evolutionary history of center of a $25M_{\odot}$ star in late stages. The central density and temperature increase to higher and higher values on timescales less than a year as the iron catastrophe is approached. (Adapted from Weaver and Woosley, *Ninth Texas Symp. Rel. Ap., Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 336, 1980, 335.)

FIG. 2.27 – Evolution schématique d'une étoile massive.

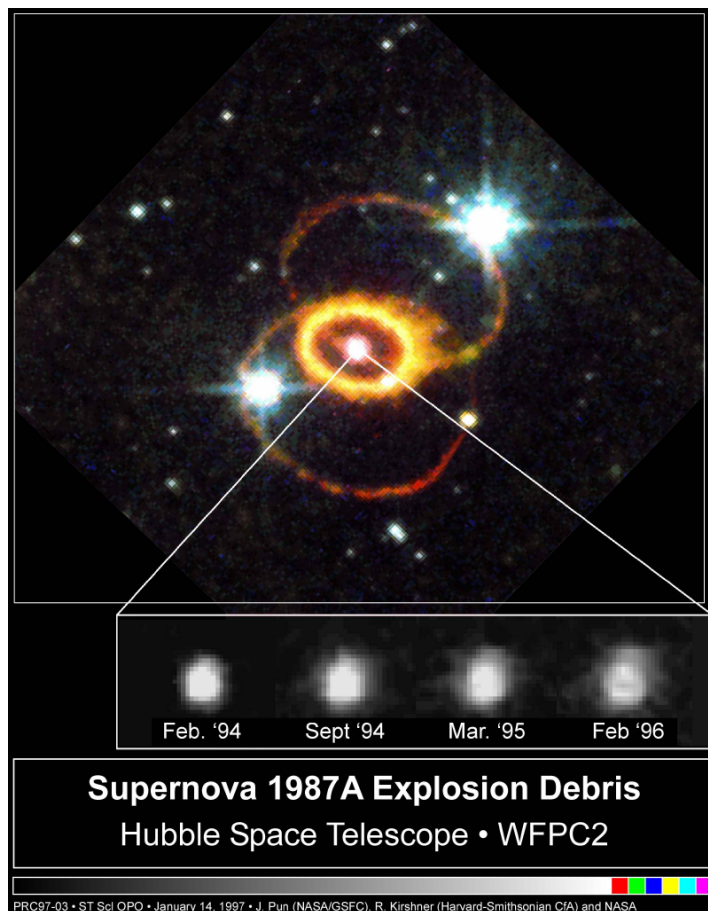


FIG. 2.28 – Image des débris de l'explosion résultant de la Supernova 1987A, ayant eu lieu dans le Grand Nuage de Magellan, situé à 167 kpc. Les anneaux en rouge (Azote NII) seraient les restes d'une nébuleuse planétaire, tandis qu'on observe des ejecta envoyés dans des directions opposées. Leur vitesse est de l'ordre de 3000 km/s.

La branche des Supergéantes (rouges et bleues)

Pour ces dernières étoiles, les modèles prévoient donc une structure interne en *couches d'oignon*: d'une couche externe (l'enveloppe) renfermant de l'Hydrogène, à un coeur dense de Fer, en passant par des couches successives de brûlage de l'Hydrogène, puis de l'Hélium, du Carbone, du Néon, de l'Oxygène et du Silicium.

Une luminosité variant peu et un rayon en expansion, imposent un trajet vers la droite sur le diagramme HR. Cette évolution est de plus en plus rapide: pour une étoile de $15 M_{\odot}$ la durée du brûlage du Carbone est d'environ $6 \cdot 10^3$ ans alors qu'il ne faut que 10^{-2} ans pour le Silicium.

Une fin éclatante: les Supernovae de type II

La formation d'un coeur de Fer pose un grave problème à l'étoile, car il n'est plus possible d'extraire de l'énergie en consommant le Fer. Dès que tout le Silicium

du coeur est transformé en Fer, l'étoile perd son support contre sa propre gravité et le coeur commence à se contracter. L'enveloppe de l'étoile, privée du rayonnement intense des régions centrales, entreprend elle aussi de s'effondrer sur elle-même.

En se contractant, le coeur se réchauffe ($T_c > 5 \cdot 10^9$ K) et le champ de rayonnement devient suffisamment dur pour photodissocier les noyaux massifs de Fer. Ces réactions sont endothermiques et privent le milieu de son énergie. Par ailleurs, la production intense de neutrinos contribue également à la perte d'énergie du coeur, ce qui accélère l'effondrement gravitationnel.

Ce qui arrive exactement à l'enveloppe est encore mal compris. Les modèles actuels (basés sur la théorie des couches successives¹⁵) prévoient la chute de l'enveloppe sur le noyau dense de Fer. Le choc qui en résulterait serait responsable de la gigantesque déflagration qui expulse violemment toute l'enveloppe et la disperse dans le milieu interstellaire: c'est une **supernova de type II**¹⁶ (figure 2.28).

Les réactions nucléaires dominantes sont alors celles de capture radiative de neutrons



Or, cette capture répétée de neutrons produit des isotopes excédentaires en neutrons, donc instables vis-à-vis de la désintégration β^- :



Si le flux de neutrons est suffisamment important pour que le noyau formé ait le temps de capturer un nouveau neutron avant de se désintégrer, on a affaire à un *processus r* (rapide). Si ce n'est pas le cas, c'est un *processus s* (slow=lent).

Le processus s peut se produire lors de la combustion de l'Hélium, mais dans des étoiles ayant déjà des éléments lourds allant jusqu'au Fer. Par contre, le processus r nécessite des flux énormes de neutrons ($\sim 10^{23}$ par seconde) et ne peut se réaliser que dans des phases explosives. Ainsi, les supernovae permettent effectivement la nucléosynthèse des éléments plus lourds que le Fer (Or, Uranium etc...).

Seules les étoiles massives de la population I (étoiles riches en éléments lourds) donnent lieu à des supernovae de type II. La fréquence de ces événements spectaculaires est de l'ordre de 0.02 par an et par galaxie (ie, de l'ordre d'une vingtaine de SNII par an). L'énergie moyenne fournie au milieu interstellaire est de l'ordre de 10^{42} J et il faut attendre près de 70 jours en moyenne pour voir une décroissance de leur luminosité de 3 magnitudes.

Les exemples les plus célèbres de SNII sont celui du Crabe (dans le Taureau) qui fut observée en 1054 par les "astronomes" chinois et SN87A (dans le Grand Nuage de Magellan), observée le 24 février 1987. Le progéniteur de SN87A était une supergéante bleue ($R \sim 40 R_\odot$, $L \sim 10^5 L_\odot$, $M \sim 15 - 20 M_\odot$).

Lors d'une supernova, la matière stellaire riche en éléments lourds se disperse dans le milieu interstellaire. Après quelques dizaines de milliers d'années, elle sera à

15. couches très probablement mises à mal par la convection.

16. Les supernovae sont classifiées spectroscopiquement par Type I et II, selon l'absence ou la présence de l'Hydrogène dans leur spectre. Nous verrons au chapitre 4 ce que sont les supernovae de Type I.

nouveau incorporée à la matière d'une jeune étoile qui, si elle est peu massive, verra se former autour d'elle un cortège de planètes, elles-mêmes enrichies de ces éléments lourds (comme le Carbone, si nécessaire à la vie sur Terre).

Résidus d'étoiles massives: Étoiles à Neutrons et Trous Noirs

Au cours de ce cataclysme stellaire, le coeur, toujours en contraction, n'est pas détruit.

Si celui-ci est peu massif ($1.44 M_{\odot} < M_c < 2 - 3 M_{\odot}$) l'augmentation de la densité va provoquer une neutronisation du milieu. Cette ultime transformation va fournir un support suffisant contre la gravité et l'avènement d'un nouvel astre: une **étoile à neutrons**.

Si le coeur est suffisamment massif ($M_c > 2 - 3 M_{\odot}$), même la pression fournie par les neutrons est insuffisante à arrêter l'effondrement. Celui-ci se poursuit donc jusqu'à ce que la densité locale soit trop grande et modifie profondément la structure de l'espace-temps: c'est la formation d'un **trou noir stellaire**.

A l'heure actuelle, il n'existe pas de simulations numériques permettant de décrire la genèse d'un trou noir à partir d'un effondrement. Quelques groupes de recherche, en particulier aux USA et en Allemagne, développent de gros moyens numériques dans ce sens.

Chapitre 3

Les Objets Compacts

-
- *Ordres de grandeur (masses, rayons)*
 - *Condition de dégénérescence (transition classique, quantique)*
 - *Calcul de la masse de Chandrasekhar (naines blanches et étoiles à neutrons)*
 - *Pulsars: ordres de grandeur, culture générale*
 - *Trous noirs: rayon de Schwarzschild, observations*
 - *Disques d'accrétion*
-

Nous avons vu au chapitre précédent que les objets compacts sont les résidus stellaires, les résultats de l'ultime transformation des étoiles. Les modèles actuels d'évolution stellaire fournissent les prédictions suivantes:

$0.08 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$	naines blanches
$8 M_{\odot} < M < 45 M_{\odot}$	étoiles à neutrons
$45 M_{\odot} < M < 60 M_{\odot}$	trous noirs

Autrement dit, seules les étoiles initialement très massives peuvent donner lieu à un trou noir. Les étoiles de faible masse ($M < 2 M_{\odot}$) et de masse intermédiaire ($2 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$) finissent leurs jours sous forme d'une naine blanche.

La compacité d'un objet est la qualité de celui-ci à créer un champ gravitationnel intense tout en occupant une petite région de l'espace. La façon précise de mesurer cette compacité est de calculer le rapport M/R , autrement dit le potentiel gravitationnel. Dans le tableau ci-dessous (issu de Shapiro & Teukolski) se trouvent quelques données caractéristiques des objets compacts, à comparer aux valeurs solaires.

Objet	Masse (M)	Rayon (R)	Densité moyenne (kg m^{-3})	Potentiel normalisé GM/Rc^2
Soleil	$M_{\odot}$	$R_{\odot}$	10^3	10^{-6}
Naine blanche	$< 1.45 M_{\odot}$	$\sim 10^{-2} R_{\odot}$	$< 10^{10}$	$\sim 10^{-4}$
Étoile à neutrons	$\sim 1.45 - 3 M_{\odot}$	$\sim 10^{-5} R_{\odot}$	$< 10^{18}$	$\sim 10^{-1}$
Trou noir	$> 3 M_{\odot}$	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	~ 1

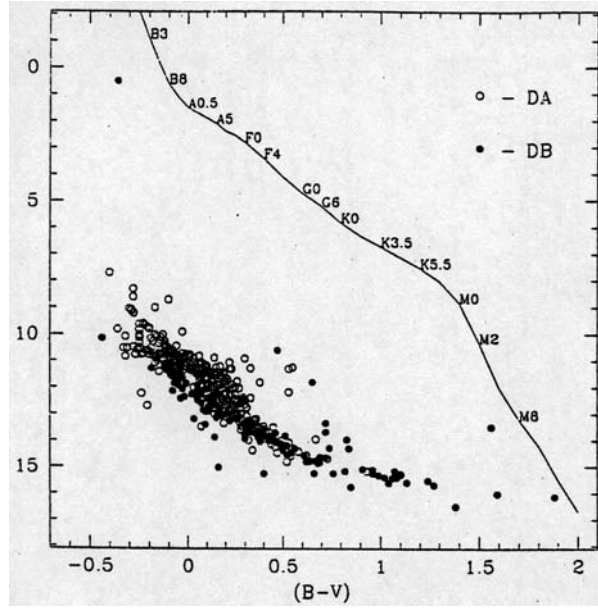


FIG. 3.1 – Position dans un diagramme HR couleur-magnitude de naines blanches, d'après le catalogue McCook & Sion (1987). La ligne continue indique la Séquence Principale avec divers types spectraux. Les symboles indiqués DA représentent des naines blanches dont l'atmosphère est riche en Hydrogène, DB celles pour lesquelles l'atmosphère en est pauvre, contenant essentiellement de l'Hélium.

3.1 Les naines blanches

En 1844, l'astronome allemand Bessel découvre que l'étoile Sirius, de type spectral A1, possède un mouvement apparent avec une période de l'ordre de 50 ans. Il en déduit qu'elle tournait autour d'un compagnon invisible, Sirius B, et put même déduire la masse de celui-ci grâce aux lois de Kepler. Ce compagnon, détecté en 1862 par Clark, est alors connu pour posséder une faible luminosité $L \sim 2 \cdot 10^{-3} L_{\odot}$ (Sirius A émet $L \sim 40 L_{\odot}$) pour une masse $M \sim 0.75$ à $0.95 M_{\odot}$.

Les problèmes commencent lorsque Adams, en 1915, montre que le spectre de Sirius B est comparable à celui d'une étoile blanche ($T_{eff} \simeq 8000$ K). Utilisant alors $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$, il en déduit un rayon $R = 18800$ km (les valeurs actuelles fournissent un rayon quatre fois plus petit).

Qu'était donc cette naine blanche, avec une masse comparable au Soleil mais au rayon 40 fois plus petit? Cela signifiait qu'il y avait des astres composés de matière $\sim 10^4$ fois plus dense que la matière stellaire ordinaire...

C'est en 1926 que Fowler, en utilisant la statistique de Fermi-Dirac (établie par ce dernier quelques mois auparavant), montra qu'un tel astre, s'il était constitué d'électrons dégénérés, pouvait effectivement opposer une pression suffisante contre la gravité et se maintenir ainsi en équilibre hydrostatique.

Une grande part de la recherche actuelle autour des naines blanches consiste à améliorer l'équation d'état de la matière dégénérée. Parallèlement, c'est en affinant

les observations de tels astres compacts que l'on peut étudier l'état de la matière dans des conditions impossibles à réaliser en laboratoire. Par exemple, les observations d'Adams, en montrant un décalage gravitationnel des raies spectrales, fournirent le premier test de la relativité générale.

3.1.1 Equation d'état de la matière dégénérée

Nous avons vu qu'un objet auto-gravitant, constitué de gaz parfait, avait une température moyenne variant comme $T \propto M/R$. Or, la densité moyenne va varier comme $\rho \propto M/R^3$. Lorsque l'étoile a consommé son carburant nucléaire, le coeur se contracte, ce qui augmente la température centrale mais la densité augmente bien plus rapidement. C'est la raison pour laquelle, au-delà d'une certaine contraction, l'approximation des gaz parfaits n'est plus valide: des effets quantiques commencent alors à se faire sentir.

Transition gaz parfait-gaz dégénéré

Lorsque l'étoile a épuisé ses réserves, il n'y a plus de source d'énergie et on peut donc considérer qu'elle suit une évolution quasi-adiabatique. Son énergie interne peut donc s'écrire (voir calcul pour les polytropes)

$$U \equiv \int \frac{P}{\gamma - 1} dV = \frac{3}{2} \frac{\gamma - 1}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R} \quad (3.1)$$

Pour une étoile constituée d'un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$, cette relation permet de calculer une température moyenne $\bar{T}$ stellaire, c'est à dire

$$U = \frac{3}{7} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{2} \frac{Mk\bar{T}}{\mu m_u} \quad (3.2)$$

Lorsque le coeur stellaire va se contracter, cette température augmente ce qui accroît l'agitation thermique des constituants du gaz stellaire. Pour un gaz d'électrons suivant une distribution de Maxwell-Boltzmann, l'écart quadratique moyen en impulsion entre deux électrons est

$$\Delta p_e \simeq (6m_e k\bar{T})^{1/2} \simeq \left(12m_e \frac{GM\mu m_u}{7R} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

La densité de la matière est portée par les ions. Comme on s'intéresse ici au comportement des électrons, on peut écrire cette densité sous la forme

$$\rho = \sum m_i n_i + m_e n_e \simeq \sum m_i n_i = \mu_e m_u n_e \quad \text{avec} \quad \mu_e = \frac{\sum A_i n_i}{\sum Z_i n_i} \quad (3.4)$$

où μ_e est le poids moléculaire par électron. Dans un gaz constitué de Carbone pur ($^{12}_6\text{C}$), le poids moléculaire moyen vaut $\mu = 12/7$ et $\mu_e = 12/6 = 2$. On peut donc connaître la distance moyenne entre deux électrons

$$\Delta x_e \simeq \left(\frac{\mu_e m_u}{\rho} \right)^{1/3} \simeq \left(\frac{4\pi \mu_e m_u R^3}{3M} \right)^{1/3} \quad (3.5)$$

ce qui fournit le volume occupé par un électron dans l'espace des phases

$$\begin{aligned} (\Delta p_e \Delta x_e)^3 &\sim \frac{4\pi}{3M} R^3 \mu_e m_u \left[12m_e \frac{GM}{7R} \mu m_u \right]^{3/2} \\ &\sim 200 \ h^3 \left(\frac{\mu_e}{2} \right) \left(\frac{\mu}{12/7} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où h est la constante de Planck. On voit immédiatement que pour des rayons de l'ordre de $R \sim 3 \cdot 10^{-2} R_\odot$, ce volume devient plus petit que h^3 , ce qui signifie que des effets quantiques doivent intervenir. Les électrons étant des fermions, c'est le principe d'exclusion de Pauli qui devient important. En-deça d'un certain rayon, il ne faut plus utiliser la statistique de Maxwell-Boltzmann, mais celle de Fermi-Dirac.

Notez que l'on aurait pu faire ce calcul avec les ions. Dans ce cas, m_e serait remplacé par m_u (et μ_e par μ mais c'est sans grande importance) ce qui fournit un rayon critique beaucoup plus petit. Ceci justifie donc pourquoi ce sont les électrons qui, les premiers, deviennent dégénérés.

Rappels de théorie cinétique

Soit $d\mathcal{N}_\alpha$ le nombre de particules (pour une espèce α) comprises dans l'intervalle $\vec{x} + d\vec{x}$ et $\vec{p} + d\vec{p}$ de l'espace des phases. Ce nombre d'occupation de particules est relié à la densité de probabilité f_α par

$$\frac{d\mathcal{N}_\alpha}{d^3x d^3p} = \frac{g_\alpha}{h^3} f_\alpha \quad (3.7)$$

où g_α est le poids statistique¹. La densité spatiale de particules de l'espèce α est alors simplement

$$n_\alpha = \int \frac{d\mathcal{N}_\alpha}{d^3x d^3p} d^3p = g_\alpha \int f_\alpha \frac{d^3p}{h^3} \quad (3.8)$$

et la densité d'énergie associée est

$$\epsilon_\alpha = \int E_\alpha \frac{d\mathcal{N}_\alpha}{d^3x d^3p} d^3p = g_\alpha \int E_\alpha f_\alpha \frac{d^3p}{h^3} \quad (3.9)$$

où $E_\alpha^2 = p^2 c^2 + m_\alpha^2 c^4$, m_α étant la masse d'une particule de l'espèce α . La pression de ce gaz est due au flux d'impulsion associé, c'est à dire

$$P_\alpha = \frac{1}{3} \int p v_\alpha \frac{d\mathcal{N}_\alpha}{d^3x d^3p} d^3p = \frac{g_\alpha}{3} \int f_\alpha p v_\alpha \frac{d^3p}{h^3} \quad (3.10)$$

où le facteur $1/3$ provient de l'isotropie de ce flux et $v_\alpha = pc^2/E_\alpha$.

Pour un gaz idéal (ie, pour lequel on peut négliger les interactions électrostatiques), la densité de probabilité est fournie par

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1} \quad (3.11)$$

1. ie, le nombre d'états de même impulsion $\vec{p}$: $g = 2S + 1$ pour des particules massives de spin S , $g = 2$ pour les photons et $g = 1$ pour les neutrinos.

où μ est ici le potentiel chimique (à ne pas confondre avec le poids moléculaire moyen). Le signe + décrit les fermions (statistique de Fermi-Dirac), le signe - les bosons (statistique de Bose-Einstein). La statistique de Maxwell-Boltzmann est obtenue comme une limite à petite température.

Gaz d'électrons dégénérés

A mesure que la densité augmente, nous avons vu que ce sont les électrons qui subissent les premiers les effets du principe de Pauli. Nous allons utiliser un modèle simplifié où les électrons sont complètement dégénérés. Dans ce cas, la densité de probabilité peut être approximée par

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E \leq E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases} \quad (3.12)$$

où $E_F^2 = p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4$ est l'énergie de Pauli des électrons (p_F l'impulsion de Pauli). Dans ce cas très simple, on peut calculer la densité électronique

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \\ &= \frac{x^3}{3\pi^2 \lambda_e^3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $\lambda_e = \hbar/m_e c$ a la dimension d'une longueur² et

$$x = \frac{p_F}{m_e c} \quad (3.14)$$

est un paramètre mesurant l'importance des aspects relativistes. Au fur et à mesure que le cœur se contracte, les électrons initialement non relativistes ($x \ll 1$) vont atteindre des énergies plus élevées et devenir ultra-relativistes ($x \gg 1$).

La pression dans le cas d'un gaz idéal d'électrons dégénérés est

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^x \frac{x'^4 dx'}{(1+x'^2)^{1/2}} \\ &= \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \phi(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

où la fonction $\phi(x)$ est sans dimension et vaut

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x (1+x^2)^{1/2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\} \quad (3.16)$$

2. c'est la longueur Compton de l'électron, qui prend un sens particulier en théorie quantique des champs. Dans cette théorie, une force entre deux particules résulte d'un échange d'information entre elles. Cet échange s'effectue par l'émission de particules virtuelles dont les propriétés caractérisent le type d'interaction. La création, à partir du vide, d'une particule virtuelle de masse au repos m_0 (d'énergie $\Delta E = m_0 c^2$) ne viole pas la conservation de l'énergie tant que la particule ne s'actualise que pendant $\Delta t < \hbar/\Delta E$. Or, la distance maximale parcourue par cette particule virtuelle est $c\Delta t$. Ainsi, la portée maximale d'une interaction est $\lambda \sim \hbar/m_0 c$, longueur Compton de la particule virtuelle échangée. Pour la force électromagnétique comme pour la force gravitationnelle, la particule échangée est un boson de masse nulle: la portée est infinie.

Bien que la pression du gaz soit due aux électrons dégénérés, la densité de l'étoile est due aux espèces les plus massives, à savoir les ions. On peut alors écrire

$$\rho = \mu_e m_u n_e \simeq 9.7 \cdot 10^8 \mu_e x^3 \text{ kg m}^{-3} \quad (3.17)$$

Ainsi, on a une relation du type $x = x(\rho)$ et $P_e = P_e(x)$. Autrement dit, un gaz idéal d'électrons complètement dégénérés possède une équation du type polytropique

$$P_e = K \rho^\Gamma \quad (3.18)$$

où K et l'indice polytropique Γ dépendent de la valeur de x . Deux cas extrêmes se présentent:

(1) Electrons non-relativistes ($x \ll 1$): Dans ce cas la fonction $\Phi(x)$ devient

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{15\pi^2} \left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 + \dots \right)$$

ce qui fournit les valeurs suivantes

$$\Gamma = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad K_1 = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e m_u^{5/3} \mu_e^{5/3}} \quad (3.19)$$

(2) Electrons ultra-relativistes ($x \gg 1$): Ici $\Phi(x)$ s'écrit

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{12\pi^2} \left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2} \ln 2x + \dots \right)$$

ce qui fournit les valeurs

$$\Gamma = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_u^{4/3} \mu_e^{4/3}} \quad (3.20)$$

Nous avons donc maintenant tous les outils nécessaires pour construire un modèle polytropique d'une naine blanche en équilibre hydrostatique. Noter qu'en régime dégénéré, la température ne joue plus de rôle dans l'équilibre mécanique de l'étoile. C'est la raison pour laquelle certaines phases de l'évolution stellaire sont instables et donnent lieu à de violents sursauts (ex, flash de l'Hélium).

3.1.2 Structure mécanique: théorie de Chandrasekhar

Les équations de la structure mécanique d'un polytrope ont été établies au chapitre précédent (sect. 2.3.2). Les équations de Lane-Emden peuvent être numériquement résolues dans les deux cas décrits ci-dessus, avec $n = 1/(\Gamma - 1)$. Lorsque le coeur d'une étoile va s'effondrer faute de combustible, l'augmentation de la densité va produire la dégénérescence des électrons d'abord en régime non-relativiste puis, si cet effondrement continue, en régime ultra-relativiste.

Chandrasekhar fit ce calcul en 1930 et obtint la relation masse-rayon suivante

$$M = 4\pi R^{\frac{3-n}{1-n}} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} x_n^{\frac{3-n}{n-1}} x_n^2 \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x_n} \quad (3.21)$$

où ici, $x_n = R/R_*$ est le rayon stellaire normalisé pour un paramètre n donné (à ne pas confondre avec le paramètre de relativité).

Dans le cas non-relativiste, nous avons démontré que $n = 3/2$ était une bonne approximation et les tables fournissent $x_{3/2} \simeq 3.65$ et $(x^2\varphi')_{x_{3/2}} = 2.71$, ce qui donne

$$R = 1.12 \cdot 10^4 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/6} \left(\frac{\rho_c}{10^9 \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/6} \text{ km} \quad (3.22)$$

$$M = 0.49 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/2} \left(\frac{\rho_c}{10^9 \text{ kg m}^{-3}} \right)^{1/2} M_\odot \quad (3.23)$$

$$= 0.7 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5} \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-3} M_\odot \quad (3.24)$$

Que signifie cette relation masse-rayon? L'équilibre hydrostatique du coeur dégénéré impose que si la masse de celui-ci vient à augmenter, alors le coeur doit se contracter! La masse du coeur augmente car les couches superficielles continuent de brûler de l'hélium, ce qui produit ainsi du carbone qui vient alimenter le coeur. Cette augmentation de masse entraine donc une contraction supplémentaire, donc une augmentation de l'énergie des électrons. S'il y a suffisamment de masse dans les couches externes, alors le coeur va inévitablement passer dans l'autre régime.

Lorsque le coeur devient ultra-relativiste alors $n = 3$, $x_3 \simeq 6.89$ et $(x^2\varphi')_{x_3} = 2.01$, ce qui impose un nouvel équilibre devant vérifier

$$R = 3.35 \cdot 10^4 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2/3} \left(\frac{\rho_c}{10^9 \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/3} \text{ km} \quad (3.25)$$

et posséder une masse

$$M_{Ch} = 1.457 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^2 M_\odot$$

(3.26)

où M_{Ch} , la *masse de Chandrasekhar*, apparait indépendante du rayon! Ce nouvel équilibre semble encore plus étrange que le précédent. Si le coeur, lorsqu'il devient ultra-relativiste, a une masse $M_c < M_{Ch}$, il n'est pas à l'équilibre et le gradient de pression fait enfler le coeur. Ceci peut éventuellement avoir pour résultat de le "refroidir" (les électrons deviennent non-relativistes) et l'on se retrouve sur l'équilibre précédent ($P = P_e = K_1 \rho^{5/3}$) avec un rayon plus grand. Mais si le coeur devient ultra-relativiste avec une masse $M_c > M_{Ch}$, l'équilibre est rompu et la gravité l'emporte: l'effondrement gravitationnel est inévitable.

Ainsi, la masse de Chandrasekhar est nécessairement la masse maximale d'une naine blanche (voir figure 3.2). Du coup, cela implique également que les étoiles

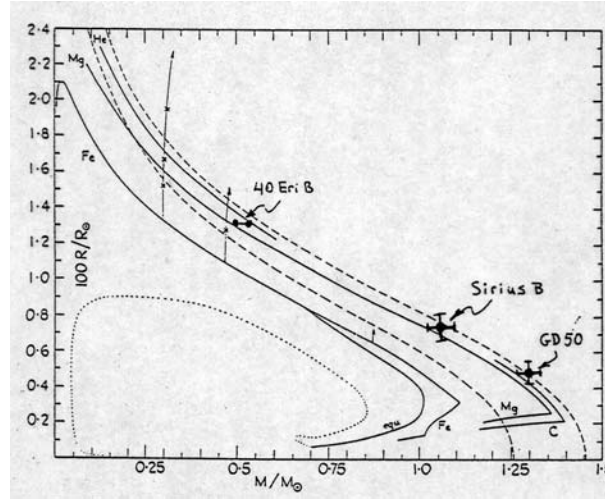


FIG. 3.2 – Relations théoriques masse-rayon de naines blanches, obtenues dans le cas d'une dégénérescence complète à température nulle. Chaque courbe est obtenue pour une composition chimique donnée (He, C, Mg, Fe). Les courbes en pointillés sont données par la théorie de Chandrasekhar, pour $\mu_e = 2$ et $\mu_e = 2.15$ (de gauche à droite). Plus le coeur est composé d'éléments lourds, plus l'astre est petit (pour une même masse). Les trois points indiquent la position et les barres d'erreurs associées de trois naines blanches confirmées.

massives, qui vont former un coeur dégénéré avec une masse très probablement supérieure à cette masse limite, doivent avoir une évolution dramatiquement différente des étoiles moins massives.

3.1.3 Le refroidissement des naines blanches

Dans la section précédente, nous avons utilisé un modèle qui, bien que simplifié, nous a permis de décrire l'équilibre mécanique d'une naine blanche. Grâce à ce modèle, nous avons ainsi obtenu une relation masse-rayon et, surtout, la valeur de la masse maximale pour ces objets. Ici, nous allons également utiliser un modèle simplifié pour décrire l'équilibre thermique d'une naine blanche. Cette approche va nous fournir la façon dont ces objets compacts évoluent, autrement dit, comment ils se refroidissent.

Structure thermique

Une naine blanche est constituée d'un coeur composé essentiellement d'atomes de Carbone, mais dont la pression est fournie par des électrons dégénérés. Cette dégénérescence introduit un élément physique nouveau: la conduction de la chaleur par les électrons à la surface de la mer de Fermi est environ 4000 fois plus efficace que le transport radiatif. Ceci et la petite taille de la naine blanche implique que la moindre inhomogénéité locale en température est presque instantanément répartie

dans tout le volume: l'étoile est globalement thermalisée et l'approximation d'un coeur isotherme (à une température T_*) est justifiée.

La surface d'une naine blanche est composée essentiellement d'Hélium et d'Hydrogène qui, d'après les observations spectroscopiques, sont portés à une température $T \sim 10^4 - 10^5$ K. Pour l'atmosphère d'une étoile, il est en général justifié de faire l'hypothèse d'équilibre radiatif: la luminosité L produite par le coeur est donc simplement transportée vers l'extérieur sans gains ni pertes³. La gravité en surface est telle que l'échelle caractéristique de variation de la pression est bien plus petite que le rayon. Cela signifie que l'extension spatiale de l'atmosphère d'une naine blanche est négligeable devant son rayon (de l'ordre de dix mille kilomètres). Cela signifie également que dans ces conditions de gravité, l'atmosphère est dense et donc très probablement optiquement épaisse. On peut alors faire l'approximation de diffusion

$$L(r) = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} dV = \int \vec{F}_{rad} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 F_{rad}(r) = -4\pi r^2 \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_R} \frac{dT}{dr} \quad (3.27)$$

Qui dit transport radiatif, dit coefficient de transport radiatif, il faut donc spécifier quelle est la source dominante d'opacité de Rosseland κ_R pour un tel milieu. Etant donné les conditions de température et de densité, l'opacité est dominée par les collisions entre électrons libres (libre-libre) et électrons libres-électrons liés (libre-lié). C'est le régime d'opacité dit de Kramers

$$\kappa_R = \kappa_0 \rho T^{-7/2} \quad \text{avec} \quad \kappa_0 = 4.34 \cdot 10^{23} Z(1+X) \text{ m}^2 \text{kg}^{-1} \quad (3.28)$$

L'ensemble des équations qui régissent l'équilibre thermique de l'atmosphère d'une naine blanche est donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} L = -4\pi r^2 \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_R} \frac{dT}{dr} & \text{conservation de l'énergie} \\ \frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm(r)}{r^2} & \text{équilibre hydrostatique} \\ m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' & \text{conservation de la masse} \\ P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT & \text{équation d'état} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Etant donné la faible extension de l'atmosphère et la rapide décroissance de la densité, on va oser faire l'approximation $m(r) \simeq M$. On peut alors aisément intégrer les équations suivantes et obtenir

$$\frac{dP}{dT} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dT} = \frac{16\sigma}{3} \frac{4\pi GM}{\kappa_0 L} \frac{T^{13/2}}{\rho} \quad (3.30)$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \int_P^0 P dP &= \frac{16\sigma}{3} \frac{4\pi GMk}{\kappa_0 \mu m_u L} \int_T^0 T^{15/2} dT \\ P &= \left(\frac{16^2 \pi}{51} \frac{GMk\sigma}{\kappa_0 \mu m_u L} \right)^{1/2} T^{17/4} \\ \rho &= \left(\frac{16^2 \pi}{51} \frac{GM\sigma \mu m_u}{\kappa_0 k L} \right)^{1/2} T^{13/4} \end{aligned} \quad (3.31)$$

3. Dans le cas, par exemple, d'un fort vent stellaire propulsé par pression de radiation, il n'est pas évident qu'une telle approximation reste valide.

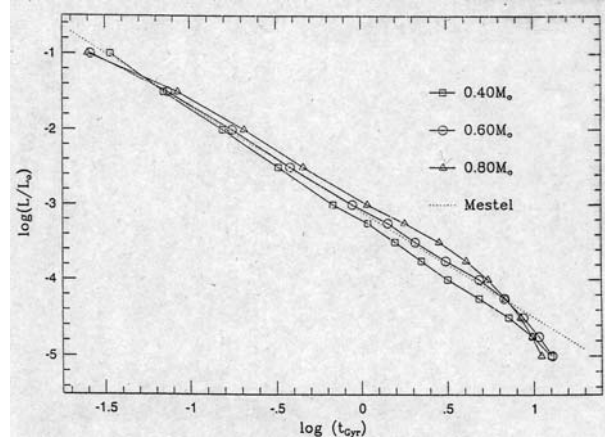


FIG. 3.3 – Courbes de refroidissement en fonction de la masse, calculées en prenant en compte l'évolution thermique détaillée de la naine blanche (Hansen & Kawaler 1994). La courbe en pointillée est ce que prédit le modèle simple de Mestel présenté dans ce cours.

Nous avons donc la relation, valable uniquement dans l'atmosphère, entre la densité ou la pression et la température. On va ensuite oser faire un raccord brutal entre le coeur et l'atmosphère, c'est à dire obtenir la densité ρ_* où la pression du coeur dégénéré est égale à la pression atmosphérique,

$$\frac{\rho_* k T_*}{\mu_e m_u} = K_1 \rho_*^{5/3} \quad (3.32)$$

ce qui fournit une transition coeur-atmosphère à la densité

$$\rho_* = 2.4 \cdot 10^{-5} \mu_e T_*^{3/2} \text{ kg m}^{-3} \quad (3.33)$$

Ce faisant, nous nous sommes donnés un moyen de relier une grandeur observable, la luminosité L (voir figure 3.3), à une grandeur cachée d'importance, la température T_* du coeur isotherme. En effet, en injectant la densité de transition dans les expressions précédentes, on obtient

$$L = 5.7 \cdot 10^2 \frac{\mu/\mu_e}{Z(1+X)} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) T_*^{7/2} \text{ J s}^{-1} \quad (3.34)$$

La composition chimique de l'atmosphère est connue par spectroscopie, la luminosité est directement observée mais la masse est le plus souvent une inconnue. Cependant, la température dépend relativement peu de cette dernière (puissance $2/7$). Pour $M \sim M_\odot$, et une valeur typique $L \sim 10^{-3} L_\odot$, on obtient des températures centrales $T_* \sim 10^6 - 10^7$ K et des densités à la transition $\rho_* \sim 10^6 \text{ kg m}^{-3}$.

Evolution des naines blanches

La température centrale est trop faible pour que des réactions thermonucléaires s'y produisent. Le coeur subit donc une évolution régie par l'équation

$$L = -\frac{dE}{dt} \quad (3.35)$$

où $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ est la luminosité émise (attention $T_{eff} \neq T_*$) et E l'énergie totale de la naine. En l'absence de réactions nucléaires, le réservoir d'énergie disponible est l'énergie interne stockée dans la naine blanche par les ions. L'énergie interne d'un ion s'écrit

$$u = \int c_V dT = \int \frac{3}{2} k dT = \frac{3}{2} k T_* \quad (3.36)$$

où la capacité calorifique à volume constant c_V ne vaut $3k/2$ que pour un gaz idéal monoatomique et où T_* est la température du coeur. L'énergie interne de la naine, constituée de M/Am_u ions, vaut alors

$$U = \frac{3}{2} \frac{M}{Am_u} k T_* \simeq 10^{40} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{T_*}{10^6 \text{ K}} \right) \text{ J} \quad (3.37)$$

L'énergie stockée est donc considérable, ce qui laisse supposer qu'une naine blanche va "vivre sur ses rentes" pendant encore de longues années. On peut faire le calcul de la durée de vie d'une naine blanche, à savoir la durée $t_{vie} = t - t_0$ au bout de laquelle elle s'est suffisamment refroidie pour que $T_*(t) \ll T_*(t_0)$. L'équation (3.34) peut s'écrire $L = C M T_*^{7/2}$, où C est une constante. La conservation de l'énergie pour la naine s'écrit alors

$$C M T_*^{7/2} = - \frac{3kM}{2Am_u} \frac{dT_*}{dt} \quad (3.38)$$

ce qui s'intègre facilement et fournit

$$\begin{aligned} t_{vie} = t - t_0 &= \left(\frac{3k}{5C Am_u} \right) \left(\frac{1}{T_*^{5/2}(t)} - \frac{1}{T_*^{5/2}(t_0)} \right) \\ &\simeq \frac{3k}{5C Am_u} \frac{1}{T_*^{5/2}(t)} \\ &\simeq \frac{3k}{5AC^{2/7} m_u} \left(\frac{L}{M} \right)^{-5/7} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\simeq 10^9 \left(\frac{L}{10^{-3} L_\odot} \right)^{-5/7} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{5/7} \text{ ans} \quad (3.40)$$

Cette expression montre que plus une naine blanche est lumineuse et plus sa durée de vie est courte: elle se refroidit d'autant plus vite qu'elle est chaude. Lorsqu'elle est blanche, la naine est jeune puis elle vieillit et devient rouge puis noire⁴. La comparaison aux observations se fait en regardant le nombre de naines blanches détectées ayant une luminosité donnée. Plus la durée de vie d'une naine blanche ayant une certaine luminosité est grande et plus on va en détecter. Ainsi, la courbe du nombre de naines détectées en fonction de la luminosité devrait suivre celle de $t_{vie}(L)$. En fait, on trouve que l'expression ci-dessus décrit assez bien la distribution

4. Attention à l'abus de langage concernant les naines brunes: celles-ci sont des soleils avortés, ie des planètes gazeuses de masse $M < 0.08 M_\odot$ trop faible pour allumer les réactions thermonucléaires.

des naines jusqu'à une luminosité de l'ordre de $10^{-4} L_{\odot}$, mais au-delà, elle prédit un nombre trop élevé de naines blanches. Cela signifie donc qu'en deçà de cette luminosité, la théorie simple que nous avons développé prévoit un refroidissement trop lent et donc une surestimation du nombre de naines observable.

Ce “manque” de naines noires pourrait peut-être s'expliquer par la cristallisation des ions dans le cœur de l'astre moribond. En se refroidissant, les ions peuvent former un cristal ce qui va diminuer brusquement la capacité calorifique c_V et entraîne donc un refroidissement supplémentaire non pris en compte ici. Ce type de calcul (équation d'état) n'a pas encore été fait de façon pleinement satisfaisante.

Cependant, un calcul récent (Hansen, 1998) du refroidissement d'une naine blanche, incluant les effets de transfert de rayonnement dans son atmosphère, semblent montrer que la composition chimique de celle-ci joue un rôle crucial dans sa luminosité. Ainsi, seules les naines ayant une atmosphère composée essentiellement d'Hélium suivraient le scénario décrit ci-dessus. Par contre, celles ayant encore de l'Hydrogène auraient un comportement différent à faible température: comme l'Hydrogène devient moléculaire, l'opacité dans le rouge augmente (par la possibilité qu'à H_2 d'absorber du rayonnement par des transitions moléculaires) ce qui, (1) maintient la chaleur de la naine plus longtemps et rallonge ainsi la durée de son observabilité et (2) la rend bleue et non rouge au fur et à mesure qu'elle vieillit (figure 3.5).

“Quelques” difficultés

Toutes les naines blanches sont des rotateurs lents, c'est à dire des objets dont la vitesse équatoriale observée est beaucoup plus petite que la vitesse keplerienne ($V \sin i < 100 \text{ km s}^{-1}$, où i est l'angle d'observation). Or, si le moment cinétique de l'étoile progénitrice a bien été conservé, la naine blanche devrait tourner beaucoup plus rapidement! Il faut donc imaginer un processus de freinage lors de la formation de la naine, ou bien un processus d'extraction du moment cinétique de l'étoile lorsque celle-ci expulse ses couches externes et engendre une nébuleuse planétaire. Il n'y a plus qu'à...

Environ 2% des naines blanches possèdent un fort champ magnétique ($\sim 10^2 - 10^5$ T). L'explication de la présence de ce champ si intense est reportée sur le progéniteur: ce champ serait simplement le champ résiduel qu'avait une étoile particulière de type spectral A ou B. De telles étoiles sont en effet connues pour posséder de forts champs magnétiques, mais dont l'origine reste encore inconnue: champ fossile ou bien effet dynamo particulièrement efficace?

La physique de ces objets compacts est loin d'être simple et fait appel à des modèles de plus en plus complexes: comportement de la matière atmosphérique en présence de forts champs gravitationnel et magnétique, mouvements convectifs dans l'atmosphère, accréation de matière éventuelle (cf. chapitre suivant), perte de masse par pression de radiation, brûlage nucléaire résiduel surfacique, diffusion de la composition chimique etc...

Exercice: Validation a-posteriori des hypothèses

Vérifier l'hypothèse d'une atmosphère optiquement épaisse et pour laquelle $m(r) \sim$

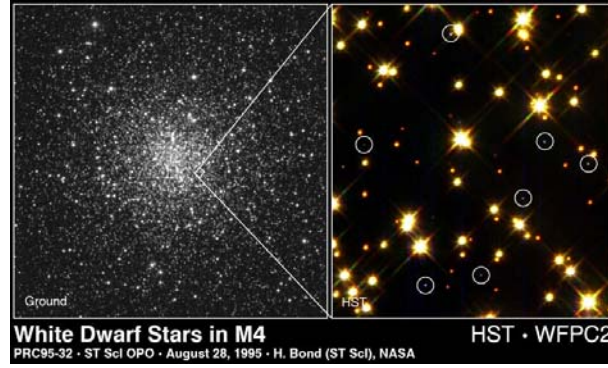


FIG. 3.4 – Images de l'amas globulaire (donc vieux) M_4 , le plus proche de nous (il est situé à 7000 al) et donc le meilleur candidat pour la recherche de naines blanches. L'image de gauche a été obtenue à partir d'un télescope au sol, celle de droite à partir du télescope spatial Hubble. Les cercles montrent 8 objets identifiés comme des naines blanches. A partir de la détermination rigoureuse de l'âge des naines blanches, on obtient des valeurs inférieures de l'âge de l'univers.

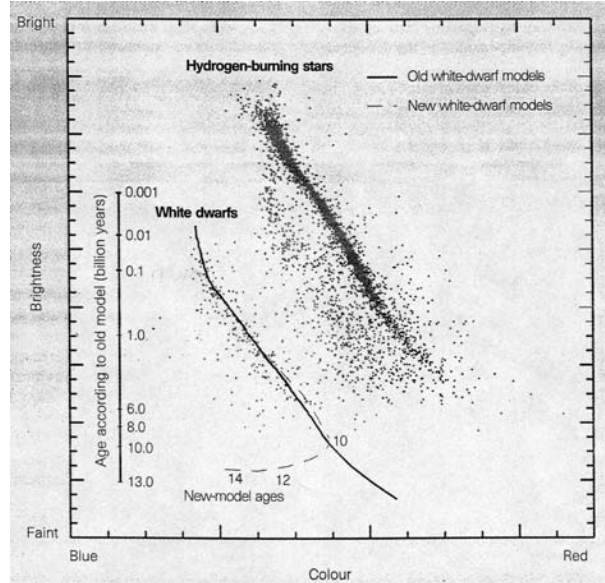


FIG. 3.5 – Diagramme HR indiquant la Séquence Principale et les naines blanches dans la Galaxie (situées dans M_4). Le trait plein indique la courbe de refroidissement d'une naine obtenue à partir de modèles ne traitant pas le transfert de rayonnement dans l'atmosphère. La courbe en trait mince indique le nouveau tracé évolutif en prenant en compte cet effet. Les chiffres indiquent l'âge attendu de ces naines (en 10^n ans), montrant ainsi que certaines naines sont peut-être beaucoup plus vieilles qu'on ne l'attendait.

M. Enfin, justifier pourquoi l'énergie de la naine blanche est essentiellement l'énergie interne des ions.

Reprenons les valeurs numériques obtenues pour $M \sim M_\odot$, $R \sim 10^4$ km et une valeur typique $L \sim 10^{-3} L_\odot$. Avec les hypothèses effectuées, on obtient une température centrale $T_* \sim 10^6$ K et une densité à la transition $\rho_* \sim 10^6$ kg m⁻³. Cette densité est bien plus faible que la densité centrale (choisie $\sim 10^9$ kg m⁻³), ce qui justifie bien $m(r) \sim M$.

L'échelle caractéristique de variation de la pression atmosphérique s'obtient à partir de l'équilibre hydrostatique:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM}{r^2} \quad \text{avec} \quad P = \rho C_s^2$$

$C_s = (kT/\mu m_u)^{1/2}$ étant la vitesse du son. Dans une atmosphère isotherme (ou dans laquelle la variation de pression est surtout due à la densité), on peut écrire cette équation en ordre de grandeur

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \Delta r \frac{GM}{R^2 C_s^2}$$

qui, lorsqu'on obtient une variation relative de densité de l'ordre de l'unité, nous fournit l'échelle caractéristique $\Delta r = R^2 C_s^2 / GM \simeq 6 \cdot 10^3$ m, de l'ordre du kilomètre. En intégrant l'équation hydrostatique pour une atmosphère isotherme et en posant $r = R + h$ avec $h \ll R$, on obtient

$$\rho(h) = \rho(R) e^{-\frac{GM}{C_s^2 R^2} h}$$

ce qui redonne bien la même échelle caractéristique de variation (décroissance de $1/e$ de la densité). Le libre parcours moyen effectif des photons, qui est donné par

$$\lambda \simeq \frac{1}{\rho \kappa_R} \sim \frac{T_*^{7/2}}{\kappa_0 \rho_*^2} \simeq 10^{-15} \text{ m},$$

est beaucoup plus petit que l'échelle de variation de la densité atmosphérique. On peut donc considérer que l'atmosphère est optiquement épaisse.

Le rapport énergie interne sur énergie gravitationnelle vaut

$$\frac{V}{U} \sim \frac{GM^2/R}{3MkT_*/2Am_u} \simeq 10^4 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-1} \left(\frac{T_*}{10^6 \text{ K}} \right)^{-1} \quad (3.41)$$

ce qui montre que l'énergie stockée dans les ions est bien plus petite que l'énergie gravitationnelle de la naine! Cependant, ce qui produit la luminosité est la variation temporelle de son énergie totale. Or, pour qu'il y ait une variation de l'énergie gravitationnelle, il faudrait que la naine puisse se contracter, ce qui n'est plus possible en régime complètement dégénéré pour $M < M_{ch}$.

3.2 Les étoiles à neutrons

Nous avons vu que pour une naine blanche, l'énergie des électrons E_e était de l'ordre de l'énergie de Fermi E_F . Tant que $E_F < m_e c^2$, une structure stable peut se maintenir en équilibre hydrostatique avec des valeurs typiques $R \sim 10^4$ km et $M \sim 0.7 M_\odot$. Cette structure impose que le rayon diminue si la masse augmente, augmentant ainsi l'énergie de Fermi. Lorsque $E_F > m_e c^2$, l'équilibre n'existe que pour une masse critique, la masse de Chandrasekhar $M_{Ch} \sim 1.4 M_\odot$. Lorsque le coeur stellaire d'électrons dégénérés a une masse supérieure à la limite de Chandrasekhar, l'effondrement gravitationnel se déclenche ce qui conduit la matière vers des états encore plus denses jusqu'à ce que la réaction

$$e^- + p^+ \rightarrow n + \nu \quad (3.42)$$

se produise. En effet, cette réaction ne peut se produire que pour des énergies $\Delta E > \Delta m c^2$, avec $\Delta m \simeq m_n - m_p \sim 3m_e$. Dans des conditions normales, le neutron est instable et redonne un électron et un proton. Ici, la contraction et donc l'augmentation incessante de la densité force la neutronisation de la matière (l'énergie des électrons atteint et dépasse $m_e c^2$).

Ce scénario fut proposé en 1932 par Baade et Zwicky, montrant ainsi la possibilité théorique de *neutronisation* de la matière stellaire condensée, et donc de la formation d'une "étoile" constituée essentiellement de neutrons.

Au-delà d'une densité critique $\rho_d \simeq 4 \cdot 10^{14}$ kg m⁻³, les ions libèrent spontanément les neutrons ce qui augmente considérablement leur densité: le coeur devient une sorte de soupe de neutrons. Pour se fixer les idées, lorsque $\rho \sim \rho_d$, la pression des neutrons est encore négligeable $P \sim P_e \gg P_n$, puis elle devient dominante au fur et à mesure que la neutronisation se produit: $P_n \sim 0.5P$ pour $\rho \sim 10\rho_d$, $P_n \sim 0.8P$ pour $\rho \sim 100\rho_d$.

Oppenheimer et Volkoff firent en 1939 le premier modèle de structure interne d'une étoile à neutrons en incluant les effets de relativité générale. Depuis, les divers théoriciens s'échinent sur la forme correcte de l'équation d'état de cette matière bizarre.

Jocelyn Bell et Hewish découvrirent en 1967 le premier pulsar radio qui fut interprété dès 1968 par Gold comme étant une étoile à neutrons possédant un champ magnétique incliné. Tel un phare côtier, chaque passage devant nous d'un pôle magnétique s'accompagne d'une émission de particules qui émettent en ondes radio. La découverte des pulsars relança ainsi l'étude des étoiles à neutrons, laissée de côté devant les difficultés théoriques rencontrées.

3.2.1 Modèles d'étoiles à neutrons

Modèles polytropiques

Les neutrons devenant à leur tour dégénérés, ils offrent une pression P_n qui tend à s'opposer à la contraction. Le raisonnement suivi pour les naines blanches peut être à nouveau appliqué ici. On va donc chercher à construire un modèle d'étoile

à neutrons en équilibre hydrostatique. Pour simplifier, la matière sera supposée constituée *uniquement* de neutrons, formant un gaz idéal complètement dégénéré.

A priori, naïvement, il suffit de reprendre les calculs de la section précédente et de faire les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} m_e &\rightarrow m_n \\ \mu_e &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

On a également un paramètre de relativité

$$x = \frac{p_F}{m_n c} \quad (3.43)$$

où p_F est l'impulsion de Fermi des neutrons. On obtient à nouveau les deux limites pour lesquelles l'équation d'état prend une forme polytropique

$$P = K \rho^\Gamma \quad (3.44)$$

où la densité $\rho = m_n n_n$ est la densité de neutrons. Ces deux cas limites sont les suivants :

(1) Neutrons non-relativistes ($x \ll 1$) : ce qui fournit

$$\Gamma = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad K_1 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_n^{8/3}} \quad (3.45)$$

(2) Neutrons ultra-relativistes ($x \gg 1$) : où

$$\Gamma = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{m_n^{4/3}} \quad (3.46)$$

Avec ces valeurs et à l'aide de l'équation (3.21), on obtient une relation masse-rayon dans le cas non-relativiste de la forme

$$R = 14.6 \left(\frac{\rho_c}{10^{18} \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/6} \text{ km} \quad (3.47)$$

$$M = \left(\frac{R}{15.1 \text{ km}} \right)^{-3} M_\odot \quad (3.48)$$

Sans surprise, nous obtenons un rayon d'équilibre beaucoup plus petit que pour les naines blanches, et la même dépendance masse-rayon, caractéristique de la matière dégénérée. Par ailleurs, nous pouvons interpréter la masse ci-dessus comme étant la masse minimale $M_{\min}$ d'une étoile à neutrons. Cette masse dépend donc de la densité centrale (imposée par la condition de dégénérescence des neutrons non-relativistes) et de l'équation d'état. En tout état de cause, on a bien sûr $M_{\min} > M_{Ch}$.

Dans le cas ultra-relativistique, nous obtenons

$$R = 52.1 \left(\frac{\rho_c}{10^{18} \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/3} \text{ km} \quad (3.49)$$

$$M = 5.86 M_\odot \quad (3.50)$$

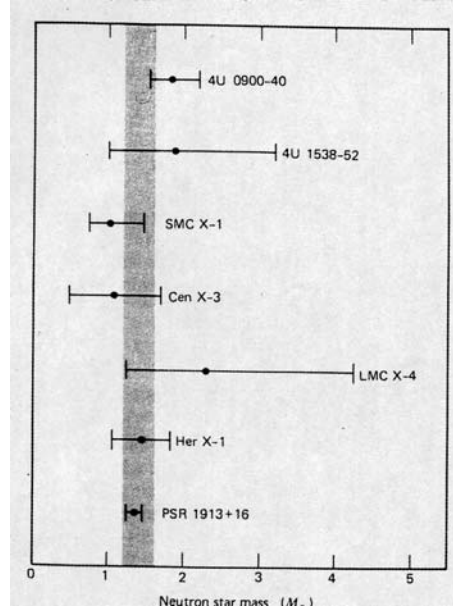


FIG. 3.6 – *Masses d'étoiles à neutrons obtenues à partir d'observations de systèmes binaires. À part PSR 1913+16, qui est un système constitué de deux étoiles à neutrons, les autres six sont des pulsars X binaires (Rappaport & Joss 1983).*

Il existe donc une masse maximale $M_{max} \simeq 5.86 M_{\odot}$ indépendante du rayon au-delà de laquelle il n'est plus possible d'obtenir une situation d'équilibre hydrostatique. D'après ce modèle simple, tout cœur constitué de neutrons dégénérés de masse supérieure à cette masse critique s'effondre sur lui-même. Pour ces densités, on ne connaît pas d'autre source de pression susceptible d'arrêter l'effondrement: le cœur devient donc un trou noir.

L'importance de l'équation d'état

La détermination précise de M_{max} est cruciale pour savoir si tel astre “invisible”⁵ est un trou noir ou bien une étoile à neutrons. Or, cette masse maximale dépend fortement de l'équation d'état. En effet, pour une équation d'état polytropique $P \propto \rho^{\Gamma}$, plus Γ est petit (ie, une équation “douce”) et plus la matière est compressible, ce qui permet une M_{max} plus élevée.

En fait, une erreur a été commise dans le calcul ci-dessus de l'équation d'état lorsque les neutrons deviennent ultra-relativistes. En effet, la densité de matière doit être corrigée par des effets relativistes. Dans le cas des naines blanches, cela n'intervient pas puisque le gaz de Carbone, responsable de la densité, reste non-relativiste et parfait. Ici, la densité est celle des neutrons et l'on doit écrire l'expression relativiste

$$\rho = \rho_0 + \frac{u}{c^2} \quad (3.51)$$

5. c'est à dire dont la présence n'est détectable que par les mouvements apparents d'une étoile normale compagnon.

où ρ_0 est la densité de masse au repos et u est la densité d'énergie interne. Les relations utilisées plus haut doivent donc être comprises sous la forme $P = K \rho_0^\Gamma$. Dans le cas non-relativiste, ça ne change évidemment rien aux résultats précédents puisque $\rho \simeq \rho_0$. Par contre, lorsque les neutrons deviennent ultra-relativistes, leur “poids” résulte essentiellement de leur énergie interne. Dans cette limite, on démontre que

$$P \simeq \frac{u}{3} \simeq \rho \frac{c^2}{3} . \quad (3.52)$$

On doit donc plutôt écrire une relation du type $P \propto \rho^\delta$ avec $\delta = 5/3$ dans le cas non-relativiste et $\delta = 1$ dans le cas ultra-relativiste. Noter que cette dernière expression fournit une équation d'état encore plus “douce” que la précédente, et donc une masse maximale encore plus élevée. Cependant, il n'est pas dit que les neutrons atteignent jamais les conditions où $P_n \sim u/3$ (et $\delta \sim 1$).

On peut également se convaincre de l'existence d'une masse limite à partir de considérations de stabilité. L'équilibre hydrostatique impose en effet

$$P \propto \rho \frac{M}{R} \propto \frac{M^2}{R^4} \propto M^{2/3} \rho^{-4/3} \quad (3.53)$$

En combinant ceci avec l'équation d'état $P \propto \rho^\delta$, on obtient

$$M \propto \rho^{\frac{3}{2}(\delta - \frac{4}{3})} . \quad (3.54)$$

Dans la limite non-relativiste $\delta = 5/3$, $M \propto \rho^{1/2}$ et $dM/d\rho > 0$. Dans la limite ultra-relativiste $\delta = 1$ ce qui fournit $M \propto \rho^{-1/2}$ et $dM/d\rho < 0$. Il existe donc bien une masse maximale ($dM/d\rho = 0$) lorsque la densité croît, limite atteinte lorsque les effets de relativité commencent à jouer un rôle. Par ailleurs, la branche décroissante est instable: si l'on augmente la densité, on devrait avoir une diminution de la masse totale, ce qui est en contradiction avec l'équilibre hydrostatique (il faudrait prendre en compte une perte de masse).

Les calculs modernes utilisent des versions compliquées de l'équation d'état et de l'équilibre hydrostatique, en régime de relativité générale. Ils fournissent des équations d'état plus “raides” (figures 3.8, 3.7), aboutissant à une masse maximale

$$M_{max} \simeq 1.5 - 3 M_\odot \quad (3.55)$$

Ce sont les observations des masses des étoiles à neutrons (figure 3.6) qui vont donc contraindre la bonne équation d'état. Ici, les observations fournissent des tests de la physique elle-même et ne contreignent pas seulement des modèles.

De même, la masse minimale M_{min} d'une étoile à neutrons dépend également de l'équation d'état. Plus celle-ci est “douce” et plus la masse minimale, nécessaire pour la dégénérescence des neutrons, est petite. Par exemple, la mesure de la masse du pulsar PSR 1913+16 fournit une masse supérieure à $1.35 M_\odot$, incompatible avec des équations d'état comme celle que nous avons utilisée. En fait, les observations actuelles semblent montrer que les masses des étoiles à neutrons sont étonnamment proches de la masse de Chandrasekhar $\sim 1.45 M_\odot$.

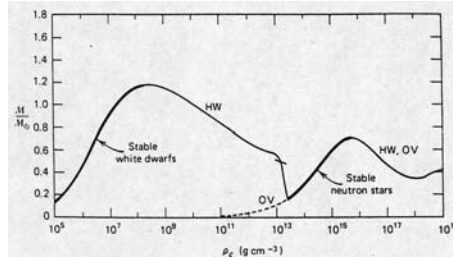


FIG. 3.7 – Courbes de la masse d’un objet compact dégénéré en fonction de sa densité centrale ρ_c , obtenues avec les équations d’état d’Oppenheimer-Volkoff (OV) et de Harrison-Wheeler (HW). Les étoiles à neutrons stables occupent une région clairement différente des naines blanches stables. L’équation d’état OV ne fournit pas de masse minimale pour les étoiles à neutrons.

Les difficultés liées à une bonne connaissance de l’équation d’état de cet astre compact sont de deux natures:

Physique: le gaz de neutrons est non-idéal. Au fur et à mesure de la contraction du coeur, certains effets deviennent de plus en plus importants et ne peuvent être négligés. Malheureusement, nous manquons de données expérimentales sur ces conditions extrêmes de la matière:

- (a) effets électrostatiques produisant une cristallisation des neutrons;
- (b) apparition de nouvelles particules (résonances) à forte densité, les hyperons (Λ , Σ , Δ), qui rendent le gaz plus compressible;
- (c) formation éventuelle d’une “soupe” de quarks à plus forte densité encore;
- (d) superfluidité des neutrons et supraconductivité des protons des régions centrales;

Mathématique: pour calculer une équation d’état, il faut prendre en compte tout un ensemble de processus physiques quantiques liant N particules. La formulation mathématique ainsi que la résolution numérique d’un problème à N corps quantiques n’est pas encore chose réalisée...

Structure interne des étoiles à neutrons

L’*atmosphère* d’une étoile à neutrons a une température $T \sim 10^6$ K et une gravité surfacique $g_n \sim 10^{12}$ m s $^{-2}$ (à comparer à celle du Soleil $g_\odot \sim 10^2$ m s $^{-2}$, ou à celle d’une naine blanche $g_{nb} \sim 10^6$ m s $^{-2}$). L’échelle de hauteur de la pression dans l’atmosphère y est de l’ordre du cm à peine!

Les calculs modernes d’étoiles à neutrons fournissent la stratification en densité suivante (figure 3.8). La surface occupe des régions de densités entre 10^9 kg m $^{-3} < \rho < 2 \cdot 10^{17}$ kg m $^{-3}$. Elle est tout d’abord constituée d’une *croûte externe* solide, formée par un cristal de fer (^{56}Fe) et des électrons dégénérés. Cette croûte s’étend sur $\Delta R \sim 0.9$ km pour une étoile de masse $M \simeq 1.4 M_\odot$ et de rayon $R = 10.6$ km.

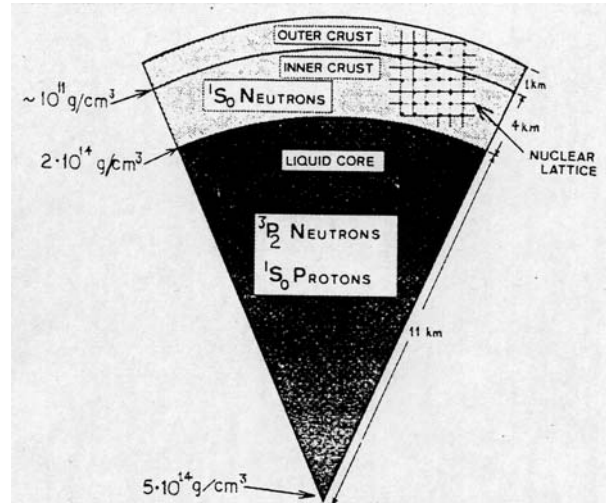


FIG. 3.8 – Coupe schématique d’une étoile à neutrons de $1.4 M_{\odot}$, obtenue avec une équation d’état “raide” (Sauls 1989).

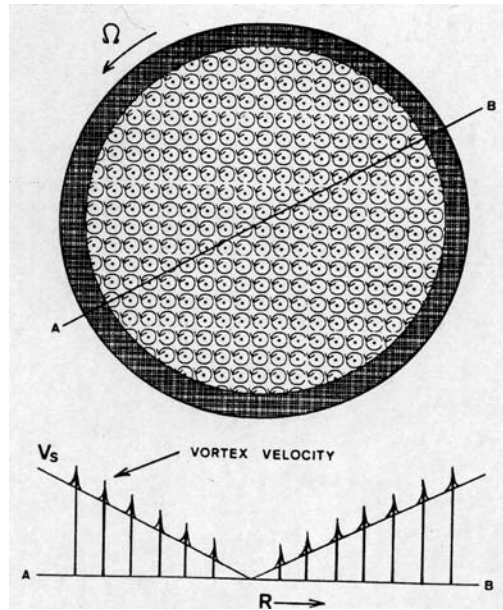


FIG. 3.9 – Représentation schématique de l’état superfluide d’une étoile à neutrons. La rotation s’organise en vortex transportant un moment cinétique quantifié. Pour une étoile à neutrons de période ~ 100 ms, chaque vortex ferait ~ 100 fermi et serait espacé des autres d’environ $4 \cdot 10^{-3}$ cm. La distribution radiale des vitesses angulaires portées par ces vortex reproduit une rotation rigide (Sauls 1989).

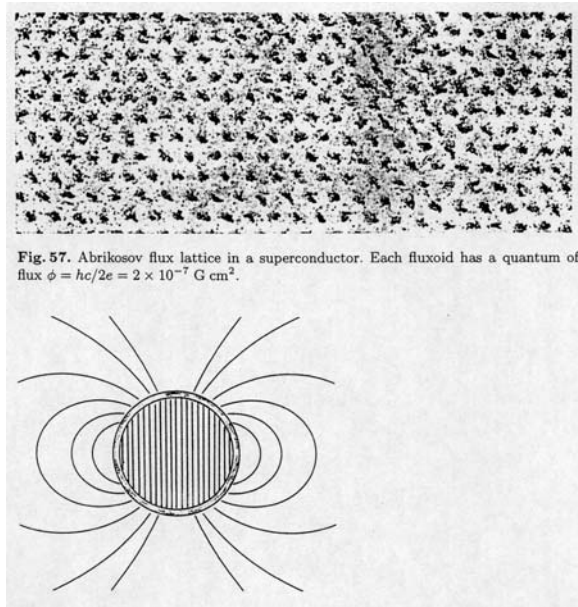


FIG. 3.10 – En haut, photographie d'un réseau dessiné par des tubes de flux quantifiés dans un supraconducteur (réseau d'Abrikosov). Chaque quanta de flux vaut $\Phi = hc/2e = 2 \cdot 10^{-7} \text{ G cm}^2$. En bas, représentation schématique du champ magnétique d'une étoile à neutrons du fait que les protons constituent probablement un supraconducteur de type II. Pour un champ extérieur de $\sim 10^{12} \text{ G}$, le nombre de fluxoides serait de l'ordre de 10^{31} .

Ensuite vient une région de densité $4.10^{14} \text{ kg m}^{-3} < \rho < 2.10^{17} \text{ kg m}^{-3}$, où se mêle au cristal de fer et aux électrons un liquide de neutrons dégénérés.

Dans les *régions centrales*, de densité $\rho > 2.4 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$, les neutrons forment un superfluide tandis que les quelques protons sont supraconducteurs. D'après les mesures en laboratoire, nous savons qu'un superfluide en rotation s'organise quantiquement: des quantas de vorticité (des sortes de tourbillons ou vortex) apparaissent dans le fluide parallèlement à l'axe de rotation. Hors de ces vortex, le fluide est irrotationnel, toute la vorticité étant contenue dans ces zones confinées. Globalement cependant, le fluide peut être considéré en rotation uniforme. Plus la rotation est élevée et plus le nombre de quantas présents est grand (figure 3.9). De même, dans un superfluide, le champ magnétique s'organise en tubes de flux quantifiés (figure 3.10).

En fait, la présence de ces états quantiques macroscopiques fut une hypothèse avancée pour expliquer certaines caractéristiques des pulsars, en particulier l'évolution de leur période de rotation lors des "glitches" (voir plus bas).

3.2.2 Les pulsars ("Pulsating Stars")

Observations

Les pulsars furent découverts en 1967 par leur rayonnement radio pulsé et extrêmement stable (figure 3.11). Leur période varie entre 1.6 ms et 4.3 secondes (en général $\sim 1 \text{ s}$) et augmente au cours du temps mais de façon extrêmement régulière:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &\sim 10^{-8} \\ \dot{P} &\sim 10^{-15} \text{ s/s} \end{aligned}$$

Cette décroissance de la vitesse de rotation implique qu'en moyenne, les pulsars sont plus jeunes que $P/\dot{P} \sim 10^7$ années. Le rayonnement périodique des pulsars est de loin le plus stable connu à ce jour, à tel point qu'on les utilise aujourd'hui comme références temporelles.

De telles vitesses de rotation sur elles-mêmes sont impossibles à réaliser autrement qu'avec des étoiles à neutrons. Pour des étoiles normales ou même des naines blanches, la force centrifuge deviendrait plus forte que l'attraction gravitationnelle en surface!

Les pulsars radio ont les caractéristiques suivantes:

- la pulsation couvre une large bande en radio, étant maximale entre 100 et 1000 Mhz, avec un flux de l'ordre de $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$;
- une pulsation individuelle dure en moyenne 10% de la période de rotation, mais peut atteindre 50%;
- chaque pulsation est différente et présente des sous-structures variables (durée inférieure à 1% de la période), mais le profil moyen (obtenu en ajoutant des centaines de pulsations individuelles) est très stable et caractéristique de chaque pulsar;

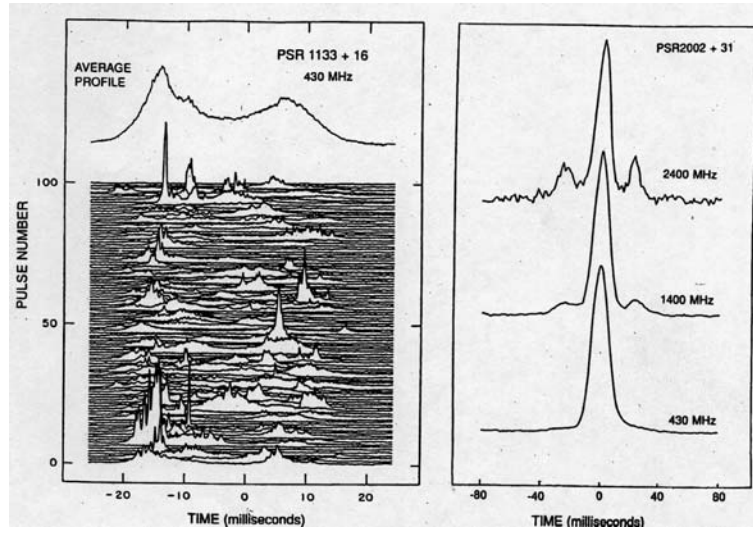


FIG. 3.11 – En (a): Les courbes du bas sont des séquences de pulses individuels du pulsar PSR 1133+16, de période 1.19 s. Chaque pulse est lui-même composé de sous-structures à petite échelle temporelle et très variables. La courbe du haut est la moyenne des 100 pulses du dessous. Elle est à double profile et est caractéristique de ce pulsar: elle reste identique sur plusieurs années. En (b): profils moyens du pulsar PSR 2002+31 (période 2.11 s) à 430, 1400 et 2400 Hz. Ces profils changent en fonction de la fréquence: les deux composantes apparaissant à haute fréquence sont des signatures attendues d'un cône d'émission.

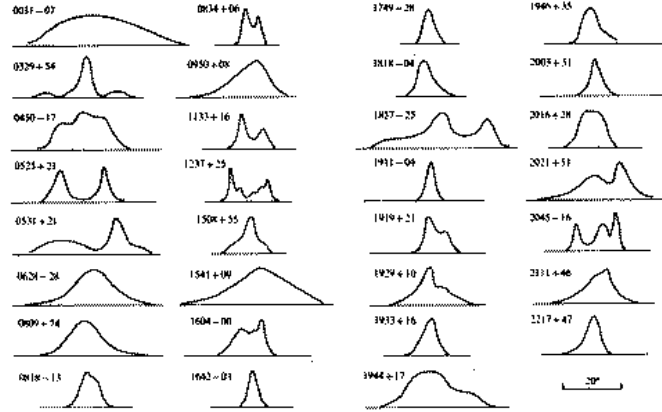


FIG. 3.12 – *Exemples de profils radio de pulsars, présentant une, deux ou trois composantes.*

- environ 60% des pulsars ont des profils à 3 composantes (1 centrale et 2 symétriques), les autres ayant soit la composante centrale seule, soit les 2 symétriques;
- l'émission est fortement polarisée linéairement, indépendamment de la fréquence, avec une croissance puis une décroissance monotone de cette polarisation au cours d'un pulse;
- quelques sous-structures périodiques (de période différente de celle du pulsar) peuvent disparaître momentanément, mais lorsqu'elles réapparaissent, elles sont en phase avec leur période précédente.

Les jeunes pulsars (courtes périodes, voir plus bas) ont également une émission pulsée à plus haute énergie, mais ne représentant que quelques pourcents de l'énergie totale libérée: en optique (le Crabe, Vela, BO540-69, Geminga), en rayons X (27 détections mais seulement 13 sont pulsés) et γ (6 détectés, tous pulsés).

Aujourd'hui, nous connaissons environ 700 pulsars dans la Galaxie. Il y a essentiellement deux arguments observationnels pour dire que ce sont des objets qui appartiennent bien à notre galaxie: (1) ils sont concentrés dans le plan du disque Galactique, là où se trouvent la majorité des étoiles⁶; (2) leur signal radio présente une dispersion (c'est à dire un retard) en fonction de la fréquence caractéristique de la propagation à travers le milieu interstellaire⁷. Par ailleurs, il existe plusieurs restes de supernova qui peuvent être associés sans ambiguïté à un pulsar central (le Crabe, Vela).

6. La présence de pulsars à hautes latitudes galactiques s'explique par leur éjection lors de la supernova qui leur a donné naissance.

7. De la mesure de cette dispersion et à l'aide d'un modèle fournissant la densité des électrons, il est possible d'obtenir la distance du pulsar.



FIG. 3.13 – Nébuleuse du Crabe, située dans le Taureau à une distance de $6.3 \cdot 10^3$ al et d'une magnitude $V = 8.4$ mag. L'explosion de la supernova fut observée le 4 juillet 1054, aussi brillante que la pleine lune et visible même le jour pendant 23 jours consécutifs. En 1948, cette nébuleuse fut identifiée comme une forte source de rayonnement radio, puis en 1964 en X. C'est en 1968 que fut découvert le pulsar au centre, avec une période de 30 tours/sec, une masse de quelques masse solaire et d'un diamètre de 30 km. En rouge, l'émission $H\alpha$ (visible), en bleu rayonnement synchrotron très polarisé émis par des électrons de très haute énergie.

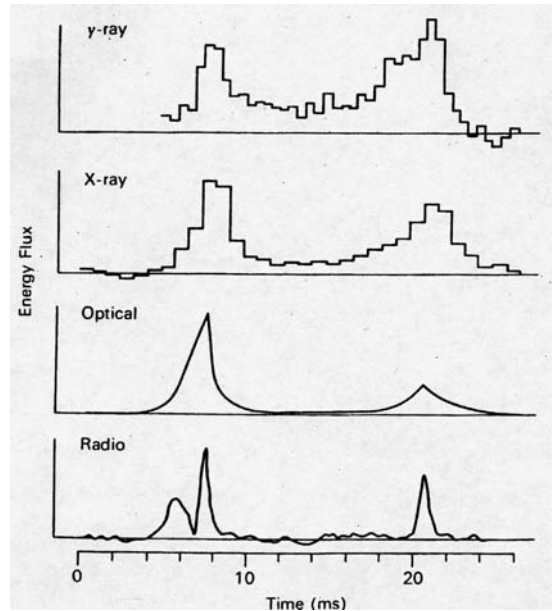


FIG. 3.14 – Profils moyens du pulsar du Crabe en radio, optique, X et gammas. Le double pic reste ici parfaitement aligné sur toute la gamme de fréquences (Manchester & Taylor 1977).

Par ailleurs, la nébuleuse qui résulte de l'explosion d'une supernova présente souvent les caractéristiques suivantes:

- présence de filaments de matière stellaire chaude en expansion, émettant un rayonnement optique (raie H_α);
- une zone diffuse émettant un rayonnement synchrotron intense, dû à des particules relativistes piégées dans un champ magnétique de structure complexe.

Pour le Crabe, par exemple, la luminosité totale (puissance rayonnée et cinétique) est de l'ordre de $5 \cdot 10^{31}$ W (environ 10^9 fois plus que celle libérée à chaque période par le pulsar). Expliquer le rayonnement synchrotron de la nébuleuse du Crabe nécessite d'injecter environ 10^{39} particules par seconde, chacune avec une énergie de l'ordre de 10^{12} eV...

Le pulsar: un phare radio (“lighthouse effect”)

Les diverses contraintes sur les pulsations radio montrent que le rayonnement radio doit être émis dans un faisceau étroit de particules, stable en forme et en position sur plusieurs périodes. Par ailleurs, les contraintes de fortes polarisation linéaire et température de brillance montrent que ces particules doivent être ultra-relativistes et émettant un rayonnement cohérent. En radio, la température de brillance (obtenue en égalisant $I_\nu \equiv B_\nu(T_b)$, chap 1) est gigantesque, de l'ordre de $10^{23} - 10^{28}$ K. Or, comme l'énergie thermique émise par une particule ne peut être supérieure à son énergie totale⁸, cela impliquerait une énergie par particule absolument fantastique ($kT_b \sim 10^{17} - 10^{22}$ eV). Cela signifie que nous avons probablement affaire à un rayonnement cohérent, c'est à dire où $I_\nu \propto N^2 i_\nu$, i_ν étant l'intensité produite par chaque particule et N le nombre de particules contribuant au rayonnement. En optique et à hautes énergies (X et γ) par contre, la température de brillance est beaucoup plus faible permettant un rayonnement incohérent.

Tout cela peut se comprendre si l'étoile à neutrons possède un champ magnétique dipolaire dont l'axe est incliné par rapport à l'axe de rotation. Il suffit alors que des particules ultra-relativistes existent dans une région étroite autour des pôles magnétiques pour que, comme pour un phare, on ne reçoive d'émission radio que lorsque le pôle magnétique passe devant la ligne de visée.

Cette image d'une calotte polaire (“polar cap”) active est dû à Radhakrishnan & Cooke (1969) et offre une explication aux pulsars pour lesquels le profil radio est soit à une composante centrale, soit à deux. En effet, le rayonnement de courbure devient plus faible lorsque la courbure du champ est moindre. On doit donc s'attendre à avoir un rayonnement plus faible pour les lignes de plus haute latitude (presque radiales) que pour celles de plus basse latitude (plus divergentes), produisant un cône d'émission creux. Ainsi, on observera un profil avec une composante centrale unique lorsque l'angle entre la ligne de visée et l'axe magnétique est grand, tandis

8. L'énergie d'une particule E est supérieure à l'énergie émise sous forme de photons et qui ne vaut $h\nu \sim kT_b$ que pour un corps noir.

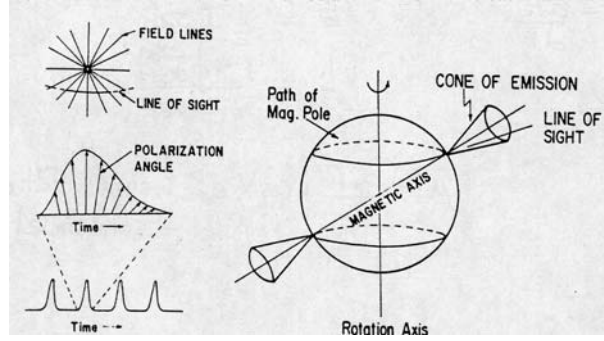


FIG. 3.15 – Modèle de “calotte polaire” (polar cap) de Radhakrishnan & Cooke (1969). Lors du pulse radio du pulsar, l’angle de polarisation linéaire varie (schéma à gauche). Cette observation a permis d’assimiler les pulsars à des sortes de phares côtiers: la zone d’émission radio aurait ainsi une faible extension spatiale, à proximité immédiate des pôles magnétiques.

que pour un angle faible, on verra passer les deux “bords” du cône, produisant deux composantes d’émission.

Les différences d’étalement (durée) des profils peuvent s’expliquer par l’inclinaison de l’axe magnétique par rapport à l’axe de rotation: un quasi alignement se traduirait par une observation quasi permanente de l’émission des particules (profils larges), tandis qu’un grand angle donnerait des profils très étroits.

Cependant, ce modèle ne rend pas compte des pulsars dont le profil moyen est formé par trois composantes. Si les deux composantes symétriques se comprennent aisément avec l’idée ci-dessus, la composante centrale nécessite des processus d’émission non liés à la courbure du champ magnétique et se produisant dans le creux du cône. Noter également que le modèle de la calotte polaire n’explique ni d’où proviennent les particules ni comment elles sont accélérées...

Freinage des pulsars: le modèle de Pacini (1967)

Ce modèle fut le premier proposé et est donc le plus simple. Il suppose un champ magnétique (un pur dipôle) faisant un angle α avec l’axe de rotation de l’étoile. La rotation de l’étoile sur elle-même induit alors une variation temporelle périodique du champ magnétique, ce qui provoque un rayonnement dipolaire magnétique dont la puissance vaut

$$L = \frac{2|\ddot{\vec{\mu}}|^2}{3\mu_0 c^2} \quad (3.56)$$

où $\vec{\mu}$ est le moment magnétique dipolaire du pulsar. Ce moment peut s’écrire

$$\vec{\mu} = \frac{B_p R^3}{2} \left(\cos \alpha \vec{e}_{\parallel} + \sin \alpha \cos \Omega t \vec{e}_{\perp 1} + \sin \alpha \sin \Omega t \vec{e}_{\perp 2} \right) \quad (3.57)$$

où B_p est le champ mesuré au pôle magnétique, $\vec{e}_{\parallel}$ est un vecteur unitaire dans la direction parallèle au vecteur rotation du pulsar et $(\vec{e}_{\perp 1}, \vec{e}_{\perp 2})$ engendrent le plan

perpendiculaire à l'axe. Cette puissance ne peut provenir que de l'énergie de rotation du pulsar⁹, c'est à dire

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{I\Omega^2}{2} = -I\Omega\dot{\Omega} \quad (3.58)$$

où I est le moment d'inertie de l'étoile, supposée en rotation rigide ($T = I\Omega^2/2$). Cela nous permet alors d'écrire l'équation de l'évolution de la période du pulsar

$$\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4}{6\mu_0 c^3} \sin^2 \alpha = -I\Omega\dot{\Omega} \quad (3.59)$$

On pose

$$T = -\left(\frac{\Omega}{\dot{\Omega}}\right)_0 = \frac{6\mu_0 I c^3}{B_p^2 R^6 \Omega_0^2 \sin^2 \alpha} \quad (3.60)$$

où l'indice "0" signifie que l'on prend les valeurs actuelles. En utilisant ce temps caractéristique (connu puisque mesurable), on peut facilement intégrer l'équation précédente et obtenir l'âge t du pulsar

$$t = \frac{T}{2} \left(\frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_i^2} \right) \quad (3.61)$$

où $\Omega_i = \Omega(t = 0)$. Si le freinage a été suffisamment efficace (autrement dit, si l'on a affaire à un pulsar suffisamment ralenti), on peut faire l'approximation $\Omega_i \gg \Omega_0$, ce qui donne un âge

$$t_0 \simeq \frac{T}{2}. \quad (3.62)$$

Cette expression, appliquée au pulsar du Crabe en 1972, donna un âge $t_0 \simeq 1243$ yr à partir d'une valeur $T \simeq 2486$ yr mesurée. C'est assez proche de l'âge réel de ce pulsar, 918 ans, dont on sait qu'il naquit en 1054 lors d'une supernova observée (mais surtout notée) par les astrologues chinois.

Or, la puissance émise (les calculs de structure interne d'étoile à neutrons fournissant une valeur pour I) est de l'ordre de $L = -I\Omega\dot{\Omega} \sim 610^{31}$ W, se trouve être comparable à celle de la nébuleuse qui entoure le pulsar. Ainsi, ce serait l'énergie de rotation du pulsar qui alimenterait en énergie la nébuleuse! Noter que malgré ce succès, ce modèle n'explique pas le rayonnement émis lors de chaque pulsation radio, puisqu'il ne décrit pas comment (1) produire des particules (magnétosphère vide) et (2) comment les accélérer.

Le champ magnétique nécessaire à un tel freinage est

$$B_p \sin \alpha = \left(\frac{6\mu_0 c^3 L}{R^6 \Omega^4} \right)^{1/2} \simeq 5 \cdot 10^8 \text{ Tesla} \quad (3.63)$$

ce qui est un champ gigantesque, le plus élevé de l'univers (on atteint des valeurs maximales en laboratoire de l'ordre de 30 T). Cependant, des mesures précises du rayonnement synchrotron émis par le pulsar fournissent bien un champ magnétique comparable. Un tel champ proviendrait du champ de l'étoile progénitrice, mais amplifié lors de la contraction du coeur (par conservation du flux magnétique).

9. De même que pour les naines blanches, ni réactions nucléaires ni contraction ne peuvent servir de source d'énergie dans ces astres compacts.

Le modèle de Goldreich & Julian (1969)

Le modèle précédent avait cependant un problème: que se passe-t-il lorsque $\alpha \rightarrow 0$? Le rayonnement dipolaire s'annule, donc plus de couple de freinage. Il était gênant de compter sur un écart systématique entre l'axe de rotation et le moment dipolaire pour ralentir les pulsars. Certes, mais comme les pulsars sont justement les étoiles à neutrons pour lesquelles cet écart existe, peut-être n'y avait-il là qu'un effet de sélection observationnelle... Par ailleurs, ce modèle suppose un dipôle dans une magnétosphère vide. Goldreich & Julian montrèrent que justement cela ne pouvait être le cas: la magnétosphère d'une étoile à neutrons est remplie de particules chargées et c'est le rayonnement de ces particules qui est observé. D'où proviennent alors ces particules?

La réponse est simple et réside dans le théorème de Gauss (rotation d'un conducteur dans un champ magnétique). Pour simplifier les calculs, la géométrie est ici supposée axisymétrique: le dipôle est aligné avec l'axe de rotation. Le champ magnétique régnant à l'extérieur du pulsar peut s'écrire en coordonnées cylindriques

$$\vec{B}_{ext} = B_p \frac{R^3}{r^3} \left(\cos \theta \vec{e}_r + \frac{\sin \theta}{2} \vec{e}_\theta \right) \quad (3.64)$$

En supposant une absence de courants à la surface du pulsar (croûte cristalline trop rigide pour permettre un déplacement significatif de charges), nous pouvons estimer le champ magnétique interne

$$\vec{B}_{int} = \vec{B}_{ext} . \quad (3.65)$$

La loi d'Ohm, appliquée à l'intérieur conducteur du pulsar, fournit ensuite le champ électrique interne

$$\begin{aligned} \vec{E}_{int} &= -\vec{v} \times \vec{B}_{int} = -(\Omega \times \vec{r}) \times \vec{B}_{int} \\ &= \Omega R B_p \sin \theta \left(\frac{\sin \theta}{2} \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Enfin, la composante transverse du champ électrique étant continue, il existe un champ électrique non nul à l'extérieur du pulsar. Ce champ possède alors une composante parallèle au champ magnétique

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= \frac{\vec{E}_{ext} \cdot \vec{B}_{ext}}{B_{ext}} \sim \Omega R B_p \\ &\sim 2 \cdot 10^{10} \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right)^{-1} \left(\frac{B}{10^8 \text{ T}} \right) \text{ V m}^{-1} \end{aligned} \quad (3.67)$$

qui décroît avec la distance et qui est susceptible d'accélérer des particules. Ce champ électrique est énorme et produit une force gigantesque: le rapport entre la force électrique et la force gravitationnelle vaut en effet pour un proton

$$\frac{\text{force électrique}}{\text{force gravitationnelle}} \sim \frac{e E_{\parallel}}{m_p G M / R^2} \sim 10^9 \quad (3.68)$$

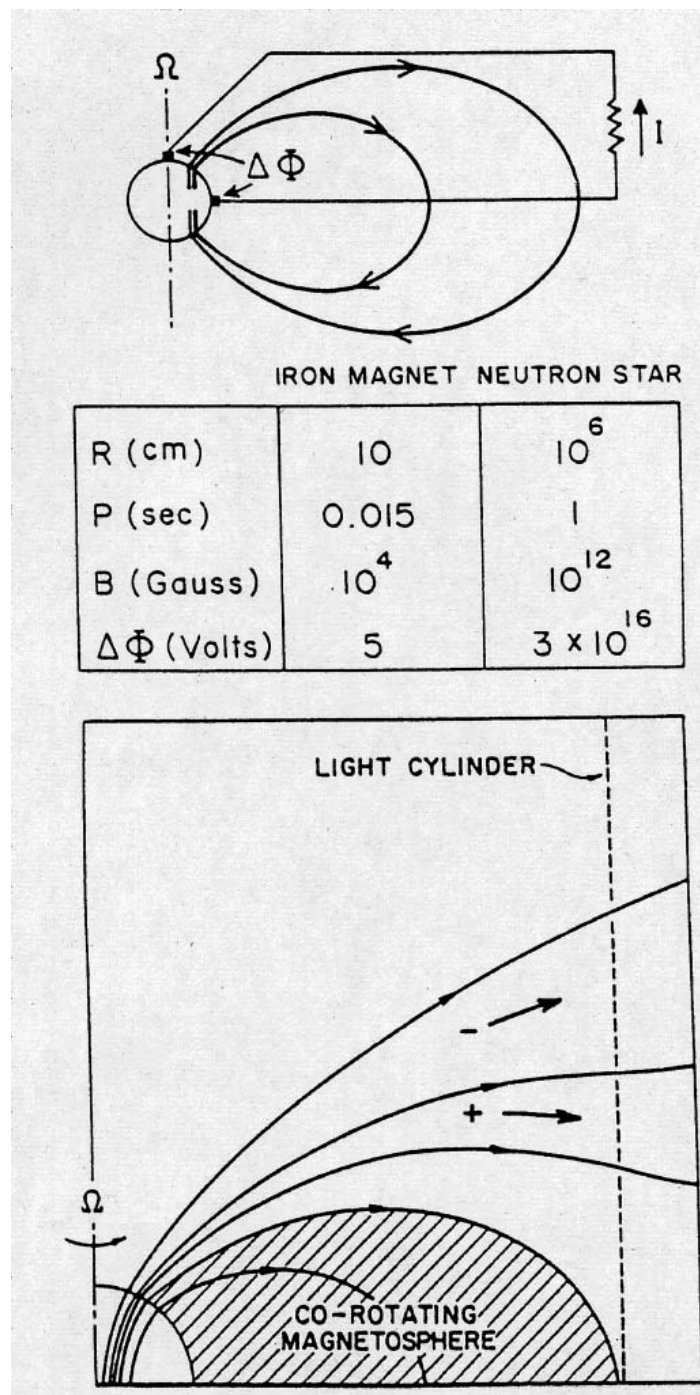


FIG. 3.16 – Modèle de Goldreich-Julian (1969). Une sphère conductrice en rotation, possédant un champ magnétique va se comporter comme un générateur de Faraday: les différences de tension attendues à sa surface sont données dans la table. Ce modèle prédit que des charges positives et négatives vont être arrachées à la croûte de l'étoile à neutrons et accélérées le long des lignes de champ ouvertes (celles qui traversent le cylindre de lumière).

La matière serait donc littéralement arrachée à la surface solide du pulsar, les protons pouvant a priori atteindre des facteurs de Lorentz énormes $\gamma \sim 10^6 - 10^9$! A ce titre, les pulsars seraient potentiellement des sources de rayons cosmiques.

La différence de potentiel entre le pôle et l'équateur (les termes en θ ont été omis dans les expressions ci-dessus, qui ne fournissent qu'un ordre de grandeur), impose une charge d'espace différente. Pour un champ magnétique dans la même direction que le vecteur vitesse angulaire du pulsar, les lignes de champ magnétique situées au pôle seront chargées négativement tandis que celles aux latitudes plus basses seront chargées positivement. Ceci construit alors un circuit électrique qui fournit une force de Laplace freinant le pulsar. Ainsi, la puissance transportée par les particules provient in fine de la rotation du pulsar.

Nous avons vu que la magnétosphère est très probablement remplie de particules arrachées à la surface puis accélérées le long du champ magnétique. Mais, tant que leur énergie reste négligeable devant celle du champ, nous pouvons faire les hypothèses simplificatrices suivantes: (1) le dipôle restera non perturbé et (2) la matière sera en corotation avec lui (et lui-même entraîné par la rotation du pulsar). Cependant, il existe une distance à l'axe de rotation du pulsar où la vitesse de rotation de la matière "gelée" au dipôle deviendrait égale à celle de la lumière. Cette distance, qui définit ce qu'on appelle *le cylindre de lumière*, vaut

$$\begin{aligned} R_L = \frac{c}{\Omega} &= 5 \cdot 10^7 \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right) \text{ m} \\ &\simeq 0.1 \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right) R_\odot \end{aligned} \quad (3.69)$$

Au delà de ce rayon cylindrique, la matière en stricte corotation aurait donc une vitesse supérieure à celle de la lumière. Cela ne se peut, ce qui signifie (1) que les particules atteignent bien des vitesses ultra-relativistes mais, (2) que la champ magnétique ne peut maintenir sa structure dipolaire au delà du cylindre de lumière. Physiquement, cela implique que la matière devient suffisamment accélérée pour pouvoir fortement perturber le champ. La magnétosphère d'un pulsar serait donc constituée de deux régions: (1) une région à basse latitude de lignes de champ fermées et en corotation avec de la matière et (2) une région constituée de lignes de champ ouvertes, issues des pôles magnétiques et par où s'écoule un vent de particules, accélérées à des vitesses ultra-relativistes à partir du cylindre de lumière.

On peut faire une estimation de la puissance transportée par ces particules. Le champ magnétique étant approximativement dipolaire jusqu'au cylindre de lumière, il varie comme $B \simeq B_p (R/r)^3$, où B_p est le champ au pôle, R le rayon du pulsar et r la distance à l'axe. Dans cette approche électrodynamique (où les particules ne perturbent pas le champ magnétique), le champ électrique vaut $E \simeq cB$. Le flux de Poynting, qui décrit le flux d'énergie électromagnétique qui sera transféré aux particules, s'écrit alors

$$S = \left| \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right| \sim c \frac{B^2}{\mu_0} \sim c \frac{B_p^2 R^6}{\mu_0 r^6} \quad (3.70)$$

La puissance électromagnétique transportée est donc approximativement

$$L = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} \sim 4\pi r^2 c \frac{B_p^2}{\mu_0} \frac{R^6}{r^6} \quad (3.71)$$

Cette puissance est ensuite transférée et emmenée par les particules surtout au niveau du cylindre de lumière, ce qui permet d'écrire

$$L \sim \frac{4\pi B_p^2 R^6 \Omega^4}{\mu_0 c^3} . \quad (3.72)$$

On voit donc que l'on obtient ici une puissance similaire à celle fournie par le rayonnement dipolaire magnétique, donc un temps caractéristique de freinage et des âges de pulsars identiques. La différence essentielle est qu'ici la magnétosphère n'est pas le vide: des particules ultra-relativistes s'échappent le long des lignes de champ ouvertes. Ainsi, ce modèle explique qualitativement comment la nébuleuse est alimentée à la fois en particules relativistes et en champ magnétique, d'où provient sa puissance observée mais également la possibilité de produire les pulsations radio (événements mettant en jeu une fraction minime de la puissance transportée).

Ces résultats sont restés cependant très qualitatifs, car le calcul précis du mouvement des particules et de leur accélération ne peut se faire sans traiter les interrelations avec le champ magnétique, en particulier dans l'établissement de sa géométrie globale (cf. cylindre de lumière). C'est donc dans le contexte de la magnétohydrodynamique relativiste que doivent se faire ces calculs, qui sont de ce fait très complexes.

Le modèle de Ruderman & Sutherland (1975)

Ruderman & Sutherland ont rajouté une complexité supplémentaire au scénario précédent. Ils ont effet montré que seuls les électrons, plus légers, pouvaient être arrachés à la croûte solide qui constitue la surface d'une étoile à neutrons. En effet, lorsque $B_p \sim 10^8$ Tesla le rayon de Larmor des particules est plus petit que le rayon de Bohr

$$R_{\text{Larmor}} = \frac{mV_{\perp}}{qB} < R_{\text{Bohr}} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} . \quad (3.73)$$

Cela signifie que dans ces conditions de champ magnétique extrême, les atomes de fer ne sont plus sphériques mais des sortes de cigares, allongés dans la direction de $\vec{B}$ et donc perpendiculaires à la surface du pulsar! Ruderman & Sutherland montrèrent que, malgré son intensité, le champ électrique $E_{\parallel}$ ne pouvait rompre le cristal de fer (il faudrait ~ 14 keV): seuls les électrons peuvent donc être accélérés. Du fait de cette perte d'électrons, la surface du pulsar se retrouve progressivement chargée positivement tandis que la magnétosphère proche devient chargée négativement: un champ électrique électrostatique, dû à cette différence de potentiel, se développe et ne cesse de grandir. Une telle situation ne peut durer indéfiniment...

Ces électrons, initialement accélérés par $E_{\parallel}$, sont contraints de suivre le champ magnétique qui est courbé: ils perdent de l'énergie par rayonnement de courbure

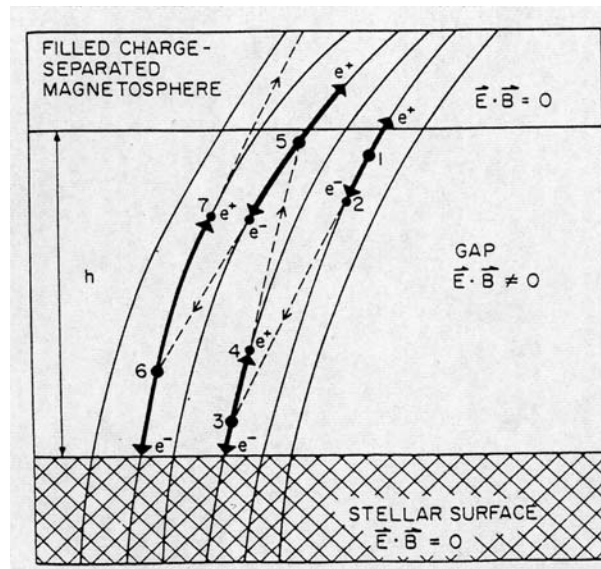


FIG. 3.17 – Modèle de “polar cap gap”, dû à Ruderman & Sutherland (1975). Dans ce modèle, comme dans celui de Golreich & Julian, il existe une région à l’extérieur du pulsar, où un champ électrique non nul est parallèle au champ magnétique. Ce champ accélère essentiellement les électrons (les protons restent collés à la surface) jusqu’à des vitesses ultra-relativistes. Du fait de la courbure des lignes de champ et de leur grande vitesse, ces particules émettent un rayonnement de freinage. Ces photons vont alors créer des paires d’électrons-positrons, développant alors une création de paires en cascade. Les électrons retournent vers la surface tandis que les positrons s’échappent le long des lignes de champ ouvertes.

dont la fréquence vaut

$$\omega \sim \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{\mathcal{R}} \quad (3.74)$$

où γ est le facteur de Lorentz des électrons et $\mathcal{R}$ est le rayon de courbure du champ magnétique. Les facteurs de Lorentz atteints sont si élevés que le rayonnement émis par ces électrons est un rayonnement de haute énergie: ce sont des rayons gammas. Or, ces gammas vont spontanément créer des paires (Sturrock, 1971)

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (3.75)$$

d'électrons et de positrons, les premiers accélérés vers l'extérieur et les deuxièmes vers la surface (par le champ magnétique). Plus il y a de particules dans la magnétosphère, et plus le rayonnement de courbure devient intense, ce qui emballe le processus de création de paires (création de paires en cascade, de l'ordre de $\sim 10^{39}$ paires par seconde pour le Crabe, par ex) et donc la différence de potentiel. Très rapidement un "claquage" (arc électrique) se produit entre la surface du pulsar et la magnétosphère proche, qui anihile les charges d'espace et rend la magnétosphère vide. Puis, le processus repart pour un cycle.

Ce modèle ("polar cap gap model"), également non calculé de façon cohérente, explique qualitativement les aspects observationnels qui échappaient au modèle de Goldreich & Julian. Par exemple, la polarisation du rayonnement, qui nécessite une accélération à l'intérieur du cylindre de lumière et non à l'extérieur, et surtout les micro-structures observées dans chaque pulsation du pulsar, interprétées ici comme les "étincelles" produites lors des claquages.

Notre vision actuelle des pulsars radio met donc en jeu une structure magnétique complexe, avec une calotte polaire présentant des claquages cycliques et la production d'un vent de paires d'électrons-positrons ultra-relativistes. Les pulsations observées en optique et en rayons X et γ s'expliqueraient par l'émission synchrotron incohérente des paires relativistes au niveau du cylindre de lumière ("outer gap model", Ruderman 1987).

3.2.3 Des "glitches" à la tectonique des plaques

Les "glitches"

Nous avons vu que la période des pulsars augmente au cours du temps et que la dérivée de la période est proportionnelle au carré du champ magnétique et inversement proportionnelle à la période. Mais ceci n'est pas toujours vrai. En février 1969, le pulsar Vela fut observé accélérant soudainement, avec

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{\Omega} &\sim 10^{-6} \\ \frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} &\sim 10^{-2} \end{aligned}$$

Les observations ultérieures montrèrent qu'après cette soudaine accélération, il lui fallu plusieurs mois pour retrouver une décroissance suivant la loi habituelle (figure 3.18). Ce phénomène, appelé "glitch" en anglais, fut à l'origine de nombreuses

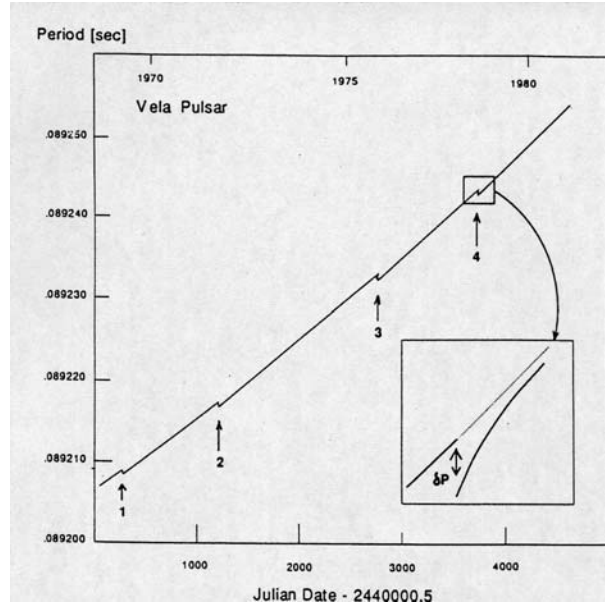


FIG. 3.18 – Les quatre premiers “glitch” géants observés dans le pulsar de Vela (Downes 1981). Le changement relatif fut de l’ordre de $\Delta P/P \sim 10^{-6}$ et il fallut attendre plusieurs mois pour retrouver la loi normale d’évolution $P(t)$.

suggestions et “découvertes” concernant l’intérieur des étoiles à neutrons. Par quel mécanisme en effet, une étoile à neutrons peut-elle être brutalement accélérée, puis à nouveau freinée mais sur une échelle de temps plus longue?

Rotation et structure interne

La présence simultanée, à l’intérieur d’un pulsar, d’un champ magnétique intense et d’un fluide de protons supraconducteurs ne peut rester sans conséquences. En effet, les protons étant “gelés” au champ magnétique, cela signifie que le champ impose une rotation rigide à la fois à la surface et au fluide supraconducteur. Par contre, il n’y a pas d’interaction directe entre le champ et les neutrons (superfluide organisé en vortex). Il risque donc d’y avoir un découplage entre la rotation de la surface (celle qui est observée) et celle du superfluide de neutrons, qui constituent cependant l’essentiel de la masse de l’objet compact! Puisque le freinage de l’étoile s’effectue par l’intermédiaire du champ magnétique, cela signifie que le superfluide devrait, en moyenne, tourner plus *rapidement* que la surface ou le fluide de protons supraconducteurs.

Le freinage du superfluide de neutrons se traduit par une migration de ses quantas de vorticité vers la surface, où ils s’y dissiperaient (par un processus encore inconnu). Cette dissipation devrait alors s’observer par une accélération momentanée de la croûte rigide, ce qui est bien le cas lors des “glitches”.

Les tremblements d'étoiles

Le modèle simple ci-dessous fut proposé par Baym et ses collaborateurs en 1969. Au fur et à mesure que le pulsar est freiné, l'aplatissement de sa forme tend naturellement à diminuer. Que se passerait-il si cette diminution, du fait de l'extrême rigidité de la croûte, ne peut pas se produire? Il y aurait fatalement un seuil au-delà duquel la structure s'ajusterait brutalement en adoptant une forme plus sphérique. Il s'avère qu'une modification infime du moment d'inertie de l'étoile ($\Delta R \sim 0.5$ cm!) peut expliquer une grande accélération.

Le modèle suppose qu'une étoile à neutrons est constituée de deux composantes: une croûte de moment d'inertie I_c et de vitesse angulaire $\Omega(t)$ (celle qui est observée) et un intérieur de neutrons superfluides de moment d'inertie I_n et de vitesse $\Omega_n(t)$. Le couplage entre les deux composantes est grossièrement décrit par un temps caractéristique de relaxation τ_c , tel que $\Omega_n \rightarrow \Omega$ au bout de τ_c . Si l'intérieur d'une étoile à neutrons n'était pas superfluide, ce temps de relaxation serait de l'ordre de quelques minutes ou moins, alors que les observations nous indiquent qu'il est de l'ordre de quelques mois.

L'équation de conservation du moment cinétique de chaque composante s'écrit

$$I_c \dot{\Omega} = -\alpha - I_c \frac{\Omega - \Omega_n}{\tau_c} \quad (3.76)$$

$$I_n \dot{\Omega}_n = I_c \frac{\Omega - \Omega_n}{\tau_c} \quad (3.77)$$

Ici, seule la croûte subit un couple de freinage α externe (dû au champ magnétique), tandis que le cœur liquide subit un couple imposé par la croûte. Dans ce traitement, α et τ_c sont supposés constants au cours du temps, ce qui est justifié puisque ces "glitches" se produisent sur une échelle de temps courte par rapport à l'évolution de la période du pulsar. Les équations ci-dessus fournissent

$$\begin{cases} \Omega &= -\frac{\alpha t}{I} + \frac{I_n}{I} \Omega_1 e^{-t/\tau} + \Omega_2 \\ \Omega_n &= \Omega - \Omega_1 e^{-t/\tau} + \frac{\alpha \tau}{I_c} \end{cases} \quad (3.78)$$

où Ω_1 et Ω_2 sont des constantes d'intégration, $I = I_c + I_n$ et $\tau = \tau_c I_n / I$.

On suppose que l'on observe un "glitch" à $t = 0$, qui fait instantanément passer la vitesse angulaire du pulsar de $\Omega(t)$ à $\Omega(t) + \Delta\Omega_0$ (figure 3.19). Avec cette condition initiale, on peut réécrire $\Omega(t)$ sous la forme plus pratique

$$\begin{cases} \Omega(t) &= \Omega_0(t) + \Delta\Omega_0 (Q e^{-t/\tau} + 1 - Q) \\ \Omega_0(t) &= \Omega_0 - \frac{\alpha t}{I} \end{cases} \quad (3.79)$$

où $\Omega_0(t)$ décrit simplement l'évolution de la période sous l'action du freinage magnétique seul (ici on regarde des instants courts, ce qui explique cette décroissance linéaire avec le temps). En posant $\Delta\Omega = \Omega(t) - \Omega_0(t)$, on voit que pour $t \gg \tau$, on obtient $\Delta\Omega \simeq \Delta\Omega_0(1 - Q)$. Le paramètre Q contrôle donc la qualité du retour de la période du pulsar à sa valeur d'avant le "tremblement". A partir des équations

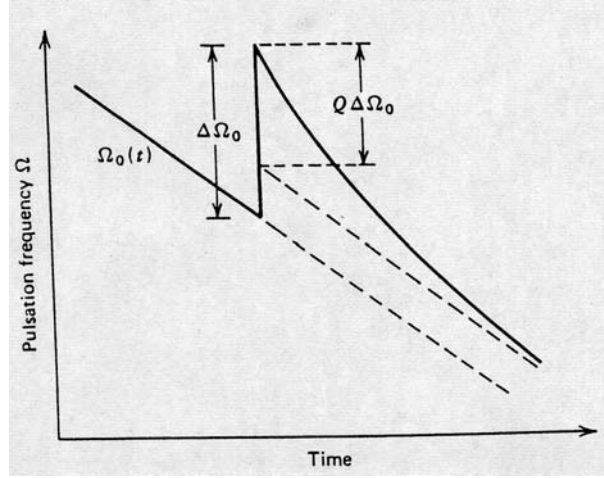


FIG. 3.19 – Représentation schématique d'un "glitch" (Manchester & Taylor 1977).

précédentes on obtient

$$Q = -\frac{\Delta\dot{\Omega}(t=0)}{\Delta\Omega_0}\tau \quad (3.80)$$

$$\tau = -\frac{\Delta\dot{\Omega}(t=0)}{\Delta\ddot{\Omega}(t=0)} \quad (3.81)$$

Ainsi, en mesurant avec suffisamment de précision l'évolution de la période après le "glitch", nous sommes en mesure d'obtenir ces paramètres Q et τ . Reste maintenant à relier Q aux caractéristiques physiques de notre pulsar.

Que se passe-t-il *pendant* le "glitch"? Les équations précédentes sont une tentative simpliste d'aborder l'évolution de la période du pulsar après le "glitch". Si l'on regarde pendant le temps Δt très court du "glitch", on peut faire l'approximation que chaque composante conserve son moment cinétique. En effet, dans ce modèle, c'est la brusque variation du moment d'inertie de la croûte qui engendre une variation de sa vitesse de rotation. De même, le cœur liquide conserve tout d'abord son moment cinétique lors du changement intervenu dans la croûte, et subira ensuite une évolution à cause de son couplage avec celle-ci. La conservation du moment cinétique de chaque composante s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\Delta I_c}{I_c} + \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = 0 \\ \frac{\Delta I_n}{I_n} + \frac{\Delta\Omega_n}{\Omega_n} = 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

Or, en différenciant l'équation (3.76), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\Omega} &= \alpha \frac{\Delta I_c}{I_c^2} - \frac{\Delta\Omega - \Delta\Omega_n}{\tau_c} \\ &= -\alpha \frac{\Delta\Omega}{I_c\Omega} - \frac{\Delta\Omega - \Delta\Omega_n}{\tau_c} \\ &= -\frac{I}{I_c} \frac{\Delta\Omega}{T} - \frac{\Delta\Omega - \Delta\Omega_n}{\tau_c} \end{aligned} \quad (3.83)$$

La dernière expression utilise le fait que le couple α est relié au temps caractéristique T par $\alpha = I\Omega/T$ (voir Eq.(3.60)). En général, $I_c T \gg I\tau_c$ (temps de freinage est beaucoup plus long que le temps caractéristique d’ajustement interne), ce qui permet d’écrire

$$\frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \frac{T}{\tau_c} \left(1 - \frac{\Delta\Omega_n}{\Delta\Omega}\right). \quad (3.84)$$

En prenant cette expression à $t = 0$ et en utilisant la définition de Q , on trouve

$$\begin{aligned} Q &= \frac{I_n}{I} \left(1 - \frac{\Delta I_n/I_n}{\Delta I_c/I_c} \frac{\Omega_n}{\Omega}\right) \\ &\simeq \frac{I_n}{I} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ainsi, à partir des observations et de ce modèle simple, on pourrait obtenir une “mesure” des moments d’inertie de l’étoile à neutrons et les comparer à ce que fournissent les modèles de structure interne pour une équation d’état donnée. Cependant, les difficultés de ce modèle à rendre compte des observations pour *tous* les pulsars sont nombreuses. En particulier, différents pulsars ont des valeurs différentes de Q et, pire, Q semble varier pour un même pulsar entre deux “glitches”. Ce modèle trop naïf fut donc amendé avec des éléments physiques supplémentaires. Cette approche permet néanmoins de montrer qu’il est a priori possible d’obtenir des diagnostics sur la structure interne des étoiles à neutrons à partir de l’évolution de sa période de rotation.

La tectonique des plaques

Les idées qui suivent furent proposées comme explication des “glitches” par Anderson et Itoh en 1975.

Dans un milieu supraconducteur, le flux magnétique n’est pas spatialement distribué mais également quantifié dans des vortex de flux, parallèles à la direction du champ (faisant donc un angle avec les quantas de vorticité des neutrons). Une physique nouvelle pourrait être à l’oeuvre dans ces objets étranges. S’il existe une interaction entre les vortex de flux magnétique et ceux de vorticité des neutrons alors on peut imaginer le scenario suivant. Au fur et à mesure que le pulsar est freiné par le champ magnétique, les vortex du coeur superfluide migrent vers la surface. Dans leur chemin, ils interceptent les quantas de flux magnétique et tendent à les entrainer avec eux (figure 3.20).

La migration du champ magnétique vers la surface signifie tout simplement l’expulsion du champ magnétique hors de l’étoile à neutrons. Cela expliquerait alors pourquoi le champ magnétique des pulsars est d’autant plus faible que celui-ci tourne lentement: ce seraient de vieux pulsars. Mais le champ magnétique est par ailleurs attaché à la surface solide de l’étoile. La migration de quelques quantas de flux magnétique va donc agir localement sur la croûte, ce qui peut amener celle-ci   se rompre localement et à former des plaques, analogues à celles de la croûte terrestre. Ces plaques vont donc se disloquer et avoir des mouvements relatifs contrôlés par le

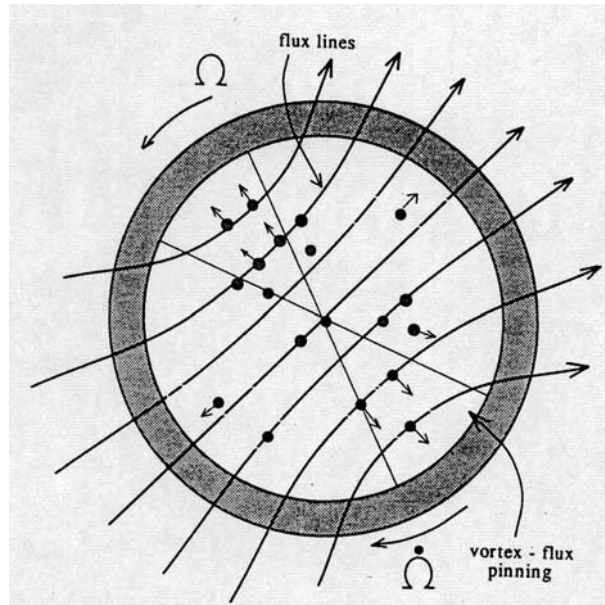


FIG. 3.20 – *Expulsion des quanta de flux de l'intérieur supraconducteur due au freinage électromagnétique des pulsars (d'après Sauls 1989). Au fur et à mesure que le pulsar est freiné, les quanta de vorticité dans le coeur superfluide se déplaceraient vers la croûte et entraîneraient avec eux les quanta de flux magnétique.*

champ magnétique, le freinage de l'étoile et le couplage entre quantas de vorticité et quantas de flux.

Mais l'extrême rigidité de la croûte empêcherait cette expulsion du champ magnétique de se produire calmement et le mouvement des plaques pourrait ne pas être continu. Au fur et à mesure du freinage de la croûte (via le champ magnétique), l'intérieur superfluide expulse ses quantas de vorticité vers la surface qui reste rigide. Puis, soudainement, les contraintes imposées par ces mouvements internes provoquent une cassure. C'est à ce moment que l'excès de rotation du coeur superfluide est transféré à la croûte, qui se trouve de ce fait accélérée. L'observation des "glitches" nous mène alors directement à une tectonique des plaques.

Comprendre le comportement des étoiles à neutrons implique la physique des milieux denses, des fluides quantiques, la physique des particules, celle des processus de rayonnement cohérent des plasmas relativistes, la magnétohydrodynamique et la relativité générale. Autant dire qu'une compréhension complète est loin d'être atteinte! A vrai dire, ces objets servent plutôt à élaborer et à tester notre compréhension des lois mêmes de la physique.

Note: freinage électromagnétique des pulsars

Y a-t-il vraiment une incompatibilité entre le modèle de Pacini et celui de Goldreich & Julian?

Les pulsars ont une émission radio pulsée, il est donc nécessaire que le champ magnétique soit incliné par rapport à l'axe de rotation. Dans le modèle de Goldreich

& Julian, le champ n'était pas incliné uniquement par commodité de calcul. Si on l'incline, les processus physiques étudiés ne devraient pas être trop modifiés. Dans le modèle de Pacini, l'énergie du pulsar est transportée par un champ électromagnétique basse fréquence (identique à celle du pulsar). Or, si un électron intercepte cette onde au-delà du cylindre de lumière, il sera accéléré par le champ électromagnétique: en effet, sur un temps très court par rapport à la période de l'onde, le champ électromagnétique se comporte comme un champ électrique et magnétique statique (comme dans Goldreich & Julian). L'électron pourra donc être accéléré jusqu'à des vitesses relativistes dans la direction de propagation de l'onde. Il aura alors la possibilité, par effet d'amortissement Landau, d'extraire l'énergie de l'onde sur laquelle il "surfe".

La différence entre les deux modèles devient alors très subtile. Dans les deux cas, il existe un vent de particules ultra-relativistes transportant l'énergie de rotation du pulsar dans la nébuleuse. Dans le modèle de Pacini, l'accélération s'effectue par l'intermédiaire d'un rayonnement dipolaire basse fréquence, tandis que dans celui de Goldreich & Julian, par le biais du champ magnétique du pulsar. Deux facettes du même processus?

3.3 Les trous noirs

Au XVIII^{ème} siècle, en pleine heure de gloire de la mécanique classique, la lumière était considérée comme étant constituée de corpuscules. Appliquant alors les lois de la mécanique, Laplace eut le raisonnement suivant :

“Un astre lumineux de même densité que la terre et dont le diamètre serait deux cents cinquante fois plus grand que celui du soleil, ne laisserait, en vertu de son attraction, parvenir aucun de ses rayons jusqu’à nous. Il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l’univers soient, par cela même, invisibles”.

Ce calcul simple fut possible du fait de l’égalité entre la masse grave (responsable de la soumission d’un corps à la force gravitationnelle) et la masse inerte (responsable de l’inertie d’un corps à sa mise en mouvement). Puis, l’expérience des propriétés ondulatoires de la lumière a jeté dans l’ombre ce résultat, qui était quantitativement faux mais qualitativement juste.

Un siècle plus tard, Einstein se pencha à nouveau sur la question de l’égalité masse grave-masse inerte. Ceci (et d’autres faits troublants) le conduisit en 1905 à la théorie de la relativité restreinte, puis à celle de la relativité générale en 1916.

3.3.1 Rappels de relativité restreinte

Constance de c : notion d’espace-temps

Avant Einstein, la physique était séparée en deux blocs : la mécanique classique d’une part, qui restait invariante lors d’un changement de référentiel galiléen (ie, mis à part des primes, les équations s’écrivaient de la même façon) et l’électromagnétisme de Maxwell, invariant sous une transformation bizarre trouvée par Lorentz mais dont le sens échappait alors aux physiciens.

En pratique, l’opération “changement de référentiel” consiste toujours à déplacer un observateur (celui qui observe l’événement physique en question) dans l’espace. Ainsi, depuis Galilée, nous savons qu’une trajectoire est toujours relative à l’espace : une balle lâchée dans un train en mouvement décrit une droite dans le “référentiel” du train et une parabole dans celui de la Terre. Mais si on adopte une position extrêmement pragmatique et bien on constate qu’observer un événement consiste toujours à “recevoir” les photons (ou tout autre véhicule d’information) émis par le système étudié. Or, Michelson et Morley constatèrent expérimentalement en 1887 la constance de la vitesse de lumière c quelque soit le référentiel ! Autrement dit, l’information met toujours un temps fini pour parvenir jusqu’à l’observateur. Einstein mit ainsi le doigt sur la notion de relativité du temps. Chaque horloge devant être attachée à un lieu en particulier, il ne faut plus parler d’espace seul mais d’espace-temps. Et se pose alors le problème de la synchronisation des horloges, celle d’un observateur quelconque et celle attachée (physiquement liée) à l’événement.

En résumé, dans la mécanique de Newton, seul l’espace est relatif et on peut connaître ce qui s’y produit partout et à tout moment car le transfert de l’information

est instantané (notion d'un temps absolu). Dans celle d'Einstein, l'espace et le temps étant tous les deux relatifs à l'observateur, il existe des événements hors d'atteinte de certains observateurs (l'information n'a pas encore eu le temps de se propager vers eux). La différence entre ces deux visions ne tient qu'à la constance et à la valeur finie de la vitesse de la lumière: en faisant tendre c vers l'infini, on doit pouvoir alors retrouver la mécanique de Newton à partir de la relativité restreinte.

Espace-temps de Minkowski et transformée de Lorentz

Dorénavant, il faut donc penser en termes d'espace-temps et repérer les événements à l'aide de 4 coordonnées (3 d'espace, 1 de temps). Un "vecteur position" sera ainsi $\vec{x} = (ct, \vec{r})$. Supposons maintenant qu'un observateur (on parle moins de référentiel en relativité) se déplace avec une vitesse v constante dans la direction z , vitesse mesurée par rapport à un autre observateur. Un événement repéré par $\vec{x}$ par l'observateur immobile sera vu par l'observateur en mouvement en

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \equiv \mathcal{L}\vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

où $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz (parfois appelé "boost"), $\beta = v/c$. Cette transformation $\mathcal{L}$ est appelée transformation de Lorentz. On peut démontrer qu'elle est la seule permettant de rendre compte de l'invariance de c dans un espace homogène et isotrope.

Etant donné ce que signifie maintenant "changer de référentiel", quels peuvent être les invariants du système lors d'une telle opération? La réponse à cette question est la généralisation du principe d'inertie galiléen: les lois de la physique doivent être indépendantes de l'observateur. Ainsi, une relation causale dans un référentiel doit le rester dans un autre. Cela implique la conservation de la "distance" entre deux événements se produisant dans cet espace-temps à 4 dimensions.

La notion de distance entre deux événements est définie à partir du produit scalaire de deux "vecteurs" position. Plaçons-nous en un point $\vec{x}$ et en un point situé immédiatement à côté, en $\vec{x} + d\vec{x}$. On peut vérifier que la forme quadratique suivante

$$ds^2 \equiv (\vec{x} + d\vec{x}) \cdot \vec{x} = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (3.87)$$

où $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, est bien un invariant de Lorentz. En utilisant la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, cette expression peut s'écrire de façon plus compacte sous la forme

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.88)$$

où $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ et où la matrice $\eta_{\mu\nu}$ a la forme suivante

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Cette matrice constitue un tenseur de rang 2 et est appelée la métrique car elle porte en elle toute l'information concernant la géométrie locale de l'espace-temps. La présence du signe moins indique que l'espace-temps de la relativité restreinte n'est pas euclidien mais riemannien: $\eta_{\mu\nu}$ décrit l'espace-temps de Minkowski.

Ainsi, en relativité, opérer un “changement de référentiel” revient tout bêtement à faire un changement de système de coordonnées. Un tel changement est décrit par une matrice de passage de la forme $x' = \Lambda x$. L'élément infinitésimal de distance en relativité restreinte devant rester conservé, on a alors (écriture matricielle)

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx')^T \eta dx' = (\Lambda dx)^T \eta \Lambda dx \\ &= (dx)^T \Lambda^T \eta \Lambda dx \equiv (dx)^T \eta dx \end{aligned} \quad (3.90)$$

ce qui implique que les changements de coordonnées physiquement acceptables doivent vérifier

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda . \quad (3.91)$$

L'ensemble des matrices Λ qui satisfont cette condition sont connues sous le nom des transformées de Lorentz et constituent un groupe (le groupe de Lorentz). Dans ce groupe, on y trouve évidemment les “boosts” (matrices de la forme de $\mathcal{L}$) mais également les rotations.

Cinématique relativiste

Faire de la cinématique en relativité restreinte consiste à définir des grandeurs porteuses d'une signification physique mais plongées dans l'espace-temps de Minkowski. Ce sont ces objets mathématiques que l'on appelle les quadrivecteurs et, d'une manière plus générale, les tenseurs (un quadrivecteur est un tenseur d'ordre 1, un scalaire un tenseur d'ordre 0). On peut appréhender un tenseur comme étant un tableau de nombres obéissant à certaines propriétés lors d'un changement de système de coordonnées. Ces propriétés mathématiques décrivent la notion physique d'indépendance des lois selon les observateurs.

Ainsi, la 4-position $x^\mu \equiv (ct, \vec{r})$ d'un événement se transforme selon le groupe de Lorentz et sa 4-norme est conservée (ie, indépendante du système de coordonnées):

$$\begin{aligned} \vec{x}_a \cdot \vec{x}_b &\equiv (x_b - x_a)^\mu (x_b - x_a)_\mu = (x_b - x_a)^\mu \eta_{\mu\nu} (x_b - x_a)^\nu \\ &= c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Il est utile d'introduire ici la notion de *temps propre*. L'élément infinitésimal de distance s'écrit $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ où la variable t est le temps “vu” par un observateur non lié à l'événement. Au contraire, l'observateur lié à l'événement va mesurer un autre temps, appelé temps propre. Dans ce “référentiel”, l'horloge suit le mouvement et il n'y a donc pas de déplacement mesurable, ie $dl = 0$. On définit donc le temps propre τ par

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (3.93)$$

Ce temps propre est relié au temps mesuré par l'observateur immobile par $dt = \gamma d\tau$ (dilatation du temps).

Comme en mécanique Newtonienne, on va chercher maintenant à construire l'équivalent relativiste de la vitesse, l'accélération, l'énergie, la force etc... La 4-vitesse se généralise aisément de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 U^\mu &\equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \\
 &= \frac{d}{d\tau}(ct, x^\alpha) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) \\
 &= \left(\gamma c, \gamma \frac{dx^\alpha}{dt}\right) \\
 &= (\gamma c, \gamma \vec{v})
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

et l'on peut vérifier que sa 4-norme est bien conservée. Il en va de même pour le 4-vecteur énergie-impulsion

$$P^\mu \equiv m_0 U^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m_0 \vec{v}\right) \tag{3.95}$$

où E est l'énergie totale (cinétique + "interne") de la particule et m_0 sa masse au repos (i.e. mesurée dans le référentiel où elle est immobile).

Dynamique relativiste

La conservation de la 4-norme des 4-vecteurs précédents permet déjà de faire une cinématique relativiste, fournissant parfois des informations suffisantes. Toutefois, lorsqu'il s'avère nécessaire de résoudre le problème dynamique, il faut appliquer une variante relativiste du principe fondamental de la dynamique galiléenne, $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Cette variante peut immédiatement s'écrire sous la forme

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = f^\mu \tag{3.96}$$

où f^μ doit être alors l'expression invariante de Lorentz des forces en présence. Regardons par exemple le cas d'une particule de masse m , charge q soumise à la force électromagnétique (champs électrique $\vec{\mathcal{E}}$ et magnétique $\vec{B}$). Les équations Newtoniennes du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{p}}{dt} &= q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}) \\
 \frac{dE}{dt} &= q\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{E}}
 \end{aligned}$$

La dynamique relativiste, version invariante de Lorentz de ces équations, est

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m_0} F^{\mu\nu} U_\nu \tag{3.97}$$

où $F^{\mu\nu}$ le tenseur électromagnétique d'ordre 2 construit à partir des champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{B}$.

Dans la mécanique du point matériel, il suffit de connaître le 4-vecteur énergie-impulsion P^μ d'une particule. Mais pour un écoulement fluide, il faut définir ce qu'on appelle le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$, flux du 4-vecteur P^μ à travers une surface de constant x^ν . L'équivalent relativiste de l'équation de la dynamique des fluides peut alors être construit à partir de Navier-Stokes, dans le cas simple d'un fluide parfait¹⁰. On définit alors la densité du fluide (tenseur d'ordre 0) par

$$\rho = n_0 m = \gamma n_0 m_0 \quad (3.98)$$

où n_0 est le nombre de particules par unité de volume vues dans le référentiel propre et m_0 leur masse au repos. Pour un fluide faiblement relativiste on a $\gamma \simeq 1 + \beta^2/2$ et la densité devient

$$\rho \simeq n_0 m_0 + \frac{n_0 m_0 v^2}{2c^2} = \rho_0 + \frac{u}{c^2} \quad (3.99)$$

où $\rho_0 = n_0 m_0$ est la densité volumique dans le référentiel propre et $u = \rho_0 v^2/2$ est la densité d'énergie interne du fluide: plus un fluide est rapide et plus il devient "dense". On peut ensuite construire le tenseur énergie-impulsion en regardant comment il doit s'écrire dans le référentiel propre. Dans ce référentiel, on peut montrer qu'il s'écrit forcément de la forme

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

car (i) la pression P est isotrope et normale à l'élément de surface qui lui est soumis (loi de Pascal) et (ii) $T^{00} = e \equiv \rho_0 \varepsilon + \rho_0 c^2$ doit être une version relativiste de la densité propre d'énergie interne du fluide (incluant les mouvements microscopiques ε et l'énergie de masse). Or, dans ce référentiel, la 4-vitesse s'écrit $U^\mu = (c, \vec{v})$. La seule façon de reproduire l'expression ci-dessus avec une écriture tensorielle est alors

$$T^{\mu\nu} = (e + P) \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} - P \eta^{\mu\nu}$$

(3.101)

Ceci est donc l'écriture du tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait en relativité restreinte.

Pourquoi restreinte?

A priori, la relativité restreinte semble donc permettre une réunification de toute la physique fondamentale du 19ème siècle, mécanique et électromagnétisme. Pour chacune des forces en présence, il suffit de trouver une expression invariante sous le groupe de Lorentz et redonnant, lorsque c tend vers l'infini, l'expression galiléenne connue. Mais ce principe d'invariance de Lorentz (ou principe de relativité) s'avère être très contraignant car il oblige à écarter toutes les expressions pour les forces qui ne seraient pas invariantes par "changement de référentiel". C'est ainsi que certaines

10. Un fluide parfait est complètement caractérisé par sa densité et sa pression.

lois de la physique sont tout simplement éliminées. Or, si la prise en compte de la force électromagnétique n'a pas posé de problème, il n'en est pas de même pour la gravitation de Newton. Aucune description n'a ainsi pu être trouvée dans le cadre de la relativité restreinte qui, de ce fait, néglige purement et simplement la gravitation.

La relativité restreinte ne prend pas non plus en compte les effets d'inertie liés à une accélération. En effet, la transformée de Lorentz décrit uniquement le passage d'un référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un autre.

3.3.2 Notions élémentaires de relativité générale

Systèmes de références accélérés

Prenons le cas simple du passage à un référentiel en rotation uniforme. La mécanique galiléenne nous dit alors que dans ce référentiel (dit non-inertiel) vont se produire des effets d'inertie, les “forces d'inertie”. Ces effets se traduisent par une modification dans l'écriture de l'élément de distance. Ainsi, pour une rotation de vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe z on obtient

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt \quad (3.102)$$

On voit donc apparaître des termes non-diagonaux dans la matrice décrivant la métrique. Ainsi, en toute généralité, on peut dire qu'un passage à un système de référence *accéléré* se décrit par

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.103)$$

où les x^μ sont les coordonnées (en général curvilignes) dans le nouveau système.

Le Principe de Mach

Comment faire en pratique pour mesurer la vitesse de rotation d'un corps ? D'après Newton (et notre bon sens), la réponse est évidente: il suffit de se placer dans un référentiel fixe (lié à des étoiles lointaines par exemple) et de le voir tourner devant nous. Mais on peut également se placer dans le référentiel “propre” (lié au corps en mouvement) et mesurer la force nécessaire pour maintenir la cohésion du corps malgré la force centrifuge (ou bien mesurer la déformation du corps: exemple la forme que prend la surface de l'eau contenue dans un seau en rotation). Question philosophique: comment se fait-il donc que ces deux manières indépendantes donnent le même résultat ?

La réponse de Newton est l'existence d'un “espace absolu”, vis-à-vis duquel toute accélération produit des effets mesurables, les forces d'inerties.

Ernst Mach proposa en 1880 que l'inertie serait en fait due à l'interaction gravitationnelle des corps célestes. Ce serait la distribution de la matière dans l'univers *entier* qui déterminerait les effets d'inertie *locaux*.

Dans la vision de Mach, une large masse produirait des effets d'inertie importants tandis qu'elle n'aurait aucun effet dans celle de Newton.

Géométrisation de l'espace-temps

Lorsque Einstein se pencha sur les points faibles de la relativité restreinte, il était évidemment au courant du principe de Mach ce qui le guida dans sa recherche. Il réalisa ainsi que la gravitation est une force très particulière, et ceci à deux titres :

(1) tous les corps y sont soumis, ce qui n'est pas le cas de la force électromagnétique;

(2) tous les corps se comportent de la même façon, du fait de l'équivalence (prouvée expérimentalement) entre masse grave et masse inerte (voir fig. 3.21).

C'est donc une force dont les effets sont totalement indépendants des propriétés des corps qui y sont soumis. La révolution conceptuelle d'Einstein a consisté alors à réaliser que la gravité était de même *nature* qu'une accélération. Il est facile de le voir avec l'exemple célèbre de l'observateur dans un ascenseur plongé dans un champ de gravité g uniforme. Si l'ascenseur monte avec une accélération a constante, l'observateur subit une gravité effective plus grande $g_{eff} = g + a$. L'expérience inverse consiste à laisser tomber l'ascenseur en chute libre: l'observateur se trouve en apesanteur, libéré de l'action de la gravité. Or, l'accélération est une propriété purement *géométrique* de l'espace-temps: $a \sim \Delta x / (\Delta t)^2$. Il en résulte que le champ gravitationnel doit l'être également. Au lieu de penser à la gravité en termes d'une force radiale qui décroît en $1/r^2$ (vision Newtonienne), ici la gravité est un champ ("terrain") déformé dans (sur) lequel on se déplace.

Ainsi donc, en relativité générale, les effets de la gravitation et toutes les forces d'inertie (comme on l'a vu plus haut) se trouvent d'emblée inclus dans la métrique de l'espace-temps, c'est à dire dans les $g_{\mu\nu}$. Par ailleurs, la métrique elle-même émerge de la distribution de masse (et donc aussi d'énergie) présente. En ce sens, la relativité générale satisfait bien au Principe de Mach.

Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence de la relativité générale stipule que toutes les lois de la physique sont *localement* les mêmes que dans un espace plat. C'est une extension naturelle du principe d'invariance par transformée de Lorentz. C'est un principe extrêmement fort, qui repose sur une image géométrique de l'espace-temps. En effet, on peut toujours approcher localement une surface courbe par son plan tangent. Cela revient à faire un développement limité de la métrique au voisinage d'un point quelconque de l'espace-temps et fournit

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + o(|x^2|) . \quad (3.104)$$

Ce faisant, on voit qu'il est possible de définir *localement* un espace de Minkowski (le plan tangent). Cela signifie donc que les lois physiques de la relativité restreinte, élaborées dans un espace plat, doivent être encore localement valables. On peut donc à nouveau parler de référentiels inertiels (parfois appelés Lorentziens, dans lesquels l'observateur est en chute libre), pourvus qu'ils soient locaux. Plus la courbure locale de l'espace-temps est grande, et plus les termes négligés lors du développement

limité deviennent forts à mesure que l'on s'éloigne du point considéré. Les effets de relativité générale, forces inertielles et gravitationnelle, se traduisent donc par la non-uniformité de l'espace-temps (dérivées secondes de la métrique non nulles).

A ce titre, la relativité générale ne satisfait plus au Principe de Mach mais à la vision de Newton: localement, les lois du mouvement ne sont en effet plus affectées par les corps en présence. Le Principe d'équivalence est quelque part entre le Principe de Mach et l'approche de Newton. Mais à cause du contenu énergie-masse de l'univers, l'égalité $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ne peut jamais être réalisée partout.

Notion de dérivation covariante

Faire un changement de référentiel en relativité générale consiste simplement à changer de position $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ dans l'espace-temps. Il est donc *nécessaire* de faire appel à des notions de géométrie différentielle, afin de comprendre comment se transforment les objets physiques que l'on manipule lors d'un changement de coordonnées.

Nous avons vu que l'élément de distance infinitésimal ds^2 , défini par l'équation (3.103), devait être invariant que l'on se place dans le système de coordonnées x ou dans un autre x' . D'une manière générale, le produit scalaire de deux 4-vecteurs A et B

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv A_\nu B^\nu = g_{\nu\sigma} A^\sigma B^\nu \quad (3.105)$$

doit également rester invariant lors d'un changement de système de coordonnées. Cela implique la transformation suivante pour les 4-vecteurs (tenseurs de rang 1)

$$\begin{aligned} \text{Contravariant:} \quad A'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \\ \text{Covariant:} \quad B'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \end{aligned} \quad (3.106)$$

Pour les matrices (tenseurs de rang 2) les formules de changement de coordonnées s'écrivent:

$$\begin{aligned} \text{Contravariant:} \quad F'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} F^{\sigma\rho} \\ \text{Covariant:} \quad G'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} G_{\sigma\rho} \\ \text{Mixte:} \quad H'^\mu_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} H^\sigma_\rho \end{aligned}$$

Ainsi donc, tous les objets mathématiques que nous allons employer sont des tenseurs, c'est à dire des objets qui obéissent à certaines règles lors d'un changement de coordonnées (un tenseur de rang nul est un scalaire invariant). La question qu'on se pose ensuite est de comprendre la modification d'une grandeur lorsqu'on passe de x à $x + dx$. Si l'on se place dans un nouveau système de coordonnées $x'(x)$, un déplacement infinitésimal s'écrira

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3.107)$$

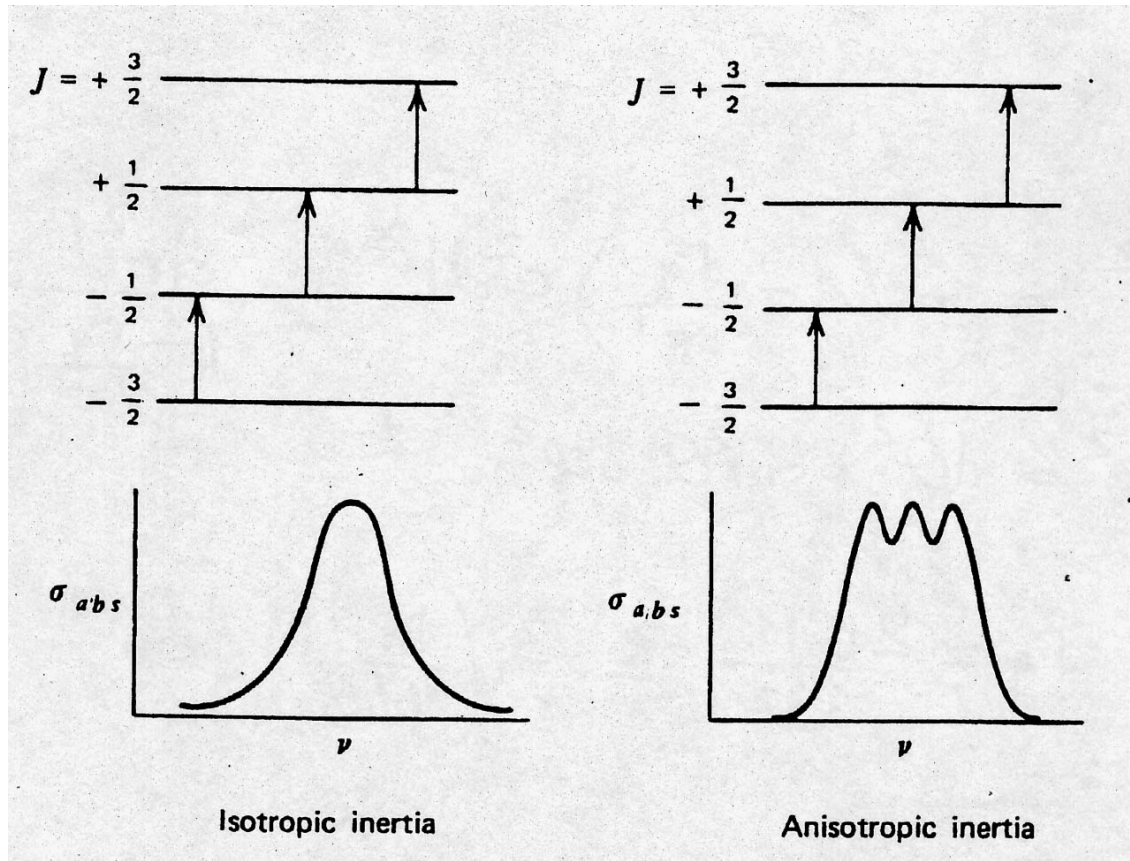


FIG. 3.21 – Principe de Mach ou principe d'équivalence? Si l'inertie, donc la masse inertielle m , des objets dépend de la distribution de matière dans l'univers, alors il suffit de mesurer un effet dépendant de m lorsqu'une particule est accélérée vers une concentration de masse ou au contraire s'en éloigne. Pour cela, on peut faire deux expériences à 6 mois d'intervalle, lorsque la Terre est la plus proche et la plus éloignée du Centre Galactique. Hughes et ses collaborateurs ont ainsi mesuré en 1960 l'absorption résonante de photons par un noyau de Lithium ${}^7\text{Li}$ placé dans un champ magnétique de 4700 Gauss. L'état fondamental possédant un spin $3/2$, la levée de dégénérescence par effet Zeeman devrait fournir 4 niveaux d'énergie, produisant ainsi un spectre en absorption. Ce spectre aura une forme en cloche si l'inertie est localement isotrope. Si, au contraire, elle dépend bien de la distribution de matière dans l'univers, les niveaux d'énergie ne seront pas régulièrement espacés, produisant un spectre différent. L'expérience n'a rien montré ce qui signifie que, si un effet d'anisotropie a bien eu lieu, il n'a pu être plus large que la largeur de la raie elle-même, c'est à dire $5.3 \cdot 10^{-21}$ MeV. En modélisant le ${}^7\text{Li}$ par un proton orbitant autour d'un noyau, l'anisotropie Δm de la masse du proton doit vérifier $\Delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) \simeq \frac{\Delta m}{m} \left(\frac{p^2}{2m}\right) \leq 5.3 \cdot 10^{-21}$ MeV. Puisque l'énergie cinétique du proton $p^2/2m$ est supérieure à 0.5 Mev, on en conclue que, si la masse inertielle est assujettie à des effets anisotropes, elle ne peut dépasser $\frac{\Delta m}{m} \leq 10^{-20}$. D'après cette expérience, c'est donc le principe d'équivalence qui semble le mieux décrire la nature.

Pour un vecteur contravariant¹¹ $A^\mu(x)$, la différenciation naïve de (3.106) fournit

$$\begin{aligned} dA^\mu &= A'^\mu(x+dx) - A'^\mu(x) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dA^\nu + A^\nu d\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dA^\nu + A^\nu \frac{\partial(\partial x'^\mu)}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dA^\nu + A^\nu \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} dx^\sigma \end{aligned}$$

Sauf cas très particulier (transformation $x'(x)$ linéaire en x), la différence de deux vecteurs contravariants $A'^\mu(x+dx) - A'^\mu(x)$ ne fournit pas un vecteur contravariant car la condition (3.106) n'est pas vérifiée! Une erreur de raisonnement a donc été commise. En fait, pour pouvoir retrancher deux objets, il faut qu'ils soient définis dans le même "espace", ce qui n'était pas le cas ci-dessus. Il faut donc transporter d'abord $A'^\mu(x)$ en $x+dx$, puis faire la différence: la différenciation ordinaire ne doit pas être utilisée. Nous devons donc définir une nouvelle opération, une sorte de transport parallèle, qui conserve les propriétés de la grandeur transportée: la dérivation covariante (ie, "qui bouge avec"). En faisant appel à la géométrie analytique riemannienne, on peut montrer que la dérivée covariante doit s'écrire

$$\frac{DA^\mu}{Dx^\nu} \equiv A^\mu_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\rho \quad (3.108)$$

$$\frac{DB_\mu}{Dx^\nu} \equiv B_{\mu;\nu} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} B_\rho \quad (3.109)$$

où les coefficients

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\rho} + g_{\rho\sigma,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}) \quad (3.110)$$

sont appelés symboles de Christoffel. Ils ne dépendent que de la métrique et sont nuls pour un espace-temps plat (comme celui de Minkowski). Un vecteur contravariant A^μ transporté parallèlement de x à $x+dx$ vérifiera donc

$$dA^\mu = dx^\nu \frac{DA^\mu}{Dx^\nu} = 0 \quad (3.111)$$

Si l'on désire calculer l'évolution d'une grandeur A^μ le long d'une trajectoire, on écrira alors

$$\frac{DA^\mu}{Ds} = \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\rho}{ds} A^\nu. \quad (3.112)$$

Quelles équations écrire?

Les étapes à suivre pour construire une théorie complète sont alors les suivantes:

- (1) Ecrire les équations dynamiques en relativité restreinte: elles n'incluent ni gravitation ni forces d'inertie mais elles sont localement valables d'après le principe d'équivalence.

11. Les vecteurs que nous utilisons habituellement sont contravariants. Dans une géométrie de Minkowski, si $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (-A^0, \vec{A})$.

- (2) Remplacer les opérateurs géométriques (divergence, gradient etc...) par des opérateurs covariants: ce faisant, la gravitation et toutes les forces d'inertie sont prises en compte dans la courbure locale de l'espace-temps (symboles de Christoffels et leurs dérivées non nuls).
- (3) Trouver une équation qui nous fournisse la métrique de l'espace-temps en fonction de son contenu (démarche en conformité avec le principe de Mach).

Géodésiques

Voici un exemple simple de la procédure employée. Lorsqu'une particule ne subit aucune force, sa 4-vitesse demeure inchangée: elle est alors dite en chute libre. L'équation de sa trajectoire ou *géodésique* est alors obtenue facilement à partir de l'équation du mouvement de la relativité restreinte

$$\frac{dU^\mu}{ds} = 0 \quad (3.113)$$

Il suffit de remplacer la dérivée simple (dU^μ) par la dérivée covariante (DU^μ), ce qui donne

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu U^\nu U^\sigma = 0 \quad (3.114)$$

En l'exprimant à l'aide des coordonnées, nous obtenons la "forme normale" de l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (3.115)$$

qui ne dépend que de la métrique. Il suffit donc de connaître celle-ci et la trajectoire de toute particule libre pourra être calculée.

Autre exemple simple, celui d'une particule soumise à un champ électromagnétique. A partir de l'équation (3.97) obtenue en relativité restreinte et en remplaçant la dérivée simple par la dérivée covariante, nous obtenons l'équation du mouvement d'une particule soumise à un champ électromagnétique en relativité générale

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu U^\nu U^\sigma = \frac{q}{m_0 c} F^{\mu\nu} U_\nu \quad (3.116)$$

où $F^{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique.

L'équation d'Einstein

Dans la théorie Newtonienne de la gravité, le champ de gravitation Φ_G , qui donne lieu à une force par unité de masse $\vec{f} = -\vec{\nabla}\Phi_G$, est donné par l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi_G = 4\pi G\rho . \quad (3.117)$$

Le champ (en fait, ses dérivées secondes) est donc obtenu dès que l'on connaît sa source, qui n'est autre que la densité locale de matière. En relativité $E = mc^2$, ce

qui implique que toute forme d'énergie peut agir comme une source et modifier ainsi le champ gravitationnel. En relativité restreinte, la conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (3.118)$$

où le tenseur énergie-impulsion décrit le contenu énergétique non-gravitationnel présent dans l'espace-temps: celui d'un champ électromagnétique et celui de la matière. Pour étendre la validité de cette équation à la relativité générale, il suffit d'utiliser l'expression covariante de la divergence.

Nous savons donc comment prendre en compte la gravitation mais il nous manque toujours une équation jouant le rôle de l'équation de Poisson et permettant de connaître la métrique en fonction du contenu matière-énergie de l'espace-temps. C'est ce qu'exprime l'équation d'Einstein

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (3.119)$$

où $G^{\mu\nu}$ est un tenseur non-linéaire du deuxième ordre agissant sur la métrique $g_{\mu\nu}$. Elle a été obtenue en imposant qu'un certain nombre de contraintes soient satisfaites. En particulier, la conservation de l'énergie (3.118) et la limite Newtonnienne (équation de Poisson obtenue dans la limite des champs faibles $\Phi_G \ll Mc^2$).

L'équation d'Einstein étant locale, il est impossible de définir globalement ce qu'est l'espace-temps. Cela signifie qu'on peut parfaitement obtenir les $g_{\mu\nu}$ localement, mais qu'il est impossible d'en déduire la topologie globale de l'univers. D'autres considérations doivent alors entrer en ligne de compte: c'est l'objet de la cosmologie.

La relativité générale est une théorie extrêmement complexe qui, de ce fait, possède relativement peu d'applications pratiques: mirages gravitationnels, ondes gravitationnelles (notamment grâce à l'étude de systèmes binaires composés d'objets compacts) et calcul du champ gravitationnel extérieur créé par des objets massifs simples (stationnaires, possédant le maximum de symétries et isolés dans le vide). Dans la plupart des cas concrets de calculs de dynamique en relativité générale, la métrique est une donnée du problème et on traite la dynamique de la matière dans une métrique fixe. Ceci est valable tant que le tenseur énergie-impulsion de la matière est négligeable devant celui de la source de la métrique. C'est l'approximation classique des particules "tests": de la même manière, on néglige toujours le champ électromagnétique créé par une particule chargée en mouvement devant un champ créé par des sources extérieures.

3.3.3 Introduction à la physique des trous noirs

Les trous noirs¹² sont des solutions mathématiques "simples" des équations d'Einstein. Celles-ci ne décrivent pas *comment* un trou noir se forme, mais fournissent seulement ses propriétés une fois celui-ci formé. La raison en est simple: il

12. C'est John Wheeler qui leur attribua ce nom en 1968.

faudrait suivre l'évolution de la matière jusqu'à des densités telles que la structure de l'espace-temps s'en trouve profondément modifiée. Il faudrait donc pouvoir décrire l'état et la dynamique de la matière, couplées de façon auto-cohérente avec l'espace-temps. Pour cela, il serait nécessaire d'avoir une théorie quantique de la gravitation, ce qui n'est pas encore le cas...

Un trou noir est décrit par seulement trois grandeurs: sa masse M , sa charge électrique Q et son moment cinétique J . A l'heure actuelle il existe quatre types de solutions, autrement dit, quatre types de métriques:

Schwarzschild (1917): solution statique, à symétrie sphérique, avec $Q = J = 0$.

Reissner-Nordström (1918): solution statique, à symétrie sphérique, avec $J = 0$.

Kerr (1963): solution stationnaire, axisymétrique, avec $Q = 0$.

Kerr-Newman (1965): solution stationnaire et axisymétrique, avec Q et J non nuls.

A titre d'illustration, cette dernière solution s'écrit, dans les coordonnées de Boyer-Lindquist¹³

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{\Sigma c^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{4GMra}{\Sigma c^2} \sin^2 \theta c dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma c^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 \quad (3.120)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2\frac{GM}{c^2}r + a^2 + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0} \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ a &= \frac{J}{Mc} \end{aligned}$$

La solution de Kerr (trou noir en rotation) est obtenue pour $Q = 0$, celle de Reissner-Nordström (trou noir électriquement chargé) pour $J = 0$ et la plus simple, celle de Schwarzschild, pour $J = Q = 0$.

Trous noirs de Schwarzschild

La solution de Schwarzschild est la plus simple et s'utilise pour toute distribution de masse à symétrie sphérique et statique. La métrique de Schwarzschild s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.121)$$

13. Il existe un usage qui consiste à poser $c = G = 4\pi\epsilon_0 = 1$.

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ et

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} = 3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km} \quad (3.122)$$

est le rayon de Schwarzschild. Une étoile ou un trou noir de masse M engendrent tous deux la même métrique. Ce qui les distingue est leur compacité: une étoile possède un rayon supérieur au rayon de Schwarzschild, ce qui n'est plus vrai pour le trou noir.

La métrique de Schwarzschild est particulière en ce sens qu'on voit apparaître une variable "temps" qui semble être définie partout à l'extérieur de r_S . Ce "temps" semble donc jouer le rôle d'un temps absolu et permet de synchroniser les horloges de tous les observateurs. Mais il faut faire attention à l'interprétation de cette variable. En-deçà de r_S , ds^2 peut rester positive à condition d'inverser le rôle des variables "temps" et "distance": le champ gravitationnel n'est ni stationnaire à l'intérieur de ce rayon.

Le rayon de Schwarzschild décrit l'**horizon** d'un trou noir: toute particule (même un photons) qui traverse l'horizon se trouve causalement déconnectée du reste de l'univers. Aucune information ne peut sortir du trou noir. La singularité qui apparaît dans la métrique lorsque $r = r_S$ n'est pas une vraie singularité mais dépend du système de coordonnées choisi. Par exemple, en coordonnées cylindriques apparaît une singularité en $r = 0$ (distance à l'axe nulle). Mais un changement de coordonnées permet de lever cette singularité. A la traversée de l'horizon, il ne se produirait rien de particulier, sauf que l'on serait irrémédiablement piégé. Et plus l'on développerait de l'énergie pour s'en échapper, plus cette énergie "pèserait" sur l'espace-temps, ce qui aurait pour conséquence d'aggraver la chute.

Il en est autrement de la singularité en $r = 0$ car celle-ci ne peut être levée par un simple changement de variable. La présence d'une singularité pose évidemment la question de son sens physique. Comment comprendre une telle chose? Certains pensent qu'une théorie quantique de la gravitation modifierait notre description et résoudrait ce problème, d'autres que cette singularité est une "porte" vers d'autres univers etc... Dans ce domaine, la physique mathématique est portée par les ailes de l'imagination.

Une particule peut rester en orbite keplerienne autour du trou noir sans "ressentir" quoi que ce soit d'étrange (mise à part la relative importance du champ gravitationnel) jusqu'à une distance $r_{ms} = 3r_S$. Dans la région située entre l'horizon et ce rayon, appelée l'ergosphère, il ne lui est pas possible de maintenir une orbite circulaire sans fournir un travail. Par contre, elle peut encore s'échapper du puits gravitationnel, moyennant un travail encore plus grand. Dans l'ergosphère, les trajectoires circulaires sont instables: r_{ms} est l'orbite de la trajectoire marginalement stable (toute perturbation fait basculer la particule vers le trou noir).

En fait, la notion de "rayon" d'un trou noir n'existe pas en toute rigueur puisqu'on ne peut mesurer quelque chose de $r = 0$ vers la "surface". Par contre, il est toujours possible de mesurer la circonférence d'un trou noir, sur son horizon (à t et

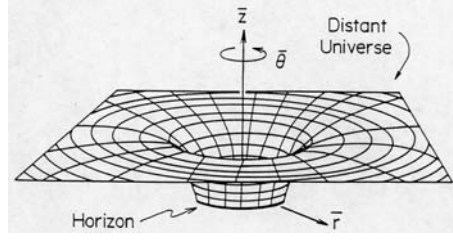


FIG. 3.22 – Diagramme illustrant la notion de courbure de l’espace-temps à proximité d’un trou noir de Schwarzschild.

$r = r_S$ constants). Pour un trou noir de Schwarzschild, sa circonférence vaut

$$\int_{\theta=\frac{\pi}{2}} ds = 2\pi r_S \quad (3.123)$$

ce qui permet d’attribuer un sens de “rayon” à r_S (figure 3.22).

Considérons le cas simple d’un mouvement purement radial de photons (ou de particules ultra-relativistes), c’est à dire pour lequel $d\varphi = d\theta = 0$. Les photons allant à la vitesse c quelque soit le référentiel, leurs géodésiques obéissent toujours à $ds^2 = 0$. La trajectoire d’un photon (géodésique) est alors simplement donnée par

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \quad (3.124)$$

Attention, cette équation fournit la variation de la coordonnée radiale en fonction du temps “absolu”. Si l’on veut obtenir la vitesse physique de la particule, il faut la mesurer par un observateur en chute libre lorsque celle-ci passe devant lui. Puisque cet observateur se trouve infiniment proche du photon, la métrique s’écrit localement $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt'^2 - dr'^2$. La matrice de changement de système de référence nous donne

$$\begin{aligned} dt' &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{1/2} dt \\ dr' &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1/2} dr \end{aligned} \quad (3.125)$$

La vitesse du photon vue par cet observateur proche est donc

$$v = \frac{dr'}{dt'} = \pm \frac{\sqrt{g_{11}} dr}{\sqrt{g_{00}} dt} = \pm c \quad (3.126)$$

bien égale à c , quelque soit le référentiel. Mesurée avec le temps propre de l’observateur lointain, cette vitesse deviendrait

$$\frac{dr'}{dt} = \pm \sqrt{g_{11}} \frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{1/2} \quad (3.127)$$

Du point de vue de cet observateur, un rayon lumineux semblerait se déplacer de moins en moins vite au fur et à mesure qu’il se rapproche de l’horizon du trou

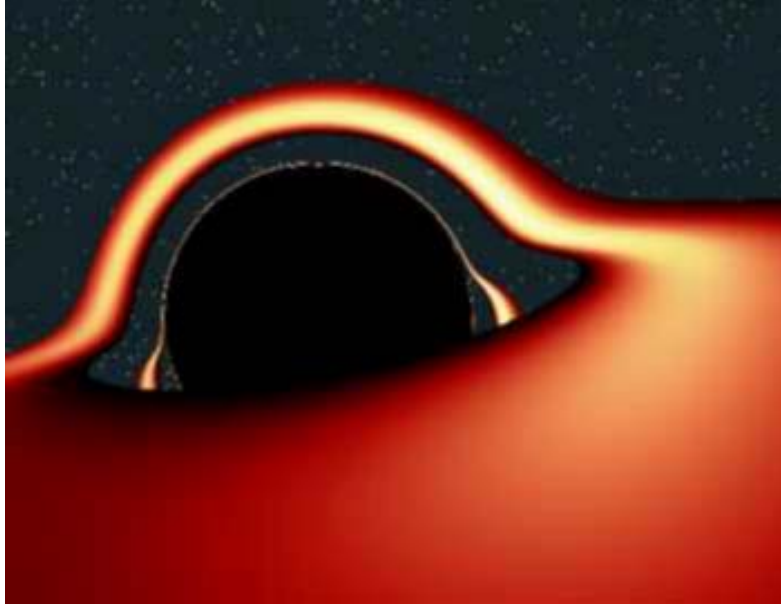


FIG. 3.23 – *Simulation numérique de l’émission d’un disque de matière situé autour d’un trou noir de Schwarzschild, vu par un observateur situé au-dessus du plan du disque. La courbure l’espace-temps autour du trou noir permet à cet observateur de voir des régions situées derrière le trou noir, mais également sous le disque. Pour un trou noir de Kerr, une simulation identique montrerait une anisotropie de l’émission, due à l’entraînement de l’espace-temps par la rotation du trou noir.*

noir. Si le photon se trouve à $t = 0$ à une distance r_0 , l’équation (3.124) montre qu’il lui faudrait un temps (mesuré par l’observateur lointain)

$$t = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_S}{c} \ln \left(\frac{r_0 - r_S}{r - r_S} \right) \quad (3.128)$$

donc infini, pour atteindre r_S . Le comportement d’une particule massive au voisinage d’un trou noir est qualitativement le même.

Cet effet de “gel” du mouvement n’est qu’une apparence, due à la différence entre le temps propre de la particule (qui traverse l’horizon en un temps propre fini) et le temps de l’observateur lointain. Si l’on imagine qu’une fusée tombe dans un trou noir et, qu’à l’intérieur de celle-ci une caméra filme ses occupants, aurions-nous une dernière image qui resterait figée pour l’éternité dès qu’ils franchissent l’horizon?

La réponse est non, à cause de l’effet dit de décalage vers le rouge (“redshift”) gravitationnel. Dans le référentiel propre de la fusée située en r_1 , ce signal sera émis avec une fréquence

$$\nu_1 \equiv \frac{1}{d\tau_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}(r_1)}dt} \quad (3.129)$$

L’observateur situé en r_2 et mesurera ce signal avec une fréquence

$$\nu_2 \equiv \frac{1}{d\tau_2} = \frac{c}{\sqrt{g_{\mu\nu}(r_2)dx^\mu dx^\nu}} \quad (3.130)$$

qui ne sera pas la même puisque la métrique est différente en r_1 et en r_2 . Ainsi, pour un observateur lointain ($r_2 \gg r_S$), donc situé dans une région sans courbure, le décalage en fréquence sera

$$\begin{aligned} \frac{\nu_2}{\nu_1} &= \frac{\sqrt{g_{00}(r_1)}}{\sqrt{g_{00}(r_2)}} = \left(\frac{1 - r_S/r_1}{1 - r_S/r_2} \right)^{1/2} \\ &= \left(1 - \frac{r_S}{r_1} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.131)$$

Au fur et à mesure que la fusée tombe vers le trou noir, le signal qu'elle émet devient de plus en plus faible, avec une fréquence de plus en plus petite. Lorsque la fusée atteint l'horizon, le signal reçu possède une fréquence nulle: il n'y a pas de signal reçu, les photons émis sont tous "avalés" par le trou noir. L'énergie d'un photon décroît lorsqu'il quitte le puits gravitationnel (décalage vers le rouge), augmente lorsqu'il s'enfonce dedans (décalage vers le bleu). Cet effet fut mesuré pour la première fois en 1915 par Adams, en mesurant le décalage subit par les raies émises dans l'atmosphère d'une naine blanche.

3.3.4 Les trous noirs en astrophysique

Un trou noir est, par définition, inobservable directement. Cependant, il y a plusieurs moyens indirects de détection de tels objets, grâce à leur action gravitationnelle sur leur environnement immédiat:

- (1) **attraction d'une étoile compagne** (système binaire); la présence du trou noir invisible peut se détecter par le mouvement apparent du compagne. Si la masse déduite par les lois de Kepler est supérieure à la masse critique $\sim 3M_\odot$, c'est un trou noir.
- (2) **accrétion de matière** ; la chute de matière (gaz et/ou étoiles) dans un trou noir s'accompagne de phénomènes énergétiques observables. On distingue deux types d'accrétion:

Accrétion de Bondi-Hoyle: la matière tombe quasiment en chute libre, il n'y a pas ou peu de rotation. Ce type d'accrétion peut se produire dans les systèmes binaires, où la matière provient du compagne, ou bien lorsqu'un trou noir isolé rencontre un nuage interstellaire et en attire la matière.

Disque d'accrétion: la matière possède suffisamment de moment cinétique pour établir un équilibre keplerien autour du trou noir. La chute de matière nécessite alors un processus dissipatif dans le disque.

- (3) **mirages gravitationnels:** la déformation de la structure proche de l'espace-temps par le trou noir provoque la déviation des rayons lumineux. Cette déviation peut nous amener à observer une ou plusieurs images d'un objet (typiquement une galaxie) se trouvant entre nous et le trou noir. Lorsque ces mirages sont identifiés, il est ensuite possible de remonter à la "lentille" responsable.

Notes sur les disques d'accrétion

On considère un disque de gaz en rotation keplerienne autour d'une masse M centrale. On suppose donc implicitement (1) que l'auto-gravité du disque est négligeable devant celle de l'objet central et, (2) que le disque est peu chaud, autrement dit que le gradient de pression n'offre pas de support contre la gravité (équilibre gravité/force centrifuge). L'énergie mécanique d'une particule de masse m se trouvant à un rayon r est $E = -GMm/2r$. Une telle particule, si rien ne se passe, restera sur son orbite. Par contre, s'il existe un processus dissipatif dans le disque qui la freine (par des frottements visqueux par ex, comme un satellite à basse altitude terrestre), elle va perdre de l'énergie et donc diminuer son rayon. Sa trajectoire sera alors une spirale, où la vitesse radiale peut être faible par rapport à la vitesse azimutale (keplerienne). Si le disque s'étend jusqu'à un rayon externe r_e , l'énergie libérée par unité de masse vaut

$$\Delta E = E(r_e) - E(r_i) = \frac{GM}{2r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r_e}\right) \simeq \frac{GM}{2r_i} \quad (3.132)$$

pour un rayon interne du disque $r_i \ll r_e$. La dissipation produisant un flux de masse $\dot{M}_a$ (taux d'accrétion) vers l'objet central, on obtient alors une libération d'énergie mécanique qui est rayonnée par la surface du disque. La puissance totale rayonnée vaut

$$L = \Delta E \dot{M}_a = \frac{GM\dot{M}_a}{2r_i} \quad (3.133)$$

Lorsque l'objet central est un trou noir, $r_i = 3r_S$ puisqu'en deça de ce rayon la matière ne peut plus rester en rotation keplerienne et elle tombe vers l'horizon. Ainsi, pour un trou noir de Schwarzschild, la puissance libérée vaut

$$L = \frac{\dot{M}_a c^2}{12} \quad (3.134)$$

Cette expression est notable à deux titres: (1) la puissance totale libérée est indépendante de la masse du trou noir, seul compte le taux d'accrétion (qui, a priori, est imposé par le réservoir de masse extérieur); (2) ce processus d'accrétion possède une fantastique efficacité de conversion d'énergie de masse en énergie lumineuse: 8 %, à comparer aux 0,7 % de la chaîne p-p. C'est le processus physique le plus efficace connu à ce jour.

Si la puissance totale est indépendante de la masse du trou noir, le flux rayonné lui ne l'est pas. En effet, si le disque est optiquement épais, nous pouvons faire l'hypothèse qu'il rayonne localement comme un corps noir. Dans un anneau entre r et $r + dr$, de surface $2\pi r dr$, le flux de masse $\dot{M}_a$ a perdu une énergie par unité de masse $dE = d(-GM/2r) = GMdr/2r^2$. La puissance rayonnée par cet anneau vaut donc $dL = 2 * 2\pi r dr \sigma T_{eff}^4 = \dot{M}_a dE$ (facteur 2 provient des 2 surfaces), ce qui fournit une température effective à la surface du disque

$$T_{eff}(r) = \left(\frac{GM\dot{M}_a}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}$$

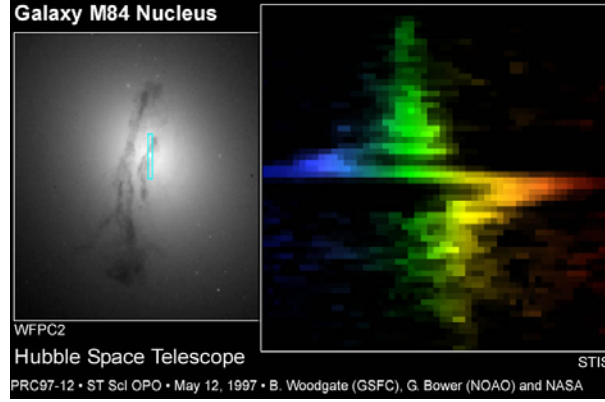


FIG. 3.24 – *A gauche: image visible montrant le coeur de la galaxie M84, dont la forte luminosité suggérerait la présence d'un trou noir supermassif. Par une méthode spectroscopique (à droite), il a été prouvé que dans une petite région de l'espace (partie bleue, de dimensions 26 al), se trouve une masse d'au moins $3 \cdot 10^8 M_{\odot}$. Une telle masse met en mouvement Keplerien la matière émettrice ce qui, à partir du décalage Doppler, a permis de mesurer des vitesses de rotation de l'ordre de 400 km/s.*

$$\begin{aligned} &\simeq 10^7 \left(\frac{\dot{M}_a}{10^{-8} M_{\odot}/yr} \right)^{1/4} \left(\frac{M}{3M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left(\frac{r}{3r_s} \right)^{-3/4} \text{ K} \\ &\simeq 2 \cdot 10^5 \left(\frac{\dot{M}_a}{1 M_{\odot}/yr} \right)^{1/4} \left(\frac{M}{10^8 M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left(\frac{r}{3r_s} \right)^{-3/4} \text{ K} \end{aligned}$$

décroissante avec le rayon en $r^{-3/4}$. Ainsi, pour les taux d'accrétion choisis, on voit que les régions internes d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir stellaire ($M \geq 3 M_{\odot}$) vont émettre dans le domaine des X ($T \sim 10^7 \text{ K} \sim \text{keV}$), tandis qu'autour d'un trou noir supermassif ($M \sim 10^8 M_{\odot}$), ce sera dans le domaine visible ou ultraviolet ($T \sim 10^5 \text{ K} \sim 10 \text{ eV}$). La raison en est simple. Pour un trou noir stellaire, le rayon de Schwarzschild est plus petit ce qui implique un puits gravitationnel plus profond donc une plus grande énergie libérée.

Le choix des taux d'accrétion ci-dessus a été dicté par la volonté de reproduire la luminosité totale émise par certains objets (puisque L ne dépend que $\dot{M}_a$): NAGs et binaires X.

Noyaux actifs de galaxies et trous noirs supermassifs

Les Noyaux Actifs de Galaxies (NAG) forment une classe d'objets qui regroupe les radio galaxies, les galaxies de Seyfert, les quasars et des objets extragalactiques particuliers, comme les BL Lacs. Tous ces objets ont la particularité d'avoir une émission extrêmement intense, de 10^8 à $10^{14} L_{\odot}$ selon les objets et provenant du noyau central de la galaxie. Or, une simple superposition des spectres d'une multitude d'étoiles ne peut reproduire le spectre observé, qui possède une signature

particulière dans le domaine visible-UV. Quelle était donc la source d'énergie de ces monstres?

Ce fut l'astrophysicien anglais Lynden-Bell qui, le premier, proposa en 1969 que les NAG étaient constitués d'un disque de matière (gaz interstellaire et étoiles) en rotation keplerienne autour d'un trou noir supermassif (d'une masse de 10^4 à $10^{10} M_\odot$). La source d'énergie des NAG serait alors la conversion de l'énergie mécanique de la matière en rayonnement, produisant ainsi une luminosité

$$L_{acc} \simeq 1.2 \cdot 10^{12} \left(\frac{\dot{M}_a}{1 M_\odot / yr} \right) L_\odot \quad (3.135)$$

Ce modèle de disque d'accrétion autour d'un trou noir supermassif est le paradigme à travers lequel toutes les observations actuelles de galaxies actives sont comprises. Il n'existe que depuis peu des indices observationnels directs (signatures spectroscopiques des régions internes) de la présence d'un tel trou noir supermassif.

Comment un trou noir supermassif a-t-il pu se former? Cette question pose plusieurs problèmes théoriques et divers scénarii furent proposés:

Effondrement d'une étoile, puis accrétion: un trou noir stellaire se forme, puis du gaz interstellaire le nourrit continuellement. Mais il faut expliquer d'un part, pourquoi les trous noirs supermassifs ne se forment qu'au centre des galaxies, et puis surtout, comment l'accrétion peut être suffisamment efficace pour faire grossir le trou noir sur une échelle de temps inférieure à l'âge de l'univers.

Effondrement d'un amas d'étoiles au centre: dans le noyau des galaxies, on peut s'attendre à avoir un grand nombre d'étoiles gravitationnellement liées. L'effondrement de cet amas sur lui-même pourrait mener à la formation d'un trou noir supermassif. Des simulations numériques montrent effectivement qu'un amas de 10^7 à 10^8 étoiles de 1 à $10 M_\odot$ chacune, ayant des vitesses de 800 à 2000 km/s et confinées dans un rayon plus petit que 0.1 pc est instable.

Origine cosmologique: cependant, l'existence de quasars très jeunes (car très lointains) et cependant déjà très lumineux impose que la formation des trous noirs supermassifs se produise très tôt dans l'histoire de l'univers. Des fluctuations de densité dans l'univers primordial (à $t \sim 100$ sec) permettraient peut-être de former ces trous noirs supermassifs, autour desquels ensuite se développeraient les galaxies.

Binaires X et candidats trous noirs stellaires

Une binaire X est un système binaire dont l'émission est très intense aux rayons X. Parmi l'ensemble des binaires X de notre galaxie, seules quelques unes sont susceptibles d'abriter un trou noir. En particulier Cyg X-1 (masse de l'objet compact supérieure à $7 M_\odot$ et masse de la secondaire estimée entre 20 et $30 M_\odot$) et GROJ1655-40 (masse de l'objet compact de l'ordre de $7 M_\odot$ et $\sim 2.3 M_\odot$ pour

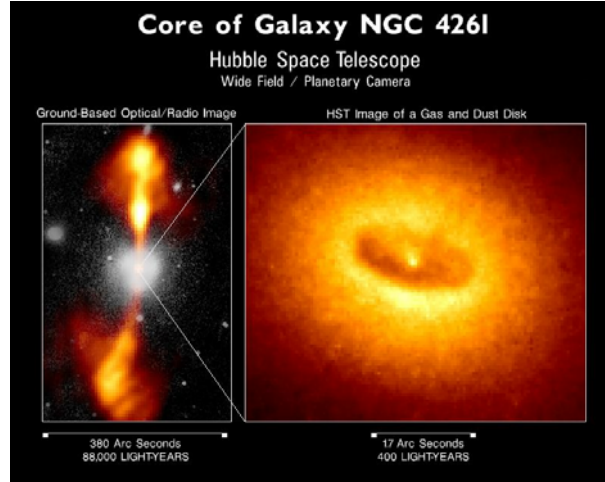


FIG. 3.25 – *A gauche, images composites à partir de télescopes au sol: en blanc, image optique de la radiogalaxie NGC 4261, en orange, émission radio (synchrotron) d'un jet bipolaire issu des régions centrales. A droite, image optique du noyau de la galaxie, montrant un tore de matière (poussières) chauffé par les régions actives les plus centrales, où se trouve très probablement un disque d'accrétion autour d'un trou noir supermassif.*

la secondaire). A la différence d'un NAG, où la matière accrétant sur le trou noir central provient de la concentration de gaz et d'étoiles au coeur de la galaxie, ici la matière provient de la secondaire elle-même (cf chap 4 pour plus de détails).

Le scénario évident de formation d'un trou noir stellaire est par **effondrement** d'une étoile sur elle-même, si celle-ci possédait initialement une masse supérieure à $\sim 45 M_{\odot}$. Cette limite inférieure essaye de tenir compte de l'énorme perte de masse que l'étoile subit au cours des phases antérieures. L'important est que le résidu, après la SNII, ait une masse supérieure à la masse critique $\sim 3 M_{\odot}$. Statistiquement, cela signifie que seulement 1/100 de SNII produisent des trous noirs.

L'autre possibilité de formation d'un trou noir stellaire est par **accrétion de matière**. Environ 50 % des étoiles sont dans des systèmes binaires. Si l'une des deux étoiles est assez massive, elle va évoluer rapidement et donner lieu à une SNII, puis devenir une étoile à neutrons. Si, dans cette gigantesque explosion, le compagnon n'est pas détruit, celui-ci va à son tour évoluer. Il existera alors une phase de la vie de cette binaire, dans laquelle l'étoile à neutrons reçoit de la masse du compagnon plus jeune. Si la quantité de masse recue permet à l'étoile à neutrons de dépasser la masse critique, l'effondrement est inéluctable.

Statistiquement, en prenant en compte ces deux modes de formation, il devrait donc y avoir entre 10^7 et 10^8 trous noirs stellaires dans notre galaxie. En fait, les candidats trous noirs sont beaucoup moins nombreux que cela, on en dénombre à peine une dizaine.

Une physique “amusante”

D'importants travaux de recherche ont mis en évidence des comportements des trous noirs qui s'apparentent à la thermodynamique. Ainsi, il apparait que l'aire d'un trou noir (ie surface couverte par l'horizon) ne peut qu'augmenter sous l'action de processus classiques (ie non-quantiques). A ce titre, l'aire semble jouer le rôle d'une entropie. Cela implique qu'un trou noir ne peut “se casser” en deux ou bien “se refermer” spontanément.

En suivant la même analogie, il fut démontré que la gravité de surface d'un trou noir est la même partout sur l'horizon. Elle joue ainsi le rôle d'une température: *à l'équilibre thermodynamique, toutes les constituants d'un système ont la même température.*

Ces résultats découlent d'une façon de penser (paradigme) où l'horizon n'est plus perçu comme une surface vide mais comme une “membrane” dotée de certaines propriétés (température, entropie, charge électrique etc.). Une telle image des trous noirs est féconde car elle permet de considérer ceux-ci comme des objets pouvant se fusionner entre eux, vibrer ou même d'envisager leur interaction avec un champ magnétique ambiant.

Résoudre de façon auto-cohérente les équations d'Einstein pour décrire l'interaction entre un trou noir et son environnement est encore actuellement hors de portée. De ce fait, l'influence d'un trou noir en astrophysique s'est souvent résumée à la présence d'une masse dans une région très compacte de l'espace et à l'existence d'une surface de non-retour, l'horizon. Le paradigme de la membrane, proposé au début des années 70, essaie d'aller plus loin en développant une membrane qui, par ses propriétés, influence le milieu extérieur en accord avec la relativité générale.

Annexe: l'équation des géodésiques

Une géodésique est la trajectoire d'une particule en chute libre, ie. pour laquelle la somme des forces est nulle. On peut calculer une géodésique de façon purement cinématique en minimisant le chemin entre deux points A et B, c'est à dire

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B \delta(ds) = 0 \quad (3.136)$$

On calcule d'abord

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= 2ds\delta(ds) = \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \\ &= dx^\mu dx^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + 2g_{\mu\sigma} dx^\mu d(\delta x^\sigma) \end{aligned}$$

puisque le tenseur $g_{\mu\nu}$ est symétrique. On obtient alors

$$\delta(ds) = \left(\frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d(\delta x^\sigma)}{ds} \right) ds \quad (3.137)$$

On reporte alors cette expression dans l'intégrale, ce qui donne

$$\left[g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\sigma \right]_A^B + \int_A^B \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \right\} \delta x^\sigma ds = 0$$

Le premier terme est nul puisque les points A et B sont fixes tandis que le deuxième terme peut s'écrire $\int_A^B \delta x^\sigma C_\sigma ds$. Comme les variations selon chaque coordonnée sont arbitraires, annuler l'intégrale n'est possible que si tous les coefficients C_σ sont nuls, c'est à dire

$$\frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) = 0$$

En multipliant cette expression par $-g^{\rho\sigma}$ et en utilisant le fait que les indices sont muets et que

$$g^{\rho\sigma} g_{\mu\sigma} = \delta_\mu^\rho = \begin{cases} 1 & \rho = \mu \\ 0 & \rho \neq \mu \end{cases}$$

(δ_μ^ρ est le symbole de Kronecker) on obtient

$$\begin{aligned} \delta_\mu^\rho \frac{dU^\mu}{ds} + \frac{1}{2} U^\mu U^\nu g^{\rho\sigma} \left\{ 2 \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\} &= 0 \\ \frac{dU^\rho}{ds} + \frac{1}{2} U^\mu U^\nu g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

où l'on peut reconnaître le symbole de Christoffel et se ramène donc à l'équation des géodésiques

$$\frac{dU^\rho}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho U^\mu U^\nu = 0 \quad (3.138)$$

On ne peut appliquer directement l'équation précédente aux photons puisque ceux-ci vérifient $ds = 0$! On peut toutefois définir un vecteur d'onde

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (3.139)$$

où λ est un paramètre variant le long de la trajectoire du rayon lumineux. En optique géométrique, la direction de propagation d'un rayon lumineux est déterminée par le vecteur d'onde, qui reste toujours tangent au rayon: $dk^\mu = 0$ (dans le vide). En vertu du principe d'équivalence, on obtient alors

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu k^\rho k^\nu = 0 \quad (3.140)$$

Exercice: effets de courbure de l'espace-temps

Calculer les écarts entre deux géodésiques partant l'une de x , l'autre de $x + \delta x$.

On écrit les équations normales des géodésiques aux deux points

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2}{ds^2}(x^\mu + \delta x^\mu) + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x + \delta x) \frac{d}{ds}(x^\nu + \delta x^\nu) \frac{d}{ds}(x^\sigma + \delta x^\sigma) &= 0 \end{aligned}$$

En faisant la différence et en ne conservant que les termes au premier ordre en δx , on obtient

$$\frac{d^2 \delta x^\mu}{ds^2} + 2\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{d\delta x^\nu}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \delta x^\lambda = 0$$

En réexprimant cette équation à l'aide des dérivées covariantes, on trouve une équation différentielle de la forme

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{Ds^2} = \mathcal{R}_{\nu\sigma\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\sigma \quad (3.141)$$

où

$$\mathcal{R}_{\nu\sigma\lambda}^\mu = \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\lambda}^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\sigma\eta}^\mu \quad (3.142)$$

est le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. On peut montrer que c'est le seul tenseur constructible à partir de $g_{\mu\nu}$, qui ne dépende que de ses dérivées premières et secondes et qui soit linéaire vis-à-vis des dérivées secondes. Lorsque $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (métrique plate), on a $\mathcal{R}_{\nu\sigma\lambda}^\mu = 0$.

L'équation (3.141) montre que, bien qu'en chute libre (donc ne ressentant aucune force), deux particules proches vont avoir un mouvement relatif l'une par rapport à l'autre dès que $\mathcal{R}_{\nu\sigma\lambda}^\mu \neq 0$. Un tel mouvement relatif sera donc la signature d'un champ gravitationnel dont l'échelle caractéristique de variation devient de l'ordre de la distance entre les deux particules.

Chapitre 4

Les Systèmes Binaires

-
- *Classification observationnelle et physique*
 - *Mécanique des systèmes binaires*
 - *Ordres de grandeur, culture générale*
-

4.1 Formation et classification observationnelle

4.1.1 Formation des systèmes multiples

Jusqu'à présent, nous n'avons abordé que l'évolution des étoiles isolées. C'était en fait l'état de l'astrophysique jusqu'aux années 40. C'est à cette époque qu'ont débuté des études statistiques qui ont débouché sur le résultat surprenant actuel: au moins 50% des étoiles de la Galaxie sont dans des systèmes multiples, binaires ou ternaires voire même quadruples. Notre système solaire est plus proche d'une exception que de la règle.

La formation des systèmes multiples est encore mal comprise. La raison en est simple: non seulement on contrôle mal les conditions initiales de formation stellaire mais de plus, il est nécessaire d'utiliser de gros codes numériques afin de prendre en compte un nombre suffisant d'effets physiques. Comme par exemple la *fragmentation d'un nuage* en effondrement, qui va déterminer le nombre, la masse et la séparation des étoiles qui vont s'y former (codes d'hydrodynamique 3D avec rotation et auto-gravité).

La fragmentation n'est pas la seule possibilité pour former un système multiple. La *capture* d'une étoile par une autre est un mécanisme qui peut être très efficace dans les régions où la densité des étoiles est élevée (comme les amas globulaires). Si deux étoiles, animées chacune d'un mouvement propre, arrivent à proximité l'une de l'autre, alors elles vont interagir par gravitation, ce qui va engendrer des effets de marée. Ces effets de marée provoquent des mouvements internes (ondes) qui s'amortissent en dissipant de l'énergie. Cette perte d'énergie gravitationnelle permet, dans certains cas, une capture et ainsi la formation d'un système lié.

Il s'avère que les systèmes doubles sont de loin les plus nombreux du fait de leur plus grande stabilité. Un système triple ou quadruple est en effet très rapidement dégradé en un système double lors d'une rencontre hasardeuse avec une autre étoile.

Ainsi, on n'imagine pas d'autre scénario pour les systèmes multiples que celui de la fragmentation initiale. Les systèmes binaires, eux, peuvent utiliser les deux modes de formation. On va donc s'intéresser plus particulièrement aux binaires.

Les observations montrent la tendance suivante: les binaires dont la période est supérieure à 100 ans semblent être constituées d'étoiles de masses comparables. Celles des binaires de période plus petite que 100 ans ont des masses qui semblent indépendantes. Ceci a amené à faire la conjecture que les premières étaient formées lors de la "fission" du nuage parent (fragmentation) tandis que les deuxièmes étaient formées par capture gravitationnelle. Ce scénario reste évidemment très hypothétique, en l'absence (1) d'une réelle compréhension des mécanismes physiques contrôlant la fragmentation et (2) d'observations directes des conditions initiales de formation stellaire.

4.1.2 Classification observationnelle

Il existe plusieurs moyens de se rendre compte que l'on n'observe pas une étoile isolée mais plusieurs. De cette différence de moyens naquit la classification suivante:

- **Binaires visuelles:** les deux étoiles sont toutes deux détectées et, de la mesure de leur séparation angulaire (ou bien directement par leur mouvement apparent), on en déduit qu'elles sont gravitationnellement liées.
- **Binaires astrométriques:** on ne voit que la plus brillante des deux, mais elle possède un mouvement apparent périodique. À partir des lois de Kepler, on en déduit une estimation de la masse du compagnon invisible. Par ex, Sirius A et B étaient initialement des binaires astrométriques et, grâce aux progrès techniques, sont devenues des binaires visuelles.
- **Binaires spectroscopiques:** les deux étoiles sont si rapprochées qu'aucun mouvement apparent n'est détectable par photométrie (les étoiles ne sont pas résolues). Par contre, le spectre de cette "étoile" dévoile des signatures périodiques qui s'interprètent comme la superposition des spectres de deux étoiles ayant des mouvements périodiques. Par ex, Mizar A et Mizar B de la Grande Ourse (qui forment une binaire visuelle), sont chacune une binaire spectroscopique: le système Mizar est ainsi quadruple.
- **Binaires à éclipses (ou occultations):** dans le cas particulier où la ligne de visée est dans le plan de l'orbite de la binaire, on voit passer chaque étoile l'une devant l'autre, à chaque demi-période. Ainsi, chaque éclipse, partielle ou totale, donne lieu à une variation du flux reçu. Par ex, Algol est un tel système avec une période de 2.9 jours.

4.2 Mécanique des systèmes binaires

4.2.1 Lois de Kepler

Les binaires éloignées (celles pour lesquelles $P > 10$ jours) sont régies par une mécanique simple. Chaque étoile est en orbite keplerienne (ellipses) autour du centre de masse, avec la même période P et la même excentricité $0 \leq e < 1$. On peut toujours définir une vitesse angulaire moyenne telle que

$$\Omega \equiv \frac{2\pi}{P} = \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

où $M = M_1 + M_2$ est la masse totale, dépend du demi-grand axe a (3ème loi de Kepler). Le demi-grand axe de l'ellipse est lui-même relié à l'énergie mécanique de la binaire par

$$E = -\frac{GM\mu}{2a} \quad (4.2)$$

où $\mu = M_1 M_2 / M$ est la masse réduite du système. L'excentricité est une mesure de l'aplatissement de l'ellipse, $e^2 = 1 - (b/a)^2$, b étant le demi-petit axe. Les étoiles se rapprochent au plus de $d_{min} = a(1 - e)(1 + q)$ et s'éloignent au maximum de $d_{max} = a(1 + e)(1 + q)$ où

$$q = \frac{M_2}{M_1} \quad (4.3)$$

est le rapport de masse de la binaire. En général, les excentricités des binaires proches sont assez faibles, q rarement plus grand que 1 et a donne alors le bon ordre de grandeur de la séparation moyenne des deux étoiles.

Le moment cinétique orbital (dans le référentiel du centre de masse) est

$$L_{orb} \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \mu (GMp)^{1/2} \quad (4.4)$$

avec $p = a(1 - e^2)$. Si la masse totale M reste à peu près constante et si le moment cinétique orbital varie peu, alors on peut écrire que la séparation des deux étoiles varie comme

$$a \propto \frac{M}{M_1^2 (M - M_1)^2} \quad (4.5)$$

ce qui indique qu'elle va varier s'il existe un transfert de masse d'une étoile à l'autre.

Pour se fixer les idées, voici quelques ordres de grandeur du demi-grand axe d'une binaire, pour des périodes de 1 année, 1 jour ou 1 heure,

$$\frac{a}{R_\odot} = \begin{cases} 215 \, m_1^{1/3} (1+q)^{1/3} P_{\text{année}}^{2/3} \\ 4.1 \, m_1^{1/3} (1+q)^{1/3} P_{\text{jour}}^{2/3} \\ 0.5 \, m_1^{1/3} (1+q)^{1/3} P_{\text{heure}}^{2/3} \end{cases} \quad (4.6)$$

où $m_1 = M_1/M_\odot$ (noter que pour la Terre, $q \ll 1$ et $1 \text{ AU} \simeq 215 R_\odot$). Si les deux étoiles sont suffisamment éloignées l'une de l'autre (séparation beaucoup plus grande que leur rayon), elles n'interagissent pas ou peu entre elles, ce qui permet de supposer que chacune va évoluer comme si elle était seule. Ceci peut devenir faux si l'une d'entre elles devient une supergéante ou produit une supernova...

4.2.2 Circularisation et synchronisation

Les binaires proches (celles pour lesquelles $P < 10$ jours) ont des orbites circulaires. De plus, l'analyse du spectre de chacune des étoiles montre que, la plupart du temps, la période T de rotation sur elles-mêmes ("spin") est identique à la période P de la binaire: les étoiles se présentent toujours la même face. Ainsi, les binaires proches sont régies par une mécanique plus complexe et caractérisée par

- (1) une **circularisation** des orbites des étoiles $e = 0$,
- (2) une **synchronisation** des rotations des étoiles $T = P$.

Cet état correspond à l'état d'énergie minimale: il n'y a plus aucun mouvement dans le référentiel du centre de masse. Pour atteindre un tel état, il doit y avoir un (ou plusieurs) mécanisme(s) de dissipation de moment cinétique et d'énergie.

L'explication est simple (dans le principe, pas dans le calcul!) et s'appuie en général sur les effets de marée. Tant que les orbites sont excentriques et les étoiles asynchrones, les effets de marée vont induire des déformations à l'intérieur des étoiles. Ces déformations entraînent une dissipation de l'énergie cinétique du système et donc une perte de moment cinétique (transporté par les photons). Avec le temps (qui reste difficile à calculer précisément), un système binaire tend donc inévitablement à se circulariser et à être synchrone.

Plus une binaire est proche et plus les effets de marée sont importants. De même, ce sont les binaires dont les étoiles ont des rayons non-négligeables devant leur séparation qui subissent les plus fortes déformations. Ces objets seront donc toujours dans cet état d'énergie minimale, les autres (binaires plus éloignées et/ou étoiles plus petites) seront encore en cours d'ajustement au moment de leur observation. Par ailleurs, si l'une des deux étoiles est un objet compact, donc plus difficilement déformable, c'est l'étoile normale qui subit les ajustements.

Une fois l'état d'énergie minimale atteint, le système n'évolue plus par effets de marée. Dans cet état, la variation du moment cinétique total du système s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{rot}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{orb}}{dt} \quad (4.7)$$

où le moment cinétique orbital vaut $L_{orb} \simeq \mu \Omega_{orb} a^2$ et le moment cinétique associé à la rotation de chaque composante est $L_{rot} \simeq \Omega_{orb} (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2)$ (où $\Omega_1 \simeq \Omega_2 \simeq \Omega_{orb}$). C'est l'évolution stellaire de chaque composante qui va ensuite être le moteur: augmentation du rayon de l'une des étoiles, évolution de la rotation sur elle-même sous l'effet d'un vent stellaire, perte de masse violente par vent ou supernova etc...

4.2.3 Le lobe de Roche

Le concept du lobe de Roche fut introduit au XIX^{ème} siècle par Edouard Roche pour expliquer la destruction des petits satellites lorsqu'ils se rapprochent d'une planète. Lorsqu'un tel corps s'approche d'une planète, chaque particule de ce corps subit une force radiale qui est la somme de

- la force centrifuge, qui a tendance à l'éloigner de la planète;
- l'attraction gravitationnelle du corps lui-même et
- l'attraction gravitationnelle de la planète.

Si cette force radiale est attractive, cela signifie que le corps ne peut maintenir sa forme (qui résulte d'un équilibre entre son propre poids et sa pression interne) et, sous l'action des forces de marée, il va être aplati jusqu'à destruction.

Il va sans dire que ce concept va jouer un rôle crucial dans la description des systèmes binaires. Par exemple, si l'une des étoiles possède un rayon qui devient supérieur à son lobe de Roche, cela signifie qu'elle perd de la masse au profit de son compagnon. Dans ce cas, l'accrétion de matière sur le compagnon va également s'accompagner d'une libération d'énergie (figure 4.2).

Dans le référentiel du centre de masse en rotation avec la binaire, le potentiel dont dérive la force totale ($\vec{f} = -\vec{\nabla}\Phi$) s'écrit

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - q\frac{GM_1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \quad (4.8)$$

où $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont la distance de chaque étoile au centre de masse, $\vec{r}$ est la distance du point considéré au centre de masse. A trois dimensions, les équipotentiels qui résultent des trois forces ci-dessus forment des surfaces

- lobes à peu près sphériques très loin de la binaire ou très près de chaque étoile;
- en forme de cacahuète englobant les deux étoiles, à proximité de la binaire.

La forme des équipotentiels est contrôlée par q (si $q \ll 1$, les équipotentiels qui entourent l'une des étoiles sont des ellipsoïdes), tandis que leur taille globale est contrôlée par a .

Le *lobe de Roche* est l'équipotentielle critique, à la forme d'un "8", qui relie les deux étoiles. Le point en X est le point de Lagrange L_1 où la force totale s'annule mais où, de part et d'autre, elle est dirigée vers chaque étoile. C'est donc un lieu de passage privilégié pour échapper à l'attraction de l'une ou l'autre des étoiles.

Dans la forme ci-dessus, on peut remarquer que le lobe de Roche néglige toutes les autres forces: cela ne peut donc rester valide en présence de vents stellaires puissants, de champs magnétiques intenses etc... De plus, les masses de chaque étoile sont considérées ponctuelles, approximation valable que pour les binaires distantes pour lesquelles, justement, ce concept est inutile puisque les étoiles n'interagissent pas. Ainsi, le calcul du lobe de Roche à partir de l'équation (4.8) ne fournit qu'un ordre de grandeur, ou au pire, une idée approximative de la zone d'interaction entre deux étoiles rapprochées.

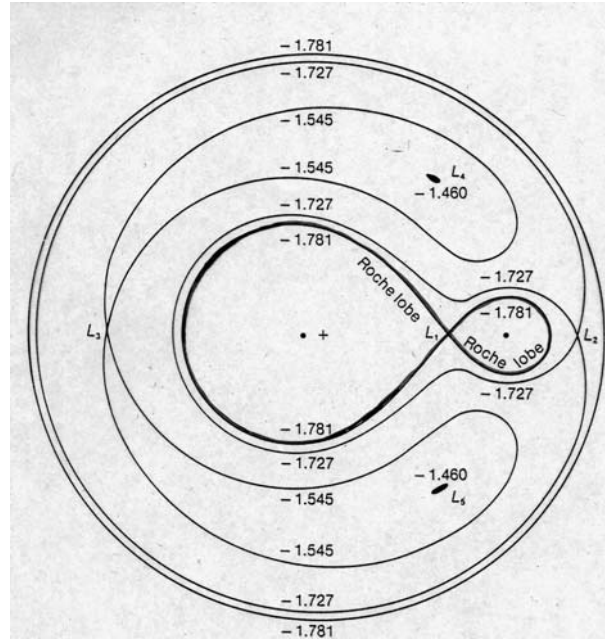


FIG. 4.1 – Equipotentiellles et lobe de Roche pour un système binaire décrit par l'équation 4.8. Les points de Lagrange sont notés L_n et les chiffres indiquent les valeurs relatives des contours (les minima sont en L_4 et L_5).

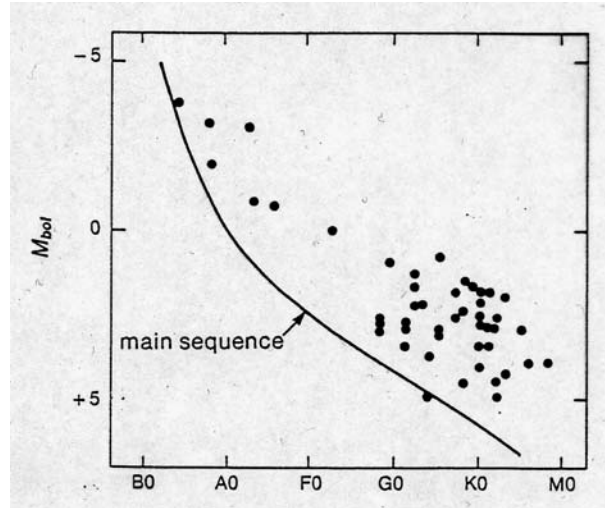


FIG. 4.2 – Diagramme HR sur lequel n'ont été représentées que les composantes sous-géantes de binaires à éclipses. La ligne continue est la Séquence Principale. Les sous-géantes sont plus brillantes qu'une étoile normale du fait de l'accrétion de matière provenant de la secondaire.

4.2.4 Transfert de masse entre les deux étoiles

Nous avons vu que si les étoiles d'un système binaire sont suffisamment rapprochées, elles peuvent interagir et modifier certaines de leurs caractéristiques, comme par exemple leur vitesse de rotation sur elles-mêmes. Cela signifie qu'il y a eu une perte de moment cinétique de chaque étoile. Maintenant, il existe deux processus par lesquels l'une des étoiles peut perdre de la masse au profit de l'autre. On appelle *étoile primaire* celle qui reçoit de la masse, *étoile secondaire* celle qui en perd. Recevoir ou perdre de la masse n'est évidemment pas sans conséquences sur l'évolution stellaire de chaque composante...

Vent stellaire: accréation de Bondi-Hoyle

Si la secondaire est une étoile massive, alors elle va donner lieu à vent stellaire puissant. Les mécanismes physiques précis qui engendrent ces vents sont encore à l'étude, mais la pression de radiation y joue un rôle prépondérant puisque ceux-ci sont d'autant plus puissants que l'étoile est lumineuse.

L'étoile massive émet donc un vent stellaire dans toutes les directions (la géométrie exacte peut dépendre de la rotation stellaire ainsi que du champ magnétique), ce qui implique que l'orbite de la primaire croise de la matière éjectée. Il va donc se former une onde de choc autour de la primaire, à la manière de la magnétopause terrestre, lieu de rencontre entre le champ magnétique terrestre et le vent solaire.

La matière qui rencontre la primaire est alors piégée gravitationnellement et tombe sur celle-ci, en suivant un processus dit d'accréation de Bondi-Hoyle, du nom des deux astrophysiciens qui ont les premiers étudié cette géométrie. La matière tombe directement vers l'objet central puis, si elle possède initialement du moment cinétique, se met en rotation de plus en plus rapide au fur et à mesure qu'elle se rapproche. On s'attend donc à la formation d'un disque de matière (voir ci-dessous), mais très petit. Leur étude analytique fut évidemment simplifiée et aujourd'hui, on utilise des codes numériques afin de rendre compte de la fraction exacte de la matière qui est ainsi piégée puis accrétée.

Disque d'accréation: modèle "standard"

Si la secondaire est peu massive, son vent sera beaucoup plus faible et donc n'entraînera pas une perte de masse significative. Par contre, si le rapport $q = M_1/M_2$ est très différent de l'unité, le lobe de Roche sera très près de la surface de l'étoile la moins massive. Il suffit donc que cette distance s'amenuise pour que, lorsque la surface dépasse le lobe de Roche, la matière de l'atmosphère stellaire soit libérée gravitationnellement. Ceci se produit tout d'abord au point de Lagrange L_1 , ce qui signifie que la matière s'écoule de la secondaire par un flot dirigé vers la primaire.

Deux processus différents peuvent contribuer au rapprochement de la surface de la secondaire et du lobe de Roche:

- **Augmentation du rayon de la secondaire:** la consommation du combustible nucléaire au sein d'une étoile impose une phase de géante puis de supergéante à

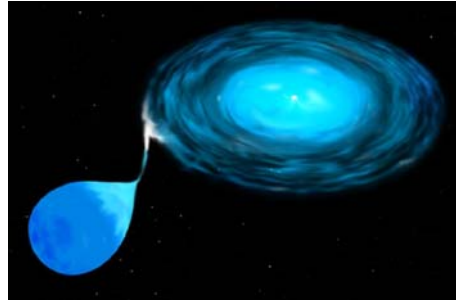


FIG. 4.3 – “Vue d’artiste” d’un système binaire proche en interaction. La primaire est un objet compact autour duquel s’est formé un disque d’accrétion. Ce disque est alimenté par la matière stellaire du compagnon, échappant à son attraction au niveau du point de Lagrange L_1 . Ceci ne se produit que lorsque le compagnon a atteint un stade où son enveloppe extérieure dépasse le lobe de Roche.

toute étoile, sans que la masse ne change de façon significative. Cela implique, inévitablement, qu’il existe une phase dans la vie de la binaire où une étoile géante fournit de la masse à son compagnon. Le moteur de cette perte de masse est donc l’évolution interne de la secondaire.

- **Rétrécissement du lobe de Roche:** la position et la forme du lobe de Roche sont contrôlés par a et q . En particulier, si le demi-grand axe a de la binaire diminue, alors le lobe de Roche se rétrécit et peut devenir plus petit que le rayon de l’étoile la moins massive, provoquant ainsi l’accrétion de matière. Dans ce cas, le moteur de l’accrétion est ce qui impose la diminution de la séparation de la binaire, autrement dit ce qui permet une perte de moment cinétique du système binaire. Deux processus sont envisagés: (1) les vents stellaires qui exercent sur chaque étoile un couple de freinage et qui, par l’intermédiaire des forces de marée, emportent du moment cinétique de la binaire; (2) des ondes gravitationnelles peuvent également emporter du moment cinétique de façon efficace, à condition que la binaire soit suffisamment rapprochée.

Nous avons vu que des binaires suffisamment proches étaient synchronisées. Cela signifie que dans le référentiel du centre de masse, la matière issue de la secondaire ne possède pas de moment cinétique: le flot tombe radialement sur la primaire. Par contre, si la binaire est suffisamment éloignée, la matière de la secondaire possède du moment cinétique et ne peut donc tomber radialement sur la primaire. Il se forme alors un disque de matière en orbite quasi-keplerienne autour de la primaire. Un point chaud (“hot spot”) se forme au lieu de rencontre entre la matière qui s’écoule de la secondaire et le disque en orbite autour de la primaire.

Hormis le point chaud, la présence du disque peut se détecter observationnellement, car celui-ci n’est pas passif (comme peuvent l’être les anneaux de matière autour des planètes) mais actif: de multiples collisions entre particules chauffent localement le disque qui rayonne et dévoile ainsi sa présence. Cette énergie rayonnée provient de l’énergie mécanique des particules qui, en ayant perdu une partie lors

des collisions, tombent vers la primaire (cf chap 3.3). La trajectoire moyenne des particules est donc une spirale finissant sur la primaire. Ce type d'écoulement, un disque d'accrétion, est très commun en astrophysique: on le rencontre autour des étoiles en formation, dans des systèmes binaires et dans le coeur des galaxies actives.

Le modèle “standard” des disques d'accrétion fut proposé quasi-simultanément par Lynden-Bell & Pringle (1972) et Shakura & Sunyaev (1973). Le taux d'accrétion $\dot{M}_a$ dans le disque est fixé par les processus locaux qui imposent les collisions, à savoir une turbulence développée à l'oeuvre dans le disque. Ce qui engendre la turbulence dans les disques d'accrétion est encore aujourd'hui une inconnue. Les recherches récentes (depuis 1991) semblent cependant indiquer que cette turbulence pourrait être d'origine magnétique: il faudrait donc utiliser une description MHD (magnétohydrodynamique) de ces disques et non HD (hydrodynamique), comme il a été fait depuis une trentaine d'années. En régime stationnaire, le taux d'accrétion $\dot{M}_a$ devrait être le même que celui imposé par la physique agissant au point de Lagrange. En fait, il n'y a aucune raison pour que cela soit le cas et il est probable qu'il y ait des phases d'ajustement lorsque ceux-ci sont très différents (comme par ex, une accumulation de matière au bord externe du disque, au niveau du point chaud).

En reprenant les calculs effectués au chapitre 3.3, la température effective émise à la surface du disque s'écrit

$$T_{eff} = 4.6 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \left(\frac{\dot{M}_a}{10^{-8} M_\odot \text{yr}^{-1}} \right)^{1/4} \left(\frac{r}{r_g} \right)^{-3/4} \text{ K} \quad (4.9)$$

et varie en $r^{-3/4}$ avec la distance à la primaire: plus l'on se rapproche de la surface de la primaire (de rayon R) et plus la température d'émission est élevée. Ainsi, la température effective maximale sera d'autant plus grande que la primaire est compacte, c'est à dire $r_{min} \sim R \rightarrow r_g = 2GM/c^2$. Les régions centrales d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir ou d'une étoile à neutrons émettront des rayons X ($T_{eff} \sim 10^7$ K) tandis qu'autour d'une naine blanche se seront des UV ($T_{eff} \sim 10^4$ K).

4.3 La zoologie des systèmes binaires

La plupart des étoiles forment donc un système binaire. Or, puisque la durée de vie τ d'une étoile isolée est essentiellement le temps qu'elle passe sur la Séquence Principale, on peut dire que $\tau \propto M^{-2.3}$ (voir chap 2.1). Cela signifie qu'il faut s'attendre, a priori, à observer tout un ensemble de combinaisons possibles: couples d'étoiles sur la Séquence Principale, couples naine et supergéante, supergéante et naine blanche, voire même couples d'étoiles à neutrons...

4.3.1 Les variables cataclysmiques ou CV

Ce sont des systèmes binaires proches dont la période est de quelques heures ($P < 10$ heures, figure 4.4) et $M_1 + M_2 \sim M_\odot$: une naine blanche et une étoile de

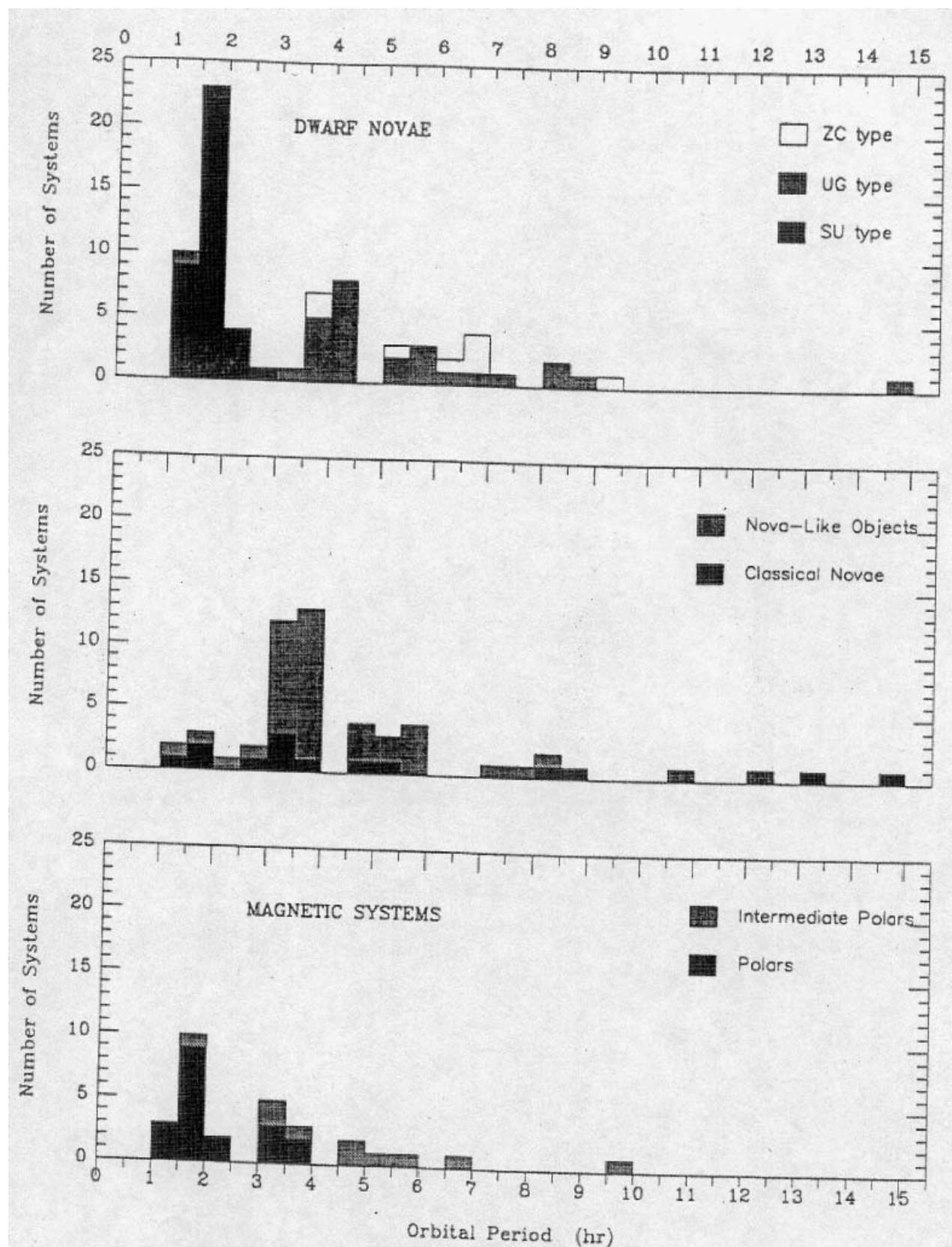


FIG. 4.4 – Distribution des périodes orbitales des variables cataclysmiques (CV).

faible masse, peu évoluée (ie, pas loin de la Séquence Principale, car il n'y a pas de place pour une étoile plus massive et/ou évoluée). Elles sont classées en deux catégories, selon l'importance du champ magnétique de la naine blanche.

Les CV non-magnétiques

La naine blanche ne possède pas de champ magnétique significatif. Étant alors rapprochées, les deux étoiles sont en interaction et échangent de la masse: la primaire (la naine blanche) accrète de la masse de la secondaire. Celle-ci remplit son lobe de Roche et fournit de la matière avec un taux d'accrétion typique de l'ordre de $\dot{M}_a \sim 10^{-11} - 10^{-8} M_\odot/yr$. Cette matière possède du moment cinétique et vient former un disque d'accrétion autour de la naine blanche. Ce sont ces objets qui permettent actuellement l'étude observationnelle la plus précise des disques d'accrétion (figure 4.5).

Les CV magnétiques

Le champ magnétique de la naine blanche est si intense qu'il modifie fortement l'écoulement d'accrétion. Ces objets sont subdivisés en deux catégories.

Les **Polars**, ou CV du type **AM Herculis**, sont les CV dont le champ magnétique de la naine est le plus intense, de l'ordre de $2 \cdot 10^3$ à $3 \cdot 10^3$ Tesla. Ce champ est suffisamment intense pour empêcher la formation d'un disque et d'un point chaud. En effet, la matière qui s'échappe de la secondaire par le point de Lagrange est ionisée et subit donc l'influence du champ magnétique de la naine blanche. Celui-ci redirige l'écoulement directement vers les pôles magnétiques. La matière tombe en chute libre et y produit un choc qui libère son énergie gravitationnelle,

$$L \simeq \frac{GM_1 \dot{M}_a}{R_1} \quad (4.10)$$

où M_1 et R_1 sont respectivement la masse et le rayon de la naine blanche. Ce rayonnement s'avère être optiquement épais et on peut alors écrire

$$L \simeq 4\pi(\Delta R)^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (4.11)$$

où ΔR est la taille caractéristique de la calotte polaire où se produit le choc. Cette taille étant petite mais libérant une forte puissance, le rayonnement produit est un rayonnement X, modulé avec la période T de la naine si le rotateur est oblique (champ magnétique non-aligné avec l'axe de rotation). Dans ces objets $T = P < 3$ heures, la synchronisation entre le "spin" et la période de la binaire étant probablement assuré par un couplage magnétique!

Les **Intermediate Polars** (IP), ou CV du type **DQ Herculis**, sont les CV dont le champ magnétique de la naine est plus faible, variant de 10 à 10^3 Tesla. Systèmes typiques: SW UMa, AO Psc, AE Aqr. Dans ce cas, un disque peut se former (avec un point chaud) mais il est tronqué à proximité immédiate de la naine blanche, lorsque

$$\frac{B^2}{\mu_0} \simeq \rho \Omega^2 r^2 \quad (4.12)$$

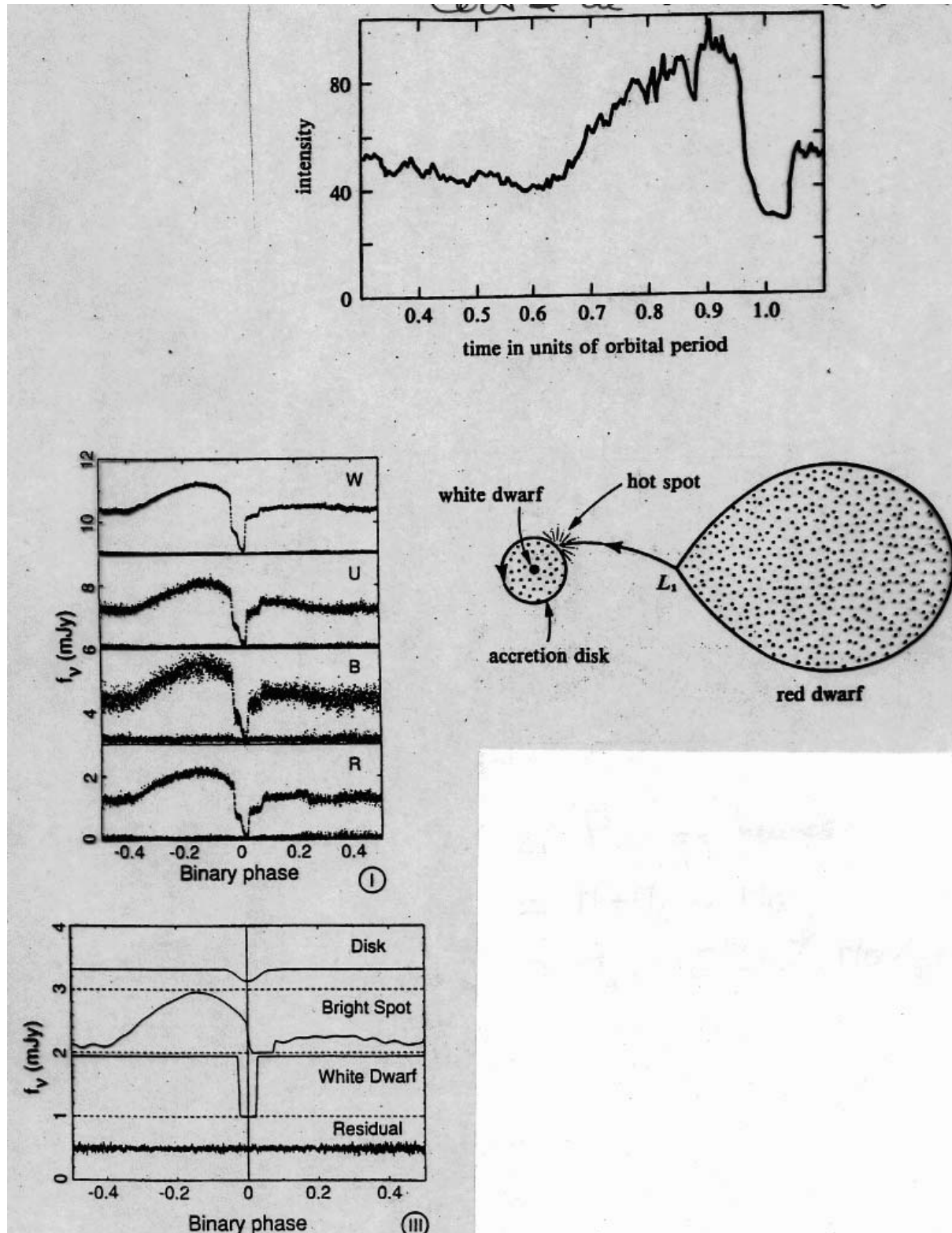


FIG. 4.5 – Schéma montrant les courbes de lumière observées dans diverses bandes photométriques (W,U,B,R et V en haut) de la CV non-magnétique U Gem. Ces courbes peuvent être reproduites grâce à plusieurs composantes: naine blanche centrale, présence d'un disque d'accrétion et point chaud ("hot spot"). Le résidu est ensuite utilisé pour faire de l'imagerie du disque (tomographie).

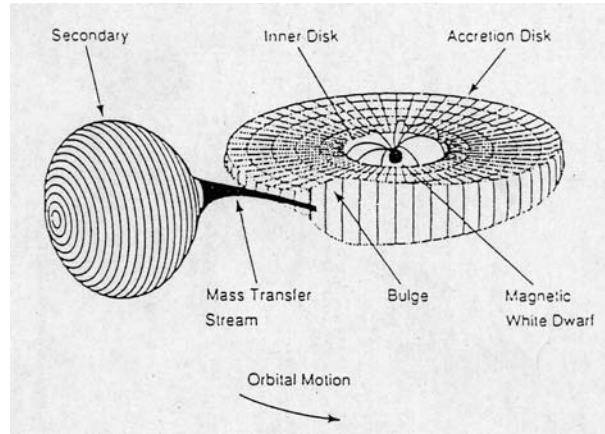


FIG. 4.6 – Représentation schématique d'une CV magnétique du type DQ Herculis (Mason, Rosen et Hellier 1988).

où B est le champ magnétique de la naine, ρ la densité de la matière dans le disque d'accrétion et $\Omega^2 \simeq GM_1/r^3$ est sa vitesse de rotation (keplerienne) autour de la naine blanche. L'équation ci-dessus définit le rayon en-deça duquel la matière ne peut plus rester en équilibre keplerien, le champ magnétique devenant trop fort. Ce rayon délimite une sorte de magnétopause où la matière, ne pouvant traverser les lignes de champ, tombe sur la naine blanche en suivant les lignes de champ magnétique. Cette fois-ci la zone d'impact ΔR serait plus grande, produisant ainsi l'émission UV observée, modulée par T si le rotateur est oblique. Les observations indiquent $T \ll P$, avec T de l'ordre d'une dizaine de minutes tandis que $P > 3$ heures.

Une telle vitesse de rotation sur elle-même montre que la naine blanche est accélérée par l'apport de matière du disque.

Comment former une binaire serrée?

Les variables cataclysmiques sont des binaires serrées, $P < 10$ h, $a \sim 1 - 2 R_\odot$. Or, les scénarii de fragmentation ainsi que les observations des autres systèmes binaires semblent montrer que les étoiles doubles normales se formeraient avec des séparations typiques de l'ordre de l'AU, donc des périodes de l'ordre de l'année. Comment peut-on obtenir les périodes typiques des CV?

En fait, on s'attend à former une CV grâce à l'évolution stellaire de chaque étoile normale. Ainsi, la plus massive des deux étoiles va rapidement évoluer vers une phase de géante rouge puis supergéante rouge. Or, dans ces phases, son rayon devient plus grand que la séparation de la binaire: le compagnon est littéralement englouti dans l'atmosphère convective de l'étoile plus massive. Du fait des frottements avec l'atmosphère, le système va perdre du moment cinétique et la trajectoire de l'étoile moins massive va donc s'infléchir vers le coeur en effondrement de la géante.

Ainsi, après la phase de nébuleuse planétaire (fortement perturbée par la présence d'une autre étoile à l'intérieur de son atmosphère) où la primaire évacue son enveloppe, se dévoilent alors une naine blanche en orbite serrée avec une étoile qui,

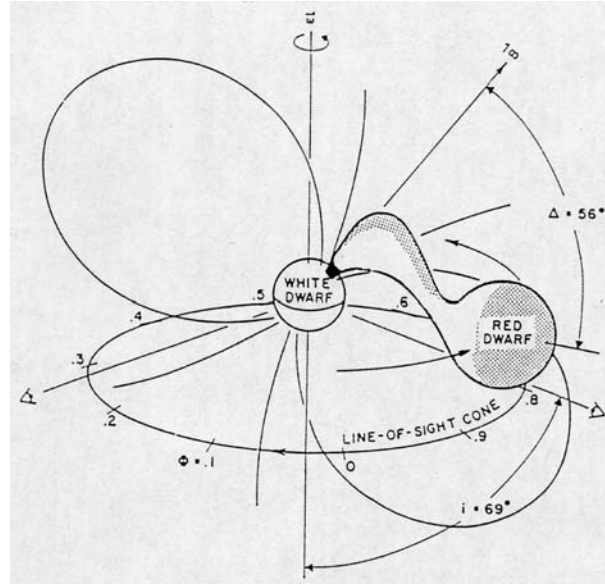


FIG. 4.7 – Représentation schématique d'une CV magnétique du type AM Herculis. La naine blanche et le point chaud sont représentés environ dix fois plus gros que la réalité (Schmidt, Stockman et Grandi 1982).

entretemps, est devenue une géante rouge à son tour.

Phénomènes éruptifs: les novae

Toutes les variables cataclysmiques, comme leur nom l'indique, sont sujettes à des phénomènes éruptifs plus ou moins récurrents et plus ou moins violents (figure 4.9). Elles regroupent en fait les trois types de *novae*, nom dont l'éthymologie est “nouvelle étoile” (à chaque événement, une nouvelle étoile semble apparaître momentanément dans le ciel):

Nova naine: elle correspond à une augmentation soudaine (montée pendant 1 jour) de la luminosité ($m_V \sim 8 - 13$ alors qu'en période calme $m_V \sim 12 - 20$), puis une décroissance plus lente, de l'ordre de plusieurs jours. Leur fréquence est de l'ordre de la semaine. Les novae naines sont subdivisées en 3 classes: U Gem, Z Cam et SU UMa. Deux modèles sont susceptibles d'expliquer ces novae naines et ne sont pas encore départagés:

(a) **Instabilité de disque:** une instabilité (thermique ou autre) se déclencherait dans le disque et qui permettrait un taux d'accrétion $\dot{M}_a$ plus élevé, donc une plus grande luminosité. Ce modèle est à la mode, mais les calculs théoriques restent encore très phénoménologiques.

(b) **Instabilité d'apport de masse:** cette fois-ci, ce serait une instabilité dans le processus d'apport de masse, autour du point de Lagrange L_1 , qui serait responsable d'une augmentation soudaine de $\dot{M}_a$.

Nova: une nova se déclenche en quelques heures, produit une augmentation vio-

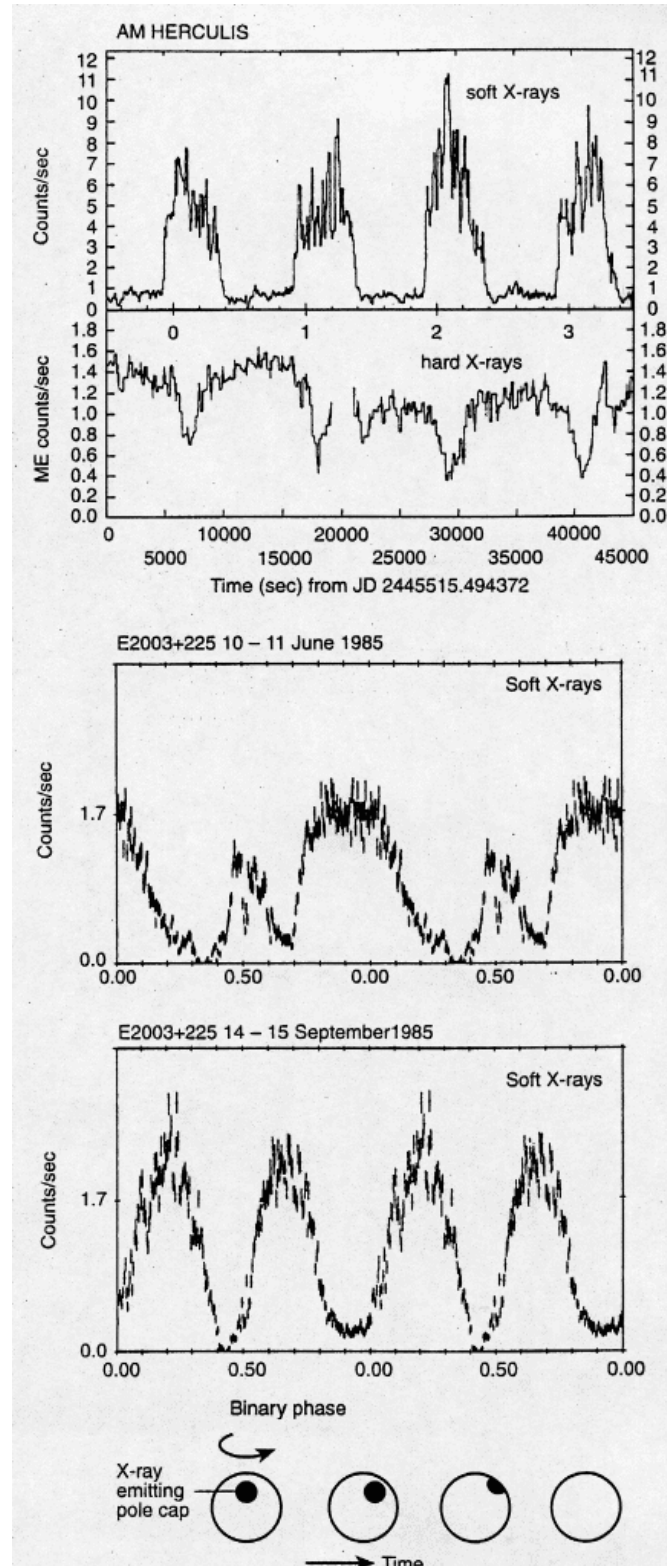


FIG. 4.8 – Courbes de lumière (rayons X) de deux systèmes du type AM Her. La périodicité observée est due à la rotation de la naine sur elle-même.

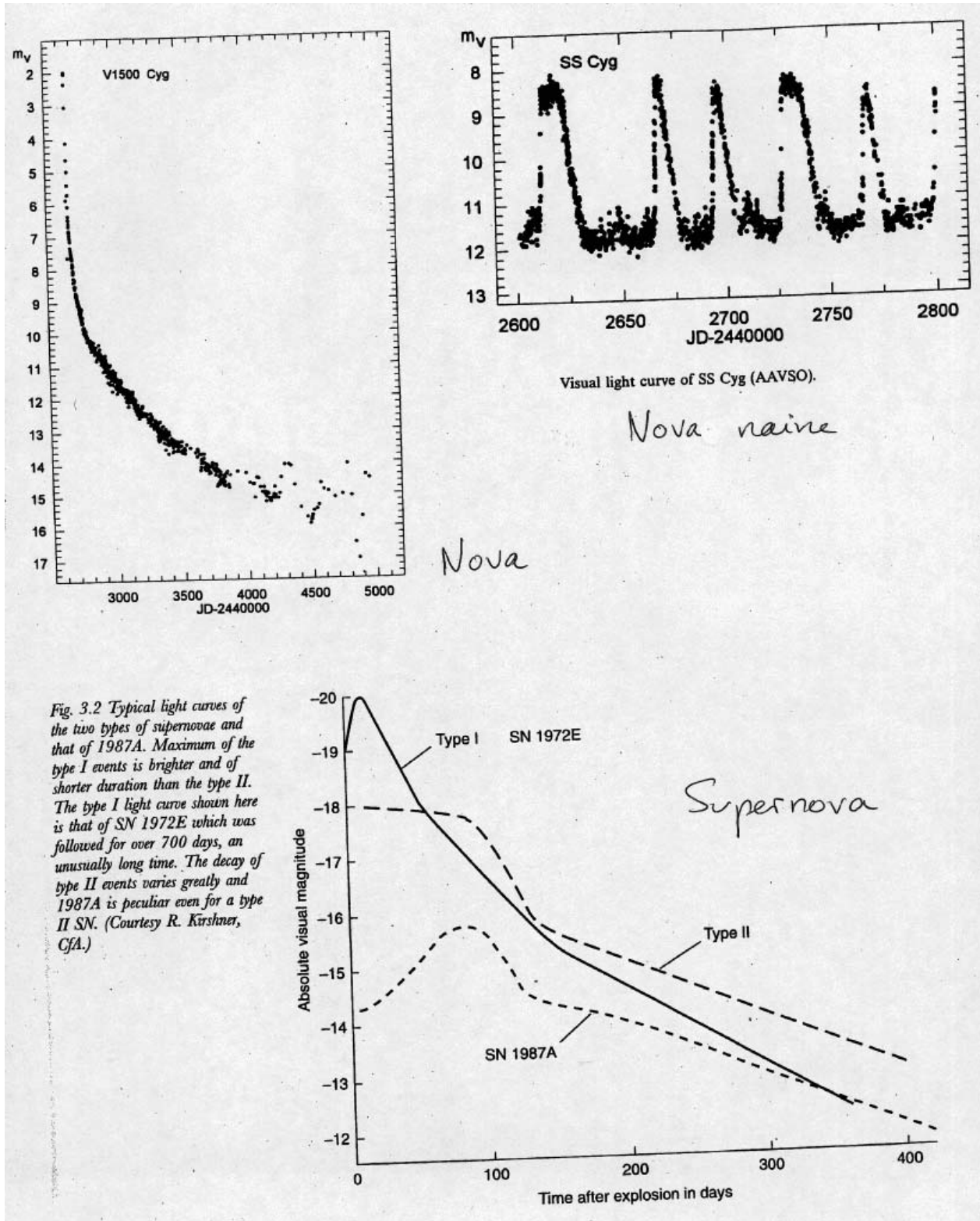


FIG. 4.9 – Courbes de lumière des trois types de novae associées aux variables cataclysmiques: nova naine, nova et supernova de type I.

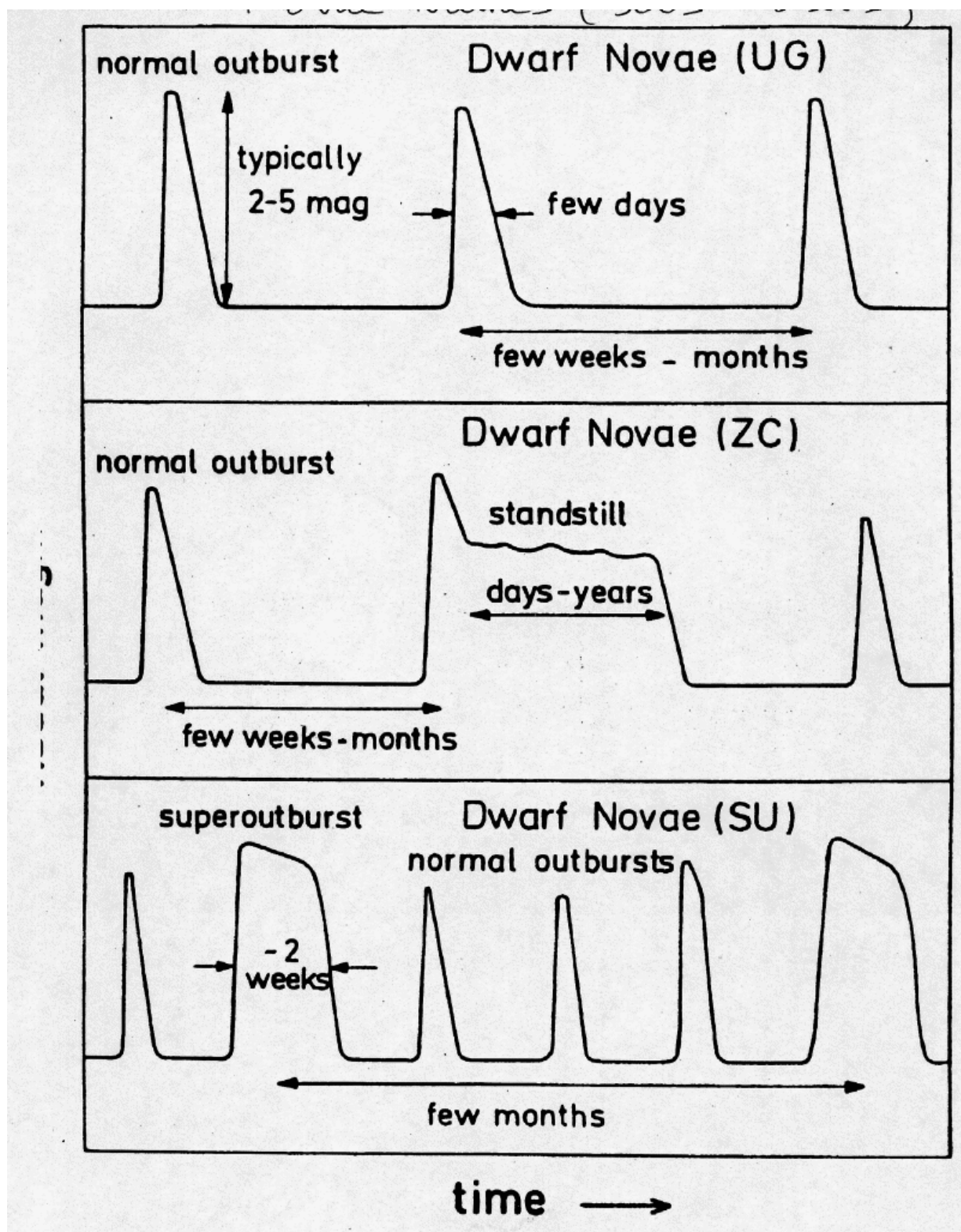


FIG. 4.10 – Les trois sous-classes d'événements éruptifs associés aux novae naines: (a) CV du type U Gem, (b) Z Cam et (c) SU UMa.

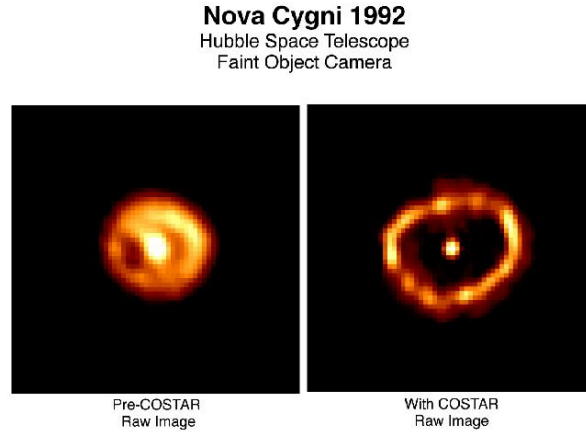


FIG. 4.11 – Images de Nova Cygni prises après l’explosion qui eut lieu le 19/02/1992 (à gauche: + 467 jours, à droite: +467j et 7mois, avec la correction COSTAR apportée au télescope spatial). Ces images montrent que la nova a éjecté de la matière essentiellement dans le plan de la binaire, mais que le gaz s’échappe plus facilement en dehors de ce plan (anneau devenant plus oblong)

lente de la luminosité ($m_V \sim 0 - 3$) puis décroît très lentement au cours du temps (quelques années). Leur fréquence est supposée être de l’ordre de 10^4 années. Du fait de l’accrétion de matière sur la naine blanche (essentiellement de l’Hydrogène, provenant de la secondaire), une couche d’Hydrogène s’accumule petit à petit à sa surface. Le choc d’accrétion réchauffe l’hydrogène à des températures élevées jusqu’à ce que le brûlage de l’Hydrogène en Hélium se produise. Il y ensuite deux explications possibles à l’emballement de cette réaction. La première suppose que, du fait de la forte gravité de la naine blanche, cette réaction s’effectue dans des conditions dégénérées, donc instables. Un deuxième modèle suppose que l’apport constant de matière du compagnon, riche en Carbone et Oxygène (cycle CNO) entraîne un emballement sans possibilités de refroidissement.

En tout état de cause, une nova serait donc l’explosion d’une bombe “H” à la surface de la naine blanche. Cette explosion est capable d’expulser de la matière avec un taux d’éjection $\dot{M}_j \sim 10^{-6} - 10^{-4} M_\odot/yr$ à des vitesses de plusieurs milliers de km/s. Cas types: DQ Her (intermediate polar), Nova Cygni 75 (= V1500 Cyg, polar dont l’explosion a provoqué une différence de 1.8% entre T et P).

Supernova de type I: ce type de supernova est beaucoup plus puissant que le type II (voir figure) mais trois fois moins fréquent. Il n’y a pas d’hydrogène dans le spectre observé (à la différence des SNII). Il correspond à l’explosion de la naine blanche, qui est de ce fait complètement détruite (pas de résidu). Cette explosion est déclenchée par l’accrétion de matière sur la naine (Hoyle & Fowler 1960): la masse du coeur dégénéré augmente progressivement jusqu’à

atteindre et dépasser la masse de Chandrasekhar. L'effondrement se déclenche mais d'une façon catastrophique.

Depuis très récemment (1998), les SNI, du fait de leur courbe de lumière caractéristique, sont utilisées comme des "chandelles cosmiques" permettant de déterminer des distances cosmologiques et fournissant des contraintes très fortes sur les modèles cosmologiques. Reste à savoir si leur utilisation est correcte.

4.3.2 Les binaires X

Les binaires X, comme leur nom l'indique, sont observées en rayons X avec des satellites ou fusées. Elles furent reconnues comme binaires car (1) leur spectre était très différent de celui d'une étoile normale et (2) elles possédaient une modulation périodique. Une période P de l'ordre de quelques heures et une émission X incompatible avec un spectre stellaire sont des indices de la présence d'accrétion de matière sur un objet compact massif (voir Eq.(4.9)).

Les binaires X sont donc des systèmes binaires où la primaire est soit une étoile à neutrons soit un trou noir, tandis que la secondaire est une étoile évoluée (figure 4.12). Dans quelques cas seulement, il est possible de déterminer si l'objet compact est un trou noir ou une étoile à neutrons.

Les binaires X massives ou HMXBs

La secondaire est ici une étoile massive, de type spectral O ou B, produisant un vent stellaire puissant, $\dot{M}_j \sim 10^{-6}$ à $10^{-4} M_\odot/\text{yr}$ (à comparer aux $3 \cdot 10^{-14} M_\odot/\text{yr}$ pour le Soleil).

Les prototypes sont les sources Cen X-3, Cyg X-1. L'accrétion de matière du vent sur l'objet compact (étoile à neutrons ou trou noir) s'effectue lors du passage de celui-ci à travers le vent: pour alimenter la puissance observée en X, les modèles d'accrétion de Bondi-Hoyle montrent qu'il suffit que l'objet compact intercepte environ 0.1% de la masse éjectée. Or, les luminosités L_X observées en X varient selon les objets entre 10^{29} et 10^{31} W. Pour reproduire une telle puissance par accrétion directe sur une naine blanche, il faudrait

$$L \simeq \frac{GM\dot{M}_a}{R} \simeq 8.5 \cdot 10^{30} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{\dot{M}_a}{10^{-5} M_\odot/\text{yr}} \right) \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-1} \text{ W} \quad (4.13)$$

c'est à dire un taux d'accrétion bien trop fort, correspondant à une perte de masse par vent stellaire jamais observée. En revanche, l'accrétion sur un objet plus compact permet de rendre compte de la luminosité X avec des taux d'accrétion plus raisonnables, $\dot{M}_a \sim 10^{-9}$ à $10^{-7} M_\odot/\text{yr}$.

Pour certains de ces objets, il y a un moyen indirect de discriminer entre trou noir et étoile à neutrons. En effet, à proximité d'une étoile à neutrons l'accrétion est fortement modifiée par la présence de son champ magnétique intense. La matière est ainsi redirigée vers les pôles magnétiques et tombe en chute libre sur la surface dure. Le choc qui en résulte produit un rayonnement X qui est focalisé par le champ magnétique et modulé avec la période T , si le rotateur est oblique. C'est avec ces

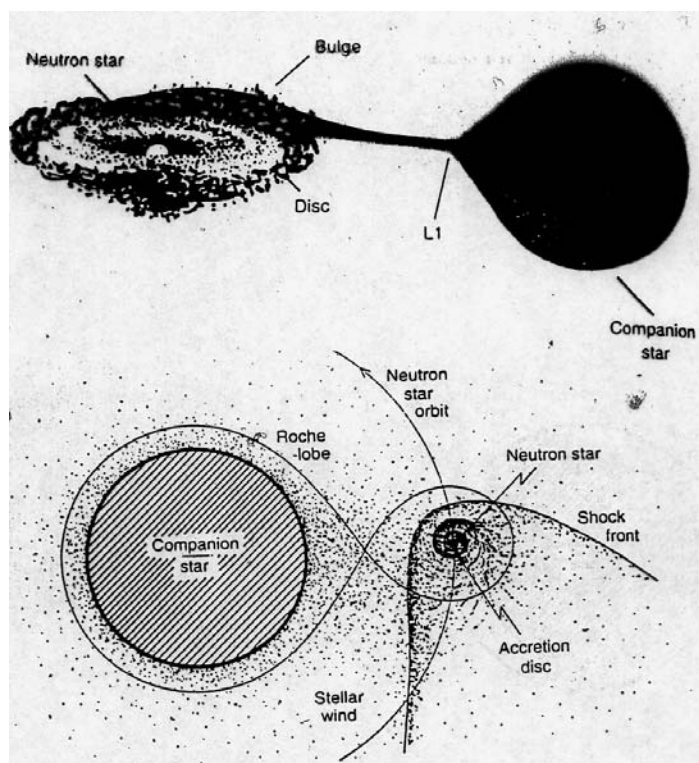


FIG. 4.12 – Représentation schématique des deux types de binaires X. EN haut, les binaires de faible masse (LMXB) pour lesquelles l'accrétion de matière sur l'objet compact s'effectue à travers un disque. En bas, les binaires massives (HMXB) pour lesquelles l'accrétion s'effectue lors du passage de l'objet compact dans le vent stellaire de la secondaire.

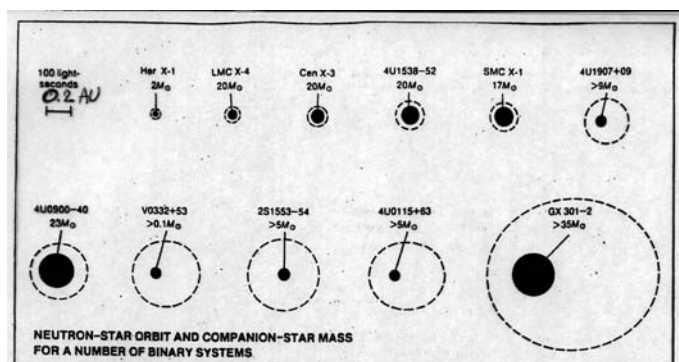


FIG. 4.13 – Orbites (à l'échelle) de quelques binaires X massives. Les plus excentriques sont aussi celles ayant les plus grandes séparations (donc périodes). Le trait indique une distance de 100 secondes-lumière (environ 12.5 UA).

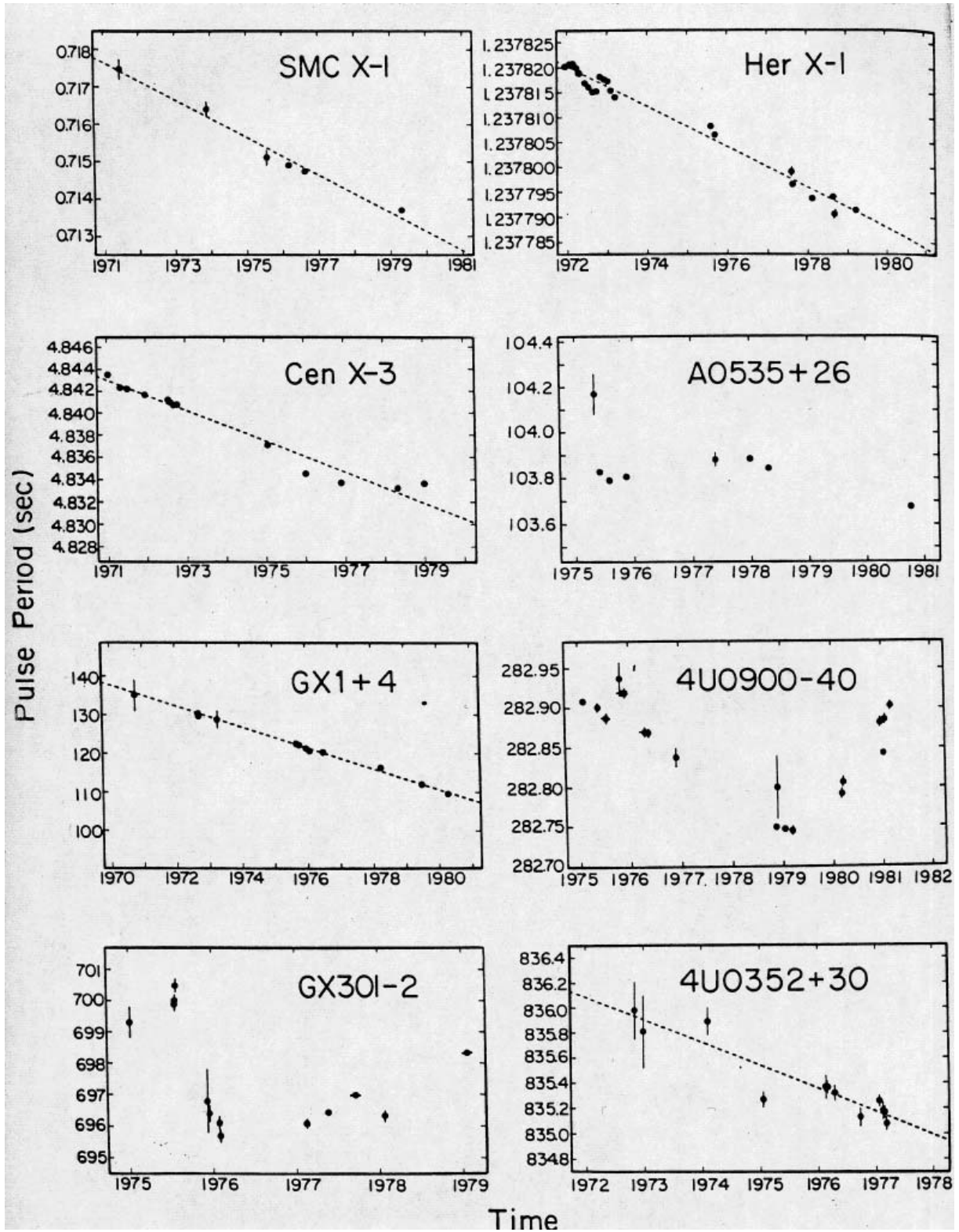


FIG. 4.14 – Evolution de la période de quelques binaires X massives sur une échelle de plusieurs années. Cette période correspond également à la période de rotation de l'étoile à neutrons sur elle-même. La plupart indiquent une tendance à la décroissance de cette période, impliquant que ces étoiles sont accélérées.

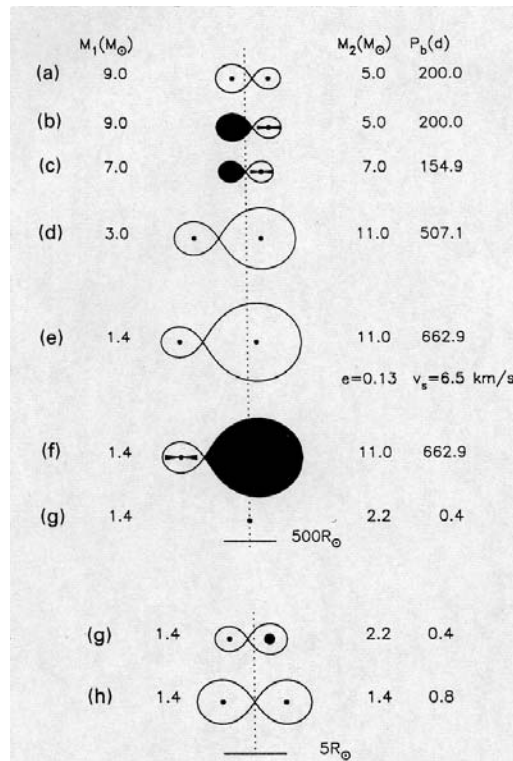


FIG. 4.15 – *Scenario “conservatif” (masse et moment cinétique sont conservés) d’évolution d’une binaire à forte séparation vers une HMXB.*

pulsars X qu'on explique le rayonnement X périodique de certaines HMXBs, où $T \sim 0.1 - 800$ secondes (cf fig.). L'analyse de la période T de ces pulsars X montre que, contrairement à leurs homologues solitaires, les pulsars radio, les pulsars X accélèrent (cf fig.)! Cette accélération s'explique par le dépôt de moment cinétique apporté par la matière accrétée. Autrement dit, dès que le vent stellaire du compagnon faiblit ou disparaît, le pulsar va à nouveau décélérer sous l'effet de son propre rayonnement. Cas typiques: Cen X-3, SMC X-1.

Les binaires X de faible masse ou LMXBs

Les LMXBs sont des systèmes binaires où la secondaire est une étoile peu brillante de type F, G ou K qui remplit son lobe de Roche. Ce sont donc des systèmes plus vieux que les HMXBs où la secondaire est une étoile O ou B. La première source détectée fut Sco X-1 dans les années 70, depuis il y en a beaucoup d'autres (Cyg X-3, Cyg X-2, Her X-1, Sco X-1...).

Le disque d'accrétion autour de l'objet compact central est responsable de l'émission X thermique (pour une naine blanche on aurait un rayonnement dans l'UV), modulée par la période P de la binaire. Pour ces objets, P est de l'ordre de quelques heures à quelques jours.

En 1975, furent observés des sursauts X dans quelques sources, appelées *X-ray bursters*¹: sur une durée d'environ une dizaine de secondes, il y a une montée rapide en X puis une décroissance plus lente de la luminosité, avec libération d'une énergie totale $L_X \sim 10^{32}$ J. Leur fréquence est de l'ordre de 3 heures (cf fig.). La forme du spectre suggérait une émission thermique, de la forme (4.11), ce qui fournit $\Delta R \sim 10 - 15$ km, taille typique d'une étoile à neutrons. L'explication de ces sursauts est alors simple. L'apport de masse due à l'accrétion provoque un brûlage de l'Hydrogène puis, presque immédiatement celui de l'Hélium (ici les températures sont plus élevées qu'autour d'une naine blanche). Dans les conditions de gravité, la matière est dégénérée et il se produit un flash de l'Hélium. Ainsi, les X-ray bursters, qui nécessitent une surface dure sur laquelle va s'accumuler de l'Hydrogène, ne peuvent être des trous noirs.

Certes, mais les pulsars X, en général, ne forment pas de sursauts X. Pourquoi?

Nous avons vu que les pulsars X ne s'observaient que dans les HMXBs, autrement dit dans des systèmes très lumineux où le taux d'accrétion $\dot{M}_a$ dû au vent stellaire est fort. Une réponse possible à cette question serait qu'il existe un taux critique $\dot{M}_{crit}$, au-delà duquel l'instabilité thermique (flash de l'Hélium en conditions dégénérées) ne pourrait pas se développer.

Inversement, pourquoi les X-ray bursters ne sont-ils pas pulsés?

Les pulsars X sont associés à des étoiles de type O ou B, donc jeunes. Cela implique que l'étoile à neutrons est également jeune. Par contre, les bursters sont tous associés à des étoiles de type F ou G, donc plus vieilles. Or, c'est la présence

1. En fait, les satellites militaires, qui recherchaient dans les années 60 des signes d'explosions nucléaires dans l'atmosphère terrestre, les avaient déjà observés mais cette information était restée classée secrète.

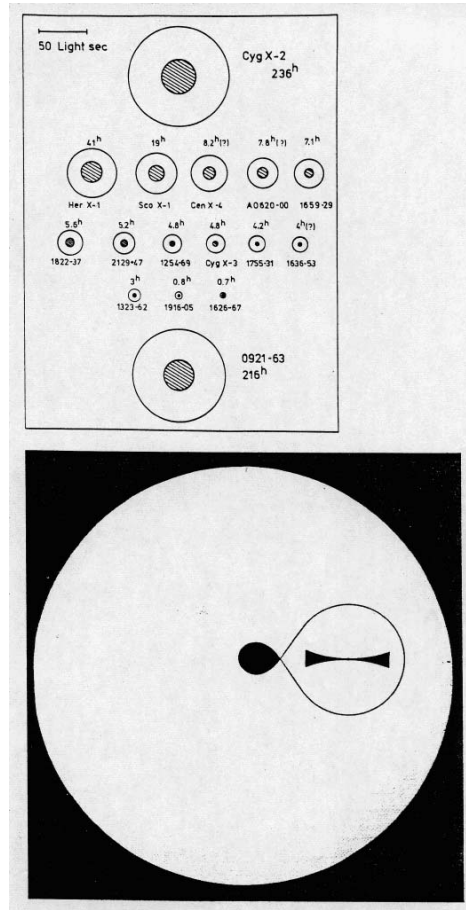


FIG. 4.16 – En haut: tailles relatives des orbites et des compagnons pour quelques binaires X de faible masse (LMXB). La ligne indique une taille de 50 secondes lumière (distance Terre-Soleil: 8 secondes lumière). En bas: lobe de Roche, disque d'accrétion et compagnon pour la LMXB 4U1626-67, mis à l'échelle du disque solaire.

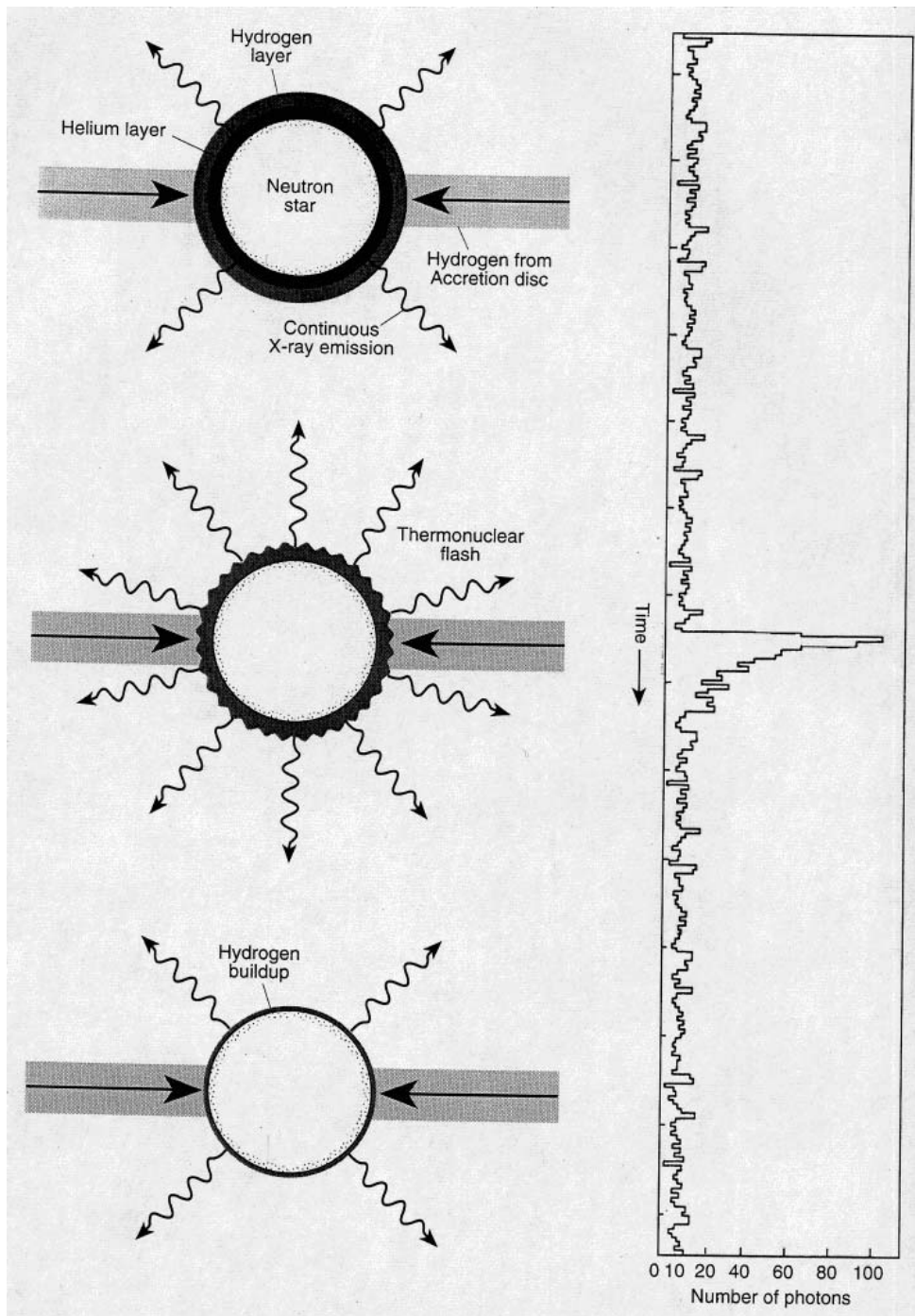


FIG. 4.17 – Schéma du modèle de flash thermonucléaire pour les sursauts X. L'étoile à neutrons accrète de l'Hydrogène du disque d'accrétion, formant une couche limite équatoriale. L'Hydrogène y est alors converti en Hélium de façon stable jusqu'à ce que la réaction se produise dans des conditions dégénérées, donnant lieu à un flash. Puis le processus repart pour un cycle.

MERLIN Images of GRS1915+105

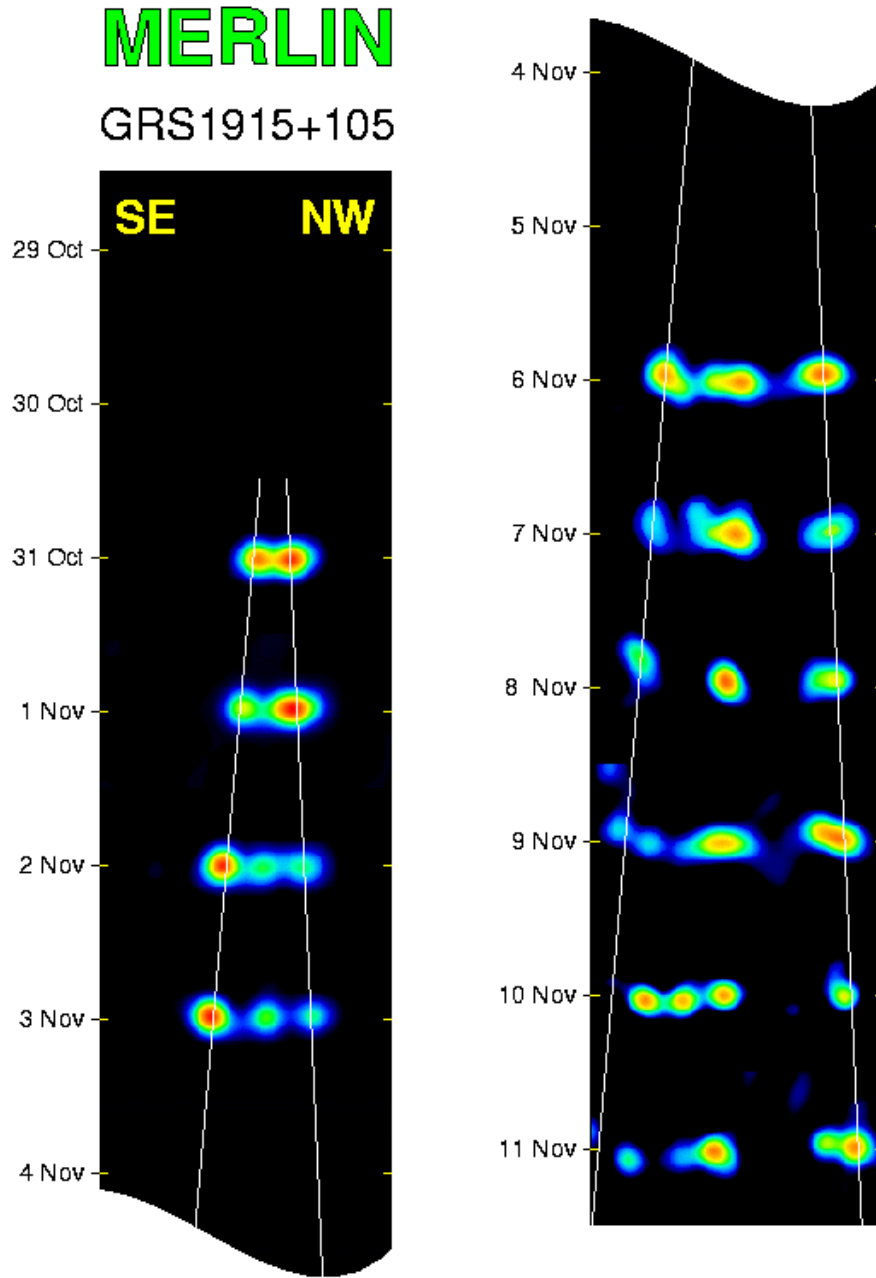


FIG. 4.18 – Images radio (émission synchrotron) de la source galactique GRS1915+105. Les images prises à différents intervalles de temps montrent des vitesses d'éjection de $0.92c$. Ces jets sont bipolaires, très collimatés et proviennent des régions centrales du disque d'accrétion. De par leur analogie morphologique avec les radiogalaxies, de tels objets ont été appelés “microquasars”. A l'heure actuelle, il n'existe pas de modèle expliquant l'origine de tels jets.

d'un fort champ magnétique qui, en déviant l'écoulement, provoque le rayonnement X observé. Les bursters ne seraient donc pas pulsés si leur champ magnétique est beaucoup plus faible que celui des pulsars X. Cette explication est plausible puisque le champ magnétique a une tendance naturelle à diffuser hors de l'étoile à neutrons: plus celle-ci est vieille et plus faible serait donc son champ.

4.3.3 Autres systèmes binaires

Dans les systèmes binaires suivants, les étoiles sont plus ou moins en interaction. Qu'il y ait un transfert de masse de l'une à l'autre des étoiles est certain, mais elle ne se fait probablement pas selon un disque comme pour les CVs ou les LMXBs. Seuls les systèmes binaires dont la primaire est un objet compact possèdent des signatures observationnelles claires de la présence d'un disque d'accrétion. Par ailleurs, il semble de plus en plus clair que la perte de masse hors du système soit plus importante que le transfert de masse d'une étoile à l'autre.

Comme il est d'usage en astrophysique, beaucoup de ces systèmes portent le nom de leur prototype, à savoir le premier objet de cette classe à avoir été identifié.

Les systèmes du type ζ Aurigae

Ce sont des binaires à éclipses composées d'une supergéante froide (type G ou K, $R \sim 200 - 300 R_{\odot}$) et d'une naine chaude sur la Séquence Principale (type B) ou d'une naine blanche. Les deux étoiles ne remplissent pas leur lobe de Roche, ainsi le transfert de masse ne résulte que de la présence des vents stellaires (faibles car étoiles peu lumineuses).

Ce sont donc des systèmes idéaux car toutes les interactions (transferts de masse, énergie et moment cinétique) sont faibles et peuvent être traitées comme des perturbations. En particulier, les passages de la supergéante froide devant la naine chaude permettent d'étudier assez finement l'atmosphère de la supergéante (notamment les manifestations magnétiques) et donc, une éventuelle influence de la binarité en comparant avec les atmosphères de supergéantes isolées. Cas typiques: ζ Aur, V471 Tau (voir fig. 4.19).

Les "étoiles" symbiotiques

Ces "étoiles" ne sont considérées comme étant des binaires en interaction que depuis les années 80. On distingue deux types d'étoiles symbiotiques:

Type S: La secondaire est une géante froide ($M \sim 2 - 3 M_{\odot}$) et la primaire est une étoile chaude de faible luminosité sur la Séquence Principale ($M \sim 0.6 - 1 M_{\odot}$). Leur période orbitale est $P \sim 1 - 2$ ans, correspondant à un demi-grand axe $a \sim 3\text{AU}$. Le vent stellaire provenant de la géante froide est ionisé par la primaire. Cette dernière possédant également un vent, les deux vents doivent entrer en collision. Un fort rayonnement infrarouge est observé provenant de l'atmosphère de la géante. Cas typiques: EG And, T CrB, RS Oph, AX Per, Z And, CI Cyg.

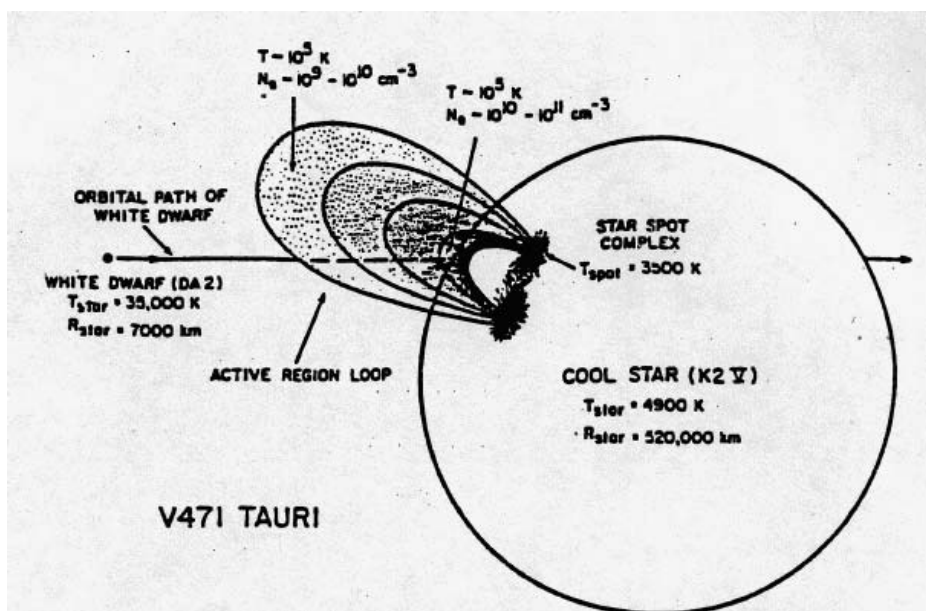


Fig. 28. A schematic diagram of V471 Tauri, showing the surface and atmospheric features of the K2 V star, inferred from optical photometry and from ultraviolet spectroscopy. The physical properties of the stars and the atmospheric "loop" feature are given (Guinan *et al.* 1986).

systeme du type ζ Aurigae

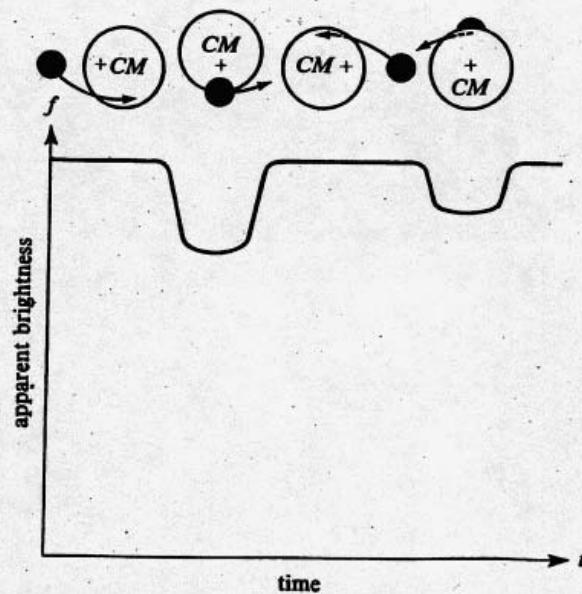


Figure 10.5. Schematic light curve of an eclipsing binary. Deeper eclipses result when the cooler star eclipses the hotter star than when the hotter star eclipses the cooler. The pattern of eclipses repeat once every binary period.

FIG. 4.19 – Système du type ζ -Aurigae.

Type D: La secondaire est une géante froide (quelques fois du type Mira, ie étoile variable particulière) avec $M \sim M_{\odot}$ et la primaire est une naine blanche ($M \sim 0.8 M_{\odot}$). Dans ces systèmes, on ne voit pas de mouvement orbital: $P > 10^3$ ans, correspondant à une grande séparation $a > 100$ AU. Un fort rayonnement infrarouge est également observé, provenant d'une enveloppe de gaz et de poussières. Ces deux étoiles ne remplissent pas leur lobe de Roche, ce qui fait que le transfert de masse s'effectue par l'intermédiaire du vent de la géante. Cas typiques: RR Tel, V1016 Cyg.

Les systèmes du type Algol

Ce sont des systèmes proches, composés d'une primaire chaude sur la Séquence Principale (B5 à F2), et d'une étoile secondaire plus froide et moins massive, sous-géante G ou K remplissant son lobe de Roche (voir fig. 4.20). On observe un transfert de masse de l'une vers l'autre de $\dot{M} \sim 10^{-10} M_{\odot}/yr$ pour les systèmes les moins actifs (U Cep, TT Hya, SW Cyg, U Sge, δ Lib, S Cnc...) à $\dot{M} \sim 10^{-5} M_{\odot}/yr$ pour les systèmes les plus actifs (β Lyr, Sx Cas, V367 Cyg...). Pour les systèmes avec $P < 4 - 5$ jours, le flot tombe directement sur la primaire, tandis que pour ceux avec $P > 6 - 7$ jours, il y a probablement formation d'une enveloppe en rotation car la primaire est obscurcie (mais sans signature typique d'un disque d'accrétion).

L'apport de matière de la secondaire accélère la primaire: on mesure des vitesses de rotation 5 à 10 fois plus rapides que la vitesse associée à la période de la binaire (entre 4 et 7 jours).

Dans beaucoup de ces systèmes, l'étoile la plus évoluée (la sous-géante) est moins massive que l'étoile sur la Séquence Principale! Cela implique que dans une phase antérieure la sous-géante, initialement plus massive, a transféré de la masse vers son compagnon de façon significative.

Les systèmes du type RS CVn

RS CVn fut cataloguée en 1972 comme une étoile variable (catalogue russe RS) dans la constellation de Canes Venatici. En fait, c'est un système binaire dont la primaire est une géante rouge de type K0 et le compagnon une étoile naine de type F ou G sur la Séquence Principale. Cas typiques: RS CVn, UX Ari (fig. 4.21), RS OVN, Capella, AR Lac.

Ce sont des systèmes qui émettent beaucoup de puissance en X. Dans les systèmes à éclipses, on observe des variations de l'intensité qui ne sont jamais complètement éteintes, ce qui ne peut s'expliquer que si cette émission provient d'une zone plus étendue que l'étoile: sa couronne. De plus, il existe une modulation de l'intensité en ondes radio et X qui n'est pas due à l'occultation, car la période P de la binaire (de l'ordre de plusieurs jours) est plus courte que celle de la modulation observée (de l'ordre de 10 ans pour RS CVn).

On interprète cette modulation comme résultant d'un cycle magnétique: l'irruption de nouvelles boucles magnétiques à la surface stellaire provoque l'apparition de taches froides ce qui introduit une diminution de la luminosité dans le visible et

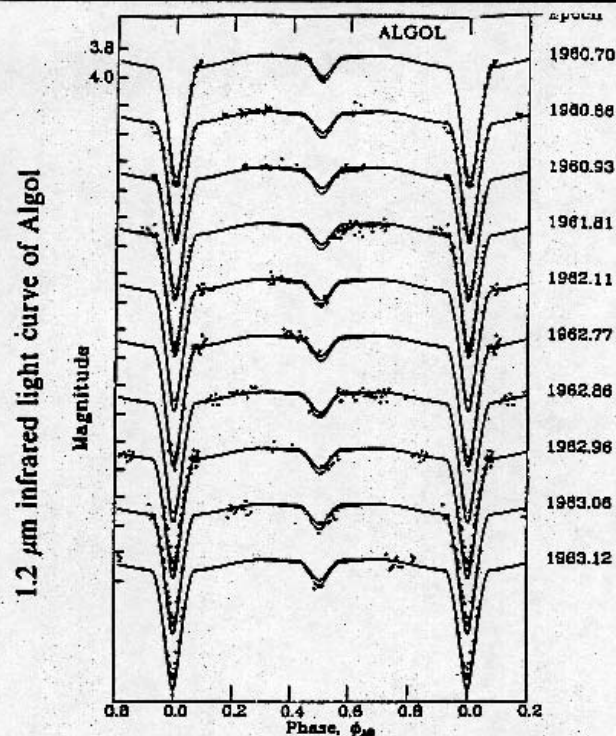


Fig. 15. The $1.2 \mu\text{m}$ light curves of Algol obtained during the early 1960s by Chen and Reuning as given by Richards (1990). The distortions and changes in the infrared light curves are produced by variable amounts of starspots on the K IV component of the system. The observations are compared with theoretical curves computed by Richards from a set of fixed parameters. The solid curve represents the case where the average temperature of the cool star is $T_K = 4500\text{K}$, and the dotted curve is for $T_K = 5000\text{K}$.

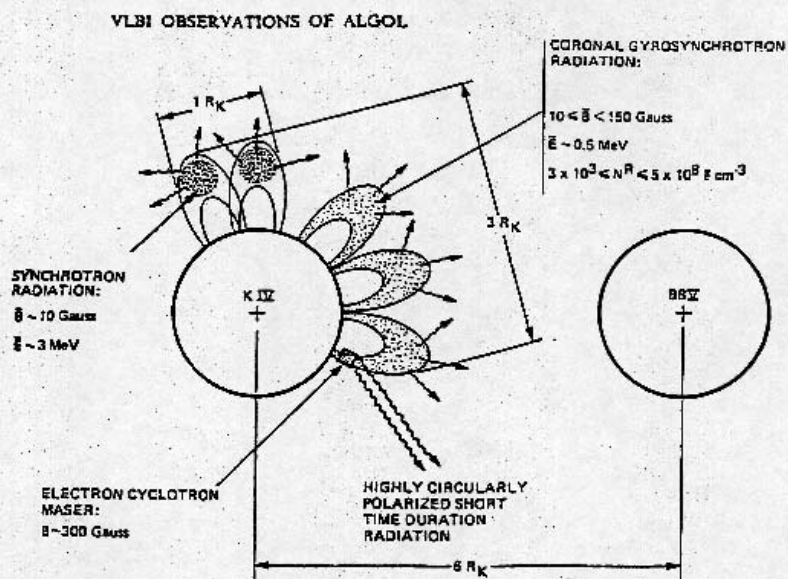


FIG. 4.20 – *Système du type Algol.*

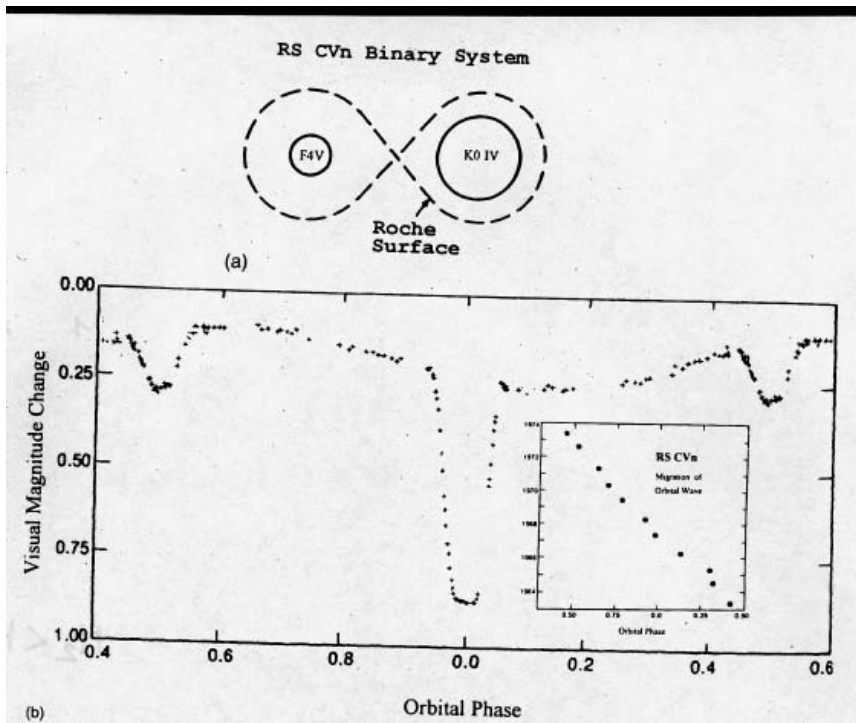


Fig. 4.4 (a) Details of the RS CVn binary system. Although a detached binary (i.e. there is no mass transfer taking place between them), they are close enough to be locked rotationally. This means that each star rotates once per binary cycle. (b) Optical light curve of RS CVn. Both primary and secondary eclipse are easily visible, but note the gentle undulation or wave in the light curve. At this time (1975) the wave peaks at around orbital phase 0.6, but over a long period of time (years) the wave drifts or migrates, taking about 10 years to return to the same binary phase. This is comparable to the Sun's own activity cycle. (Based on original diagrams by Fred Walter, SUNY)

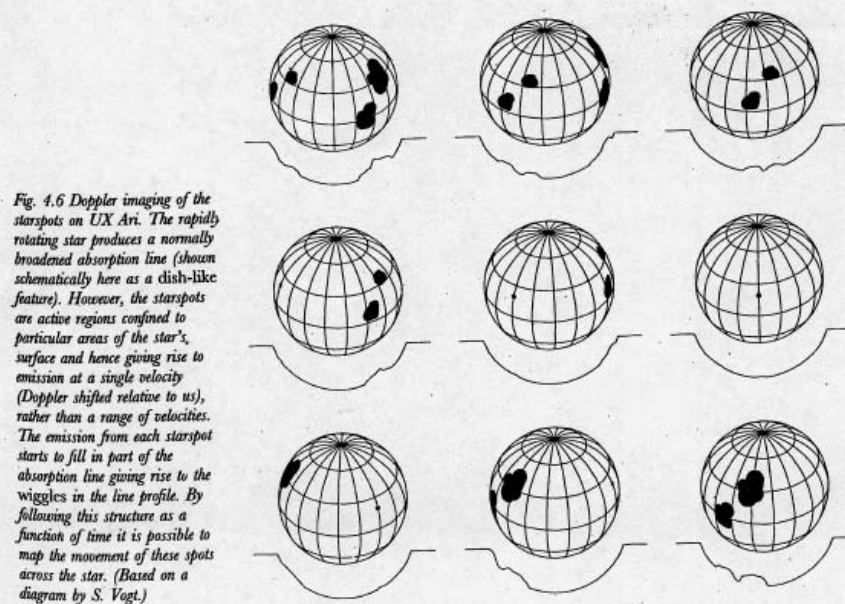


FIG. 4.21 – Système du type RS CVn.

une augmentation de l'émission X². Cette émission X a la même origine que celle du Soleil, sauf qu'ici les couronnes de ces étoiles ont une luminosité $\sim 10^4$ fois plus élevée que la couronne solaire.

Pour expliquer les modulations observées, il faut que ces taches occupent $\sim 40\%$ de la surface d'une seule hémisphère de la géante rouge (à comparer aux 0.1% occupés par les taches solaires). De telles taches impliquent des boucles magnétiques énormes. Par exemple, le système AR Lac à occultations, dont les caractéristiques sont

$$\begin{array}{lll} \text{primaire:} & G2 & R = 1.54 R_{\odot} \\ \text{secondaire:} & K0 & R = 2.81 R_{\odot} \\ \text{demi-grand axe:} & 9.2 R_{\odot} & \end{array} \quad (4.14)$$

semble impliquer des boucles d'une taille mille fois plus grandes que celles du Soleil et un champ magnétique de l'ordre de 2 Tesla (10 fois le champ solaire dans les régions actives). D'où provient un champ magnétique si intense?

Il semble que ce soit la rotation rapide de ces étoiles qui engendre un tel champ. En effet, les systèmes RS CVn étant très rapprochés, ils sont synchrones $T = P$ et chaque étoile tourne sur elle-même en quelques jours (28 pour le Soleil, de 1 à 14 pour les RS CVn). L'effet dynamo dans une étoile, et particulièrement dans une étoile convective serait alors beaucoup plus efficace, fournissant $B(t) \propto \Omega^{\alpha}(t)$. Au fur et à mesure qu'une étoile serait freinée (par son propre vent), le champ magnétique créé par effet dynamo serait plus faible et donc, on devrait observer une décroissance de l'activité X avec des étoiles plus vieilles. C'est bien ce qui est observé, ce qui donne du crédit à cette explication. Cependant, il n'existe pas encore de modèle satisfaisant de l'effet dynamo, ni même du freinage d'une étoile par vent magnétisé.

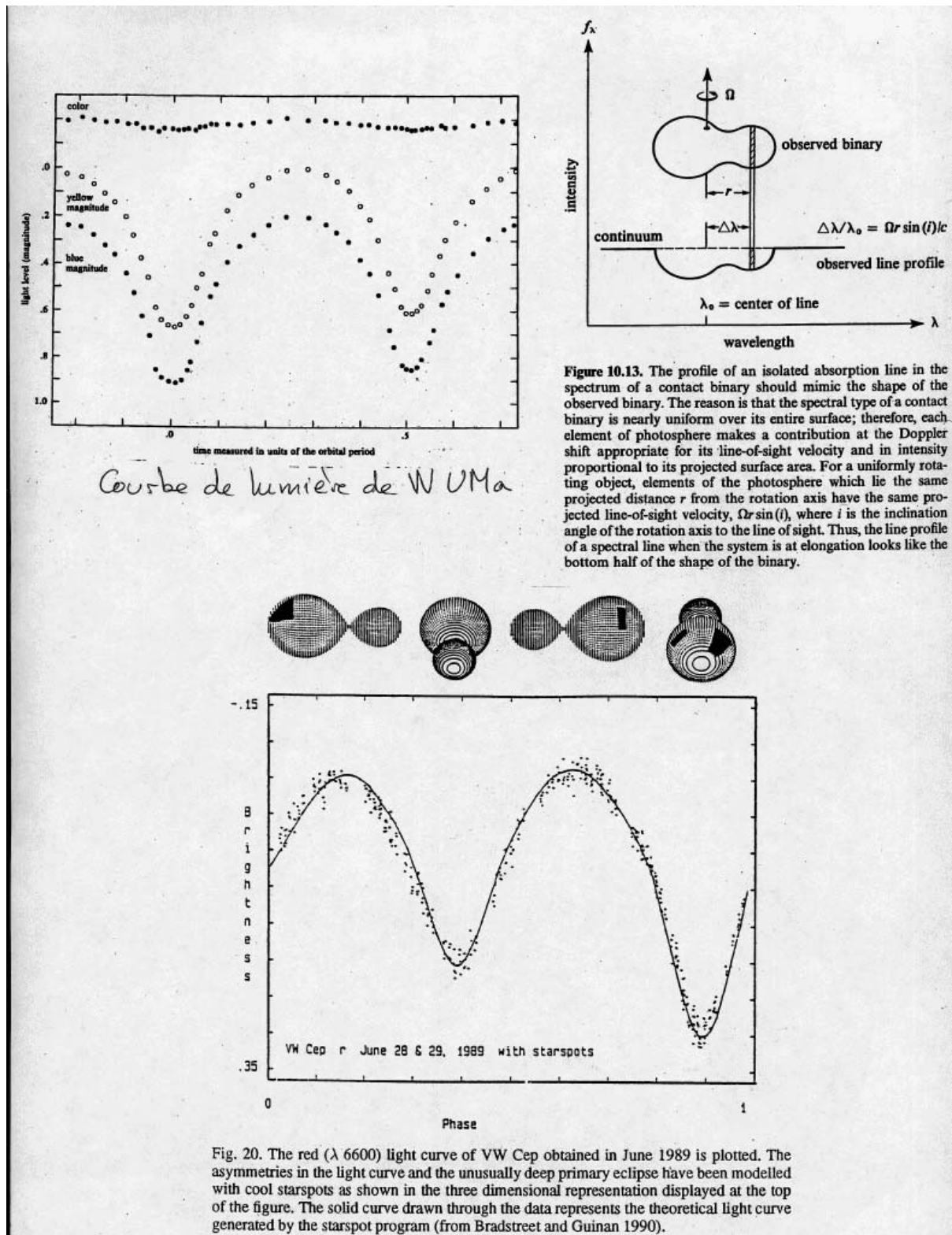
Par ailleurs, de tels systèmes sont si rapprochés et les boucles magnétiques si grandes, qu'il est fort probable que les deux magnétosphères n'en forment qu'une seule! Théoriciens et observateurs ont donc de beaux jours devant eux, avant de comprendre la complexité des phénomènes qu'un tel couplage magnétosphérique engendre.

Les systèmes du type W Ursae Majoris

Les systèmes du type W UMa sont des binaires à éclipses avec une période orbitale comprise entre 5 et 18 heures. Par spectroscopie, nous savons que $q = M_2/M_1 \sim 0.3$ est typique, mais la courbe de lumière issue de l'occultation est reproduite avec une seule et unique température effective! Cela se comprend si l'on admet que les atmosphères des deux étoiles sont en contact au niveau du point de Lagrange L_1 de telle sorte qu'on observe une couche superficielle extérieure commune. Systèmes typiques: W UMa, AW UMa, ϵ Cra, AH Vir, SW Lac, OO Aql, VW Cep (voir fig. 4.22)...

Ces binaires en contact direct présentent par ailleurs des signes d'une intense activité magnétique: émission X et radio, taches photosphériques...

2. La présence de champs magnétiques intenses s'accompagne toujours de phénomènes de haute énergie, responsables du rayonnement X.

FIG. 4.22 – Système du type *W UMa*.

Il n'existe pas d'explication théorique encore claire pour ces très rares objets (environ 0.1% des étoiles). En particulier on ne connaît ni leurs précurseurs, ni comment ils ont été formés, ni leur devenir. Va-t-il y avoir fusion des deux étoiles ou bien formation de deux naines blanches? Comment se font les transferts d'énergie, de masse et de moment cinétique entre les deux étoiles?