

# Partie III

## Instabilité sous-critique hydrodynamique

6	Instabilité sous-critique en mécanique des fluides	75
7	Instabilité sous-critique dans les disques d'accrétion	89
8	Efficacité de la turbulence sous-critique	101



# 6

## Instabilité sous-critique en mécanique des fluides

« Le coeur de la femme est aussi instable  
qu'une goutte d'eau sur une fleur de lotus »

— Confucius

### Plan du chapitre

1. Instabilités et turbulence.....	75
§ 39. Définitions.....	75
§ 39.1. Instabilités en Mécanique.....	75
§ 39.2. Instabilités en mécanique des fluides.....	76
§ 39.3. Turbulence.....	78
§ 40. Dynamique de la turbulence : le modèle de Kolmogorov.....	79
§ 41. Un modèle phénoménologique d'instabilité non linéaire.....	80
§ 41.4. Viscosité turbulente, modèle de Boussinesq.....	80
§ 41.5. Bilan Énergétique.....	80
§ 41.6. Modèle spectral, mécanisme d'auto-entretien.....	81
2. Exemple d'instabilité sous-critique : l'écoulement de Couette.....	83
§ 42. Présentation.....	83
§ 43. Mécanisme d'auto-entretien dans l'écoulement de Couette plan.....	84
§ 43.7. Paramètres.....	84
§ 43.8. Mise en évidence du cycle d'auto-entretien.....	84

## 1. Instabilités et turbulence

### § 39. Définitions

#### § 39.1. *Instabilités en Mécanique*

**L**ES INSTABILITÉS sont des phénomènes extrêmement communs en physique. Ces dernières expliquent des processus aussi variés (et complexes) que la formation des nuages, la radioactivité ou encore le son de certains instruments de musique. De manière générale, une instabilité est définie pour un équilibre donné. On parlera d'équilibre lorsque le système est dans un état qui n'évolue pas au cours du temps (état

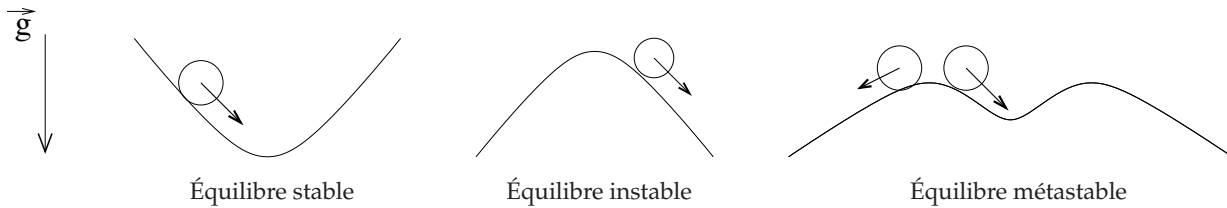


FIG. 34. Les différents états de stabilité au voisinage d'un équilibre. Ici une bille sur un support courbe. On suppose le champ de gravité vertical et uniforme.

stationnaire). La stabilité d'un équilibre s'étudie alors en modifiant (de manière plus ou moins forte) l'état du système initialement en équilibre. Si, quelque soit la perturbation, le système s'éloigne de l'équilibre, on parlera d'équilibre inconditionnellement instable. Si au contraire, le système rejoint l'équilibre pour toutes les perturbations, on parlera d'équilibre inconditionnellement stable.

Pour illustrer ces exemples, considérons une bille soumise à la gravité, posée sur un support solide en forme de « u » (voir Fig. 34), et supposons que ce support soit infini. La position au fond du « u » est un état d'équilibre (la bille posée précisément en ce point ne bougera pas). De plus, quelque soit l'endroit où la bille est initialement placée, elle rejoindra forcément le fond du « u » : l'équilibre est alors inconditionnellement stable. Si l'on suppose à présent une forme en « n », le sommet du support est aussi un point d'équilibre. Cependant, si l'on pose la bille ailleurs qu'au point d'équilibre, elle s'éloignera : l'équilibre est inconditionnellement instable.

Il existe un cas intermédiaire : l'équilibre métastable. Dans ce cas, la surface présente une forme ondulée caractéristique (voir Fig. 34). Si la perturbation est suffisamment faible au voisinage de l'équilibre, la bille retourne dans cet état. Si la perturbation est suffisamment forte, on obtient un comportement similaire à un état instable. On peut donc voir un équilibre métastable comme un équilibre *local*.

### § 39.2. Instabilités en mécanique des fluides

En mécanique des fluides, l'état d'équilibre de référence est, par définition, l'état où les lignes de courant sont stationnaires et varient peu spatialement. On parle alors d'écoulement laminaire (notons néanmoins que le fluide peut être en mouvement dans cet état d'équilibre). Par analogie avec la mécanique, l'écoulement sera alors instable si on peut trouver une perturbation telle qu'il ne retourne pas dans l'état laminaire. Notons qu'il peut néanmoins trouver un nouvel état d'équilibre, instationnaire et plus ou moins complexe.

- **Construction de nombres sans dimension.** De la même manière qu'en mécanique, les instabilités peuvent être de plusieurs natures. Pour les distinguer, il convient d'analyser les équations de la dynamique des fluides, par exemple pour un écoulement incompressible : l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \psi + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (39.145)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (39.146)$$

L'équation du mouvement (39.145) permet de distinguer les phénomènes principaux mis en jeu dans un écoulement. Tout d'abord, le fluide se transporte lui-même : une particule fluide ayant

une vitesse  $v$  se déplacera de  $v dt$  en un temps  $dt$ . Cette advection est décrite par le terme non linéaire  $v \cdot \nabla v$ . Comme nous le verrons par la suite, c'est cette non linéarité qui engendre toute la complexité (et la richesse) des écoulements turbulents. Le premier terme du membre de droite est une force de pression ( $\psi = P/\rho$  où la densité  $\rho$  est une constante). On peut le considérer comme un multiplicateur de Lagrange contraint par l'équation de continuité (39.146). Enfin, nous introduisons la dissipation visqueuse qui peut être vue comme un frottement entre les particules fluides. Cette dissipation est quantifiée par la viscosité cinématique  $\nu$ .

A partir de ces ingrédients physiques, on peut être tenté d'évaluer quels sont les termes dominants dans l'équation (39.145). Pour se faire, il faut connaître les quantités physiques de l'écoulement : sa taille  $L$ , sa vitesse caractéristique  $V$  et sa viscosité  $\nu$ . On peut alors quantifier les deux termes physiques par :

$$v \cdot \nabla v \sim V^2/L \quad (39.147)$$

$$\nu \Delta v \sim \nu V/L^2 \quad (39.148)$$

le rapport de force entre les deux termes est alors un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds qui s'écrit :

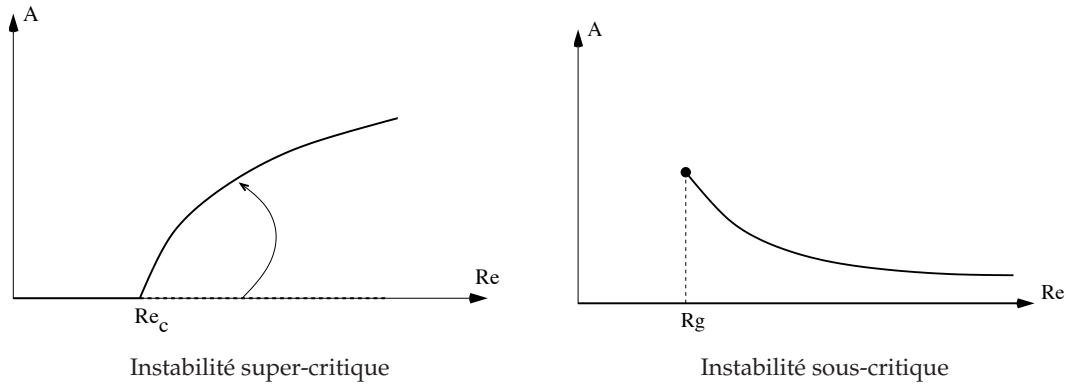
$$Re = \frac{VL}{\nu} \sim \frac{v \cdot \nabla v}{\nu \Delta v} \quad (39.149)$$

Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment petit, l'équation (39.145) est dominée par des effets visqueux : elle est essentiellement linéaire et donne en principe lieu à des écoulements laminaires stables. Au contraire, à grand nombre de Reynolds, l'équation du mouvement est essentiellement non linéaire, produisant ainsi des écoulements plus ou moins turbulents. Ce nombre est donc un paramètre permettant de quantifier, *a priori*, la stabilité d'un écoulement.

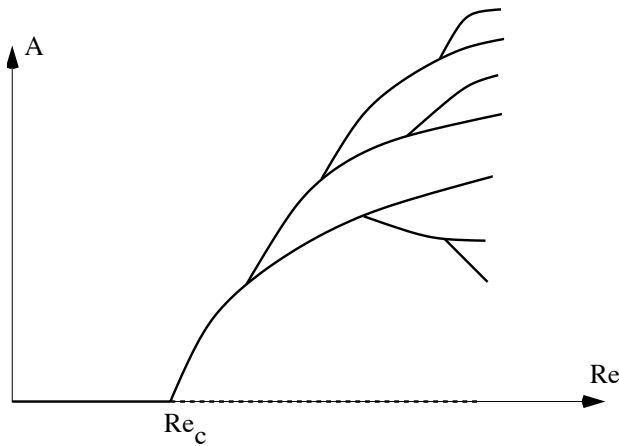
• **Instabilités sous-critiques et super-critiques.** Pour différencier ces deux types d'instabilité, on utilise couramment le nombre de Reynolds de l'écoulement  $Re$  et l'amplitude de la perturbation introduite. On parlera alors d'instabilité super-critique lorsque l'écoulement laminaire devient instable à partir d'un certain Reynolds, et ce, *quelque soit* l'amplitude de la perturbation appliquée à l'écoulement (voir Fig. 35). Au contraire, une instabilité sera sous-critique si elle nécessite une amplitude minimum pour apparaître (cette amplitude minimum étant *a priori* une fonction de  $Re$ ). On pourra alors parler d'un écoulement métastable.

Techniquement, le fait qu'une instabilité super-critique puisse exister pour des amplitudes arbitrairement faibles permet de les étudier analytiquement en *linéarisant* l'équation de la dynamique en fonction des perturbations, supposées infinitésimales. Ce type d'approche permet alors d'obtenir une équation différentielle linéaire dont l'étude est notoirement plus simple que le problème complet. On peut ainsi obtenir les modes propres de l'équation linéarisée et une instabilité sera alors caractérisée par la croissance spontanée d'un ou plusieurs modes propres. En ce sens, les instabilités super-critiques sont aussi appelées *instabilités linéaires*.

Pour les instabilités sous-critiques, la linéarisation est impossible. En effet, l'existence d'une amplitude minimum pour obtenir l'instabilité signifie qu'il faut aussi considérer les termes non linéaires dans l'équation (39.145). On peut néanmoins utiliser une première linéarisation pour obtenir, comme dans le cas précédent, les modes propres. Cependant, ces modes resteront stables. Ainsi, contrairement au cas précédent, l'instabilité ne proviendra non pas d'une croissance spontanée d'un mode mais d'un couplage non linéaire entre plusieurs modes propres. On parlera alors d'une *instabilité non linéaire*.



**FIG. 35.** Les deux grandes classes d'instabilité en mécanique des fluides. Dans le cas super-critique, l'écoulement laminaire est inconditionnellement instable pour un  $Re > Re_c$  et transite spontanément vers un nouvel état d'équilibre (flèche). Dans le cas sous-critique, la transition se fera si  $Re > R_g$  et si l'amplitude de la perturbation est suffisamment importante. L'état laminaire est donc métastable pour  $Re > R_g$ .

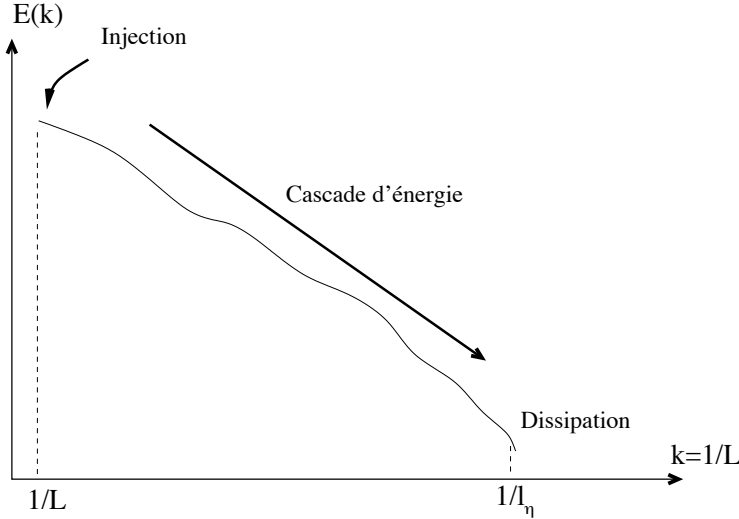


**FIG. 36.** Succession de bifurcations menant vers la turbulence développée dans le cas d'une instabilité super-critique. L'écoulement passe spontanément de l'une à l'autre des branches, menant à un écoulement totalement chaotique à un Reynolds suffisamment élevé par rapport à  $Re_c$ .

### § 39.3. Turbulence

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que l'état laminaire et un état d'équilibre secondaire, donnant un écoulement instationnaire. En pratique, ces « branches » peuvent être nombreuses et décrire des écoulements très différents. Ainsi, de nouvelles branches peuvent apparaître lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, l'écoulement « sautant » alors d'une branche à l'autre (voir Fig. 36). À un Reynolds suffisamment élevé, les branches sont extrêmement nombreuses et complexes, l'écoulement devient alors chaotique : c'est la turbulence. Un état turbulent est donc caractérisé par une grande complexité, des mouvements sur une grande gamme d'échelles de temps et de fréquences. De plus, un tel écoulement est imprévisible sur le long terme : un écart infinitésimal entre deux conditions initiales s'accroît rapidement au cours du temps jusqu'au point où les 2 solutions sont totalement différentes (il s'agit là du problème fondamental des prévisions météorologiques).

On le comprend, la description analytique rigoureuse d'un écoulement turbulent est totalement hors de portée et il faut faire appel aux simulations numériques pour effectuer de telles études. Cependant, il est possible d'obtenir des descriptions statistiques de ces écoulements pour en dégager les lois fondamentales.



**FIG. 37.** Principe de la cascade de Kolmogorov : Injection aux grandes échelles, cascade d'énergie par formation de petites échelles puis dissipation pour  $l = l_\eta$ . La forme de  $E(k)$  est donnée ici à titre indicatif.

#### § 40. Dynamique de la turbulence : le modèle de Kolmogorov

La théorie statistique de la turbulence la plus simple est la théorie de Kolmogorov, qui suppose un écoulement homogène et isotrope. Dans ce cadre, on décrit l'écoulement par son spectre en énergie  $E(k)$ . On introduit alors 2 échelles fondamentales : l'échelle d'injection  $L$  et l'échelle de dissipation (ou échelle de Kolmogorov)  $l_\nu$ .

On modélise alors la dynamique de l'écoulement par une « cascade » de Kolmogorov : l'énergie est injectée dans l'écoulement à l'échelle  $L$ . Comme  $Re \gg 1$  la dissipation n'a aucun effet à ces échelles. Les mouvements turbulents engendrent donc par couplage non linéaire des structures de plus en plus petites *sans dissipation* : l'énergie des grandes échelles est transférée intégralement vers les petites échelles (on parlera alors de domaine inertiel). Cependant, à l'échelle  $l_\eta$ , la dissipation ne devient plus négligeable, on peut alors définir un nombre de Reynolds à l'échelle  $l_\eta$  tel que :

$$Re_\eta = \frac{v_\eta l_\eta}{\nu} = 1 \quad (40.150)$$

où  $v_\eta$  est l'amplitude de fluctuation du champ de vitesse à l'échelle  $l_\eta$ . A cette échelle on dissipe donc l'énergie injectée au début de la cascade (voir Fig. 37).

La conservation de l'énergie nous permet donc d'affirmer que le long de la cascade, le taux de transfert d'énergie  $\epsilon$  ne dépend pas de l'échelle  $l$ , ce que l'on écrira sous la forme :

$$\epsilon = v_l^3 / l = \text{cte} \quad (40.151)$$

En particulier, le taux d'injection à l'échelle  $L$  est égale au taux de dissipation à l'échelle  $l_\eta$  soit :

$$V^3 / L = v_\eta^3 / l_\eta \quad (40.152)$$

En utilisant la définition de  $l_\eta$  (40.150), il vient alors naturellement :

$$\frac{L}{l_\eta} = Re^{3/4} \quad (40.153)$$

Cette relation nous permet donc d'avoir une idée de l'échelle de dissipation d'un écoulement. De plus, on pourra remarquer que dans le domaine inertiel, l'énergie  $E(k)$  ne peut dépendre que du nombre d'onde  $k$  et du taux de transfert  $\epsilon$ . Une analyse dimensionnelle nous permet alors

d'écrire :

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (40.154)$$

où  $C_K$  est la constante de Kolmogorov. En pratique, les expériences de turbulence homogène montrent que  $C_K \simeq 1.5$  (Bailly & Comte-Bellot 2003). Ainsi, un spectre en  $k^{-5/3}$  est symptomatique d'une région de transfert inertiel c'est-à-dire où l'énergie est simplement transférée vers les petites échelles.

## § 41. Un modèle phénoménologique d'instabilité non linéaire

### § 41.1. Viscosité turbulente, modèle de Boussinesq

Considérons un fluide turbulent régi par l'équation (39.145) pour lequel on décompose son champ de vitesse sous la forme  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}'$  où  $\bar{\mathbf{V}}$  est une moyenne d'ensemble de  $\mathbf{v}$  (on ne supposera pas que  $\mathbf{v}'$  est petit). On peut alors écrire l'équation (39.145) sous sa forme moyennée :

$$\partial_t \bar{V}_i + \bar{V}_j \partial_j \bar{V}_i = -\partial_i \bar{\psi} + \partial_j (\bar{\sigma}_{ij} - \overline{v'_i v'_j}) \quad (41.155)$$

où l'on a réécrit le terme de dissipation visqueuse en utilisant le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij} = \nu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ . On voit donc que les corrélations des fluctuations turbulentes  $\overline{v'_i v'_j}$  apparaissent sous la même forme qu'une contrainte visqueuse dans l'équation moyennée. Ce tenseur, appelé tenseur de Reynolds, doit être approximé par une fonction des vitesses moyennes  $\bar{\mathbf{V}}$  pour pouvoir résoudre de manière approchée (41.155). Pour ce faire, on pourra remarquer que dans le cas où tous les gradients de vitesse sont nuls, on peut se ramener par transformation galiléenne à un fluide en moyenne au repos ( $\bar{\mathbf{V}} = 0$ ). Dans ce cas, on s'attend à ce que la turbulence disparaisse par absence d'excitation. On peut donc écrire :

$$\overline{v'_i v'_j} = f_{ijkl}(\bar{V}_m) \partial_k \bar{V}_l \quad (41.156)$$

où  $f$  s'annule quand son argument s'annule. Une première approximation pour  $f$  est de supposer que l'on peut écrire (41.156) comme un tenseur des contraintes sous la forme :

$$\overline{v'_i v'_j} = \nu_t (\partial_i \bar{V}_j + \partial_j \bar{V}_i) \quad (41.157)$$

où  $\nu_t$  est le coefficient de viscosité turbulente. Cette approximation, appelée approximation de Boussinesq, revient à supposer que les mouvements turbulents augmentent la dissipation due au transfert aux petites échelles décrit précédemment. On peut ainsi comparer la diffusion turbulente à la diffusion moléculaire classique en supposant que les éléments fluides échangés ont une taille typique  $l_M$  plus grande que l'échelle moléculaire et une vitesse  $v_M$ .

Remarquons cependant qu'il s'agit là du modèle de clôture le plus simple. On pourra ainsi trouver des modèles de clôtures du tenseur de Reynolds plus évolués dans Lesieur (1990) et Speziale (1991) ainsi qu'une discussion sur les limites du modèle de viscosité turbulente dans Bailly & Comte-Bellot (2003).

### § 41.2. Bilan Énergétique

Pour obtenir l'équation d'énergie du champ turbulent, nous commençons par écrire l'équation d'évolution de la déviation à la moyenne comme étant la différence entre l'équation complète (39.145), et l'équation moyennée (41.155), ce que l'on écrira :

$$\partial_t v'_i + \partial_k (v'_i \bar{V}_k + v'_k \bar{V}_i + v'_i v'_k) = -\partial_i \psi' + \partial_k (\overline{v'_i v'_k} + \sigma'_{ij}) \quad (41.158)$$



où  $\sigma'_{ij} = \nu(\partial_i v'_j + \partial_j v'_i)$ . On obtient alors l'équation d'évolution moyenne de l'énergie turbulente en multipliant (41.158) par  $v'_i$  et en sommant sur  $i$  :

$$\begin{aligned} \partial_t e^2 + \partial_k e \overline{V}_k &= -\overline{v'_i v'_j} \partial_k \overline{V}_i - \overline{\sigma'_{ik}} \partial_k \overline{v'_i} \\ &+ \partial_k \left( \overline{v'_i \sigma'_{ik}} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - \overline{v'_k \psi'} \right) \end{aligned} \quad (41.159)$$

où  $e = v'^2/2$ . Les termes en divergence représentent la diffusion du champ turbulent par des effets respectivement de viscosité, de transport par le champ turbulent et de pression. On remarque de plus deux termes sources. Le premier fait intervenir de manière explicite le tenseur de Reynolds et on peut y reconnaître un terme d'injection d'énergie dans le champ turbulent. Remarquons que ce terme est relié au transport du champ de vitesse moyenné par le champ turbulent dans l'équation du mouvement. Le second terme est un terme de perte visqueuse. On pourra notamment vérifier que ce terme est toujours négatif en utilisant l'expression exacte de  $\sigma'_{ij}$ .

Si l'on suppose alors que l'énergie moyennée sur la boîte est globalement stationnaire, on comprend que le terme d'injection d'énergie doit être égal au terme de dissipation. Dans ce cas, on peut justifier l'approximation de Boussinesq en considérant qu'aux grandes échelles, le terme de transport permet d'injecter de l'énergie dans la cascade turbulente qui est ensuite dissipée aux petites échelles. Ceci permet de voir le terme de transport comme une « viscosité apparente » aux grandes échelles.

### § 41.3. *Modèle spectral, mécanisme d'auto-entretien*

Le modèle que je propose ici est le modèle que nous avons utilisé dans Lesur & Longaretti (2005) et qui a été initialement développé par Longaretti (2002) pour expliquer les transitions observées dans les écoulements de Couette-Taylor. Je ne développerai ici que les grandes lignes du modèle et on pourra se reporter aux articles cités pour plus de détails.

Pour simplifier, considérons un fluide dont le cisaillement moyen est constant de sorte que l'on puisse écrire pour une direction arbitraire :

$$\partial_y \overline{V}_x = S \quad (41.160)$$

On peut alors écrire en utilisant (41.157)

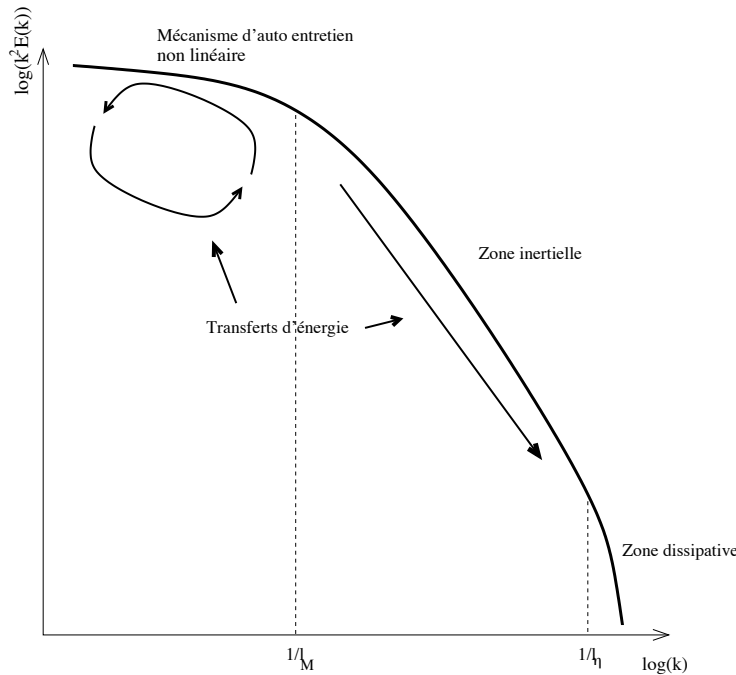
$$\overline{v'_x v'_y} = \nu_t S \quad (41.161)$$

Cette égalité peut être écrite de manière générale sans faire référence à (41.157) par des considérations de dimensionalité. Le coefficient de viscosité turbulente sera alors variable. Si on considère un écoulement d'une taille typique  $L$  (par exemple distance entre les murs dans un écoulement de Couette plan, hauteur dans un disque d'accrétion), des considérations de dimensions sur  $\nu_t$  impliquent :

$$\nu_t = \alpha S L^2 \quad (41.162)$$

où  $\alpha$  est un paramètre sans dimensions du problème. Ce dernier dépend a priori de tous les nombres sans dimension du problème, des conditions aux limites, etc. Cependant, une analyse phénoménologique va nous permettre de préciser cette dépendance.

Tout d'abord, remarquons qu'un écoulement cisailé est naturellement hors équilibre thermodynamique : il cherche alors à annuler le gradient de vitesse par transport de quantité



**FIG. 38.** Représentation schématique du spectre d'un écoulement turbulent dû à une instabilité sous-critique. L'instabilité sous-critique induit un couplage non linéaire qui injecte de l'énergie à grande échelle ( $l > l_M$ ). On a alors une cascade turbulente jusqu'aux petites échelles ( $l \sim l_\eta$ ) où l'on observe une dissipation visqueuse.

de mouvement. Pour un écoulement sous-critique, il existe *a priori* deux possibilités pour ce transport : le transport visqueux via le tenseur des contraintes, ou le transport turbulent avec le tenseur de Reynolds. Le fluide adoptera alors naturellement la méthode de transport la plus efficace. Lorsque le fluide transite d'un état turbulent à un état laminaire en variant un nombre sans dimension, on pourra alors écrire :

$$\langle \sigma'_{ij} \rangle_g \simeq \langle \overline{v'_x v'_y} \rangle_g \quad (41.163)$$

où l'indice  $g$  signifie que les moyennes de volume  $\langle \rangle$  sont prises au voisinage d'une transition. Compte tenu de (41.161) et (41.162), on peut alors réécrire l'équation précédente sous forme adimensionnelle :

$$\alpha_g \sim \frac{\nu}{SL^2} \sim \frac{1}{Rg} \quad (41.164)$$

où  $Rg$  est le Reynolds de transition sous-critique défini au § 39.2. Pour décrire l'évolution de  $\alpha$  lorsque  $Re > Rg$ , il convient d'avoir une vision schématique du fonctionnement d'une instabilité sous-critique d'un point de vue spectral (Fig. 38). Remarquons tout d'abord qu'une instabilité sous-critique fait appel à des processus non linéaires de couplage entre différents modes linéaires de l'écoulement. Le mécanisme d'auto-entretien aura donc une certaine largeur spectrale. De plus, on s'attend à ce que la plus grande échelle du mécanisme soit du même ordre de grandeur que l'échelle de l'écoulement. Ainsi, le mécanisme d'auto-entretien doit se trouver dans une gamme d'échelle allant de la taille de l'écoulement  $L$  jusqu'à la plus petite échelle du mécanisme  $l_M$ . Dans la suite du spectre, on observe alors une cascade turbulente type Kolmogorov, qui peut éventuellement être anisotrope aux plus grandes échelles (non représenté sur la figure). On comprend alors avec ce schéma qu'il est nécessaire de résoudre toutes les échelles jusqu'à

l'échelle  $l_M$  pour obtenir l'instabilité. Ceci explique le Reynolds critique  $R_g$  plus élevé pour les instabilités sous-critiques (quelques milliers) que pour les instabilités super-critiques (quelques dizaines), pour lesquelles il suffit que le mode le plus grand soit instable. Cependant, dès lors que ce seuil est atteint, on s'attend à ce qu'une augmentation du Reynolds n'augmente *que* la longueur de la cascade turbulente sans modifier le mécanisme et donc sans modifier le taux d'injection et le transport turbulent. Ce qui nous permet dès lors d'écrire :

$$\alpha \simeq \alpha_g \quad \text{si} \quad Re > R_g \quad (41.165)$$

cette égalité étant vraie tous nombres sans dimensions autres que  $Re$  constants. Notons que ces arguments phénoménologiques sont appuyés par des résultats expérimentaux et numériques. Ainsi, on pourra remarquer dans la figure (14) de Dubrulle *et al.* (2005a) que le couple évolue comme  $Re^2$  dès que  $Re > R_g$  pour une instabilité sous-critique dans un écoulement de Couette Taylor, ce qui correspond à  $\alpha \simeq \text{cte}$  dans les notations utilisées ici. D'autre part, je montrerai dans la suite que les résultats numériques exhibent un transport (et donc une injection dans la cascade turbulente) essentiellement à grande échelle, même à haut Reynolds, ce qui est conforme à la description de l'instabilité présentée ici. Ainsi, on peut conclure de ce schéma de principe que :

- Au seuil d'instabilité sous-critique, le transport turbulent est du même ordre de grandeur que le transport visqueux.
- Le transport turbulent n'évolue pas lorsque l'on fait évoluer *uniquement* le nombre de Reynolds dans la région  $Re > R_g$ .

Comme nous le verrons, ces deux points auront une importance décisive pour conclure sur le rôle de l'instabilité sous-critique hydrodynamique dans les disques d'accrétion.

## 2. Exemple d'instabilité sous-critique : l'écoulement de Couette

### § 42. Présentation

L'écoulement de Couette est composé de deux murs allant dans des directions opposées, ce qui engendre un cisaillement moyen au travers de l'écoulement (voir Fig. 39). Un tel écoulement est stable linéairement. Cependant, il apparaît à la fois expérimentalement (Daviaud *et al.* 1992; Dauchot & Daviaud 1995a,b), numériquement (Hamilton *et al.* 1995) et analytiquement (Waleffe 1997) que ces écoulements sont sujets à des instabilités sous-critiques.

Ce prototype est intéressant en prélude à l'étude des disques. En effet, ces derniers constituent une extension des écoulements de Couette auxquels on rajoute une rotation et des conditions aux limites radiales (axe  $y$ ) différentes. Je propose donc dans cette partie une reproduction numérique des travaux de Hamilton *et al.* (1995) effectuée durant ma thèse avec le code aux différences finies que j'ai développé. Ces résultats ont été confirmés avec des simulations analogues sur le code Zeus3D. On remarquera aussi que l'étude de cette instabilité non linéaire peut-être considérée comme un cas test pour mon code différences finies.

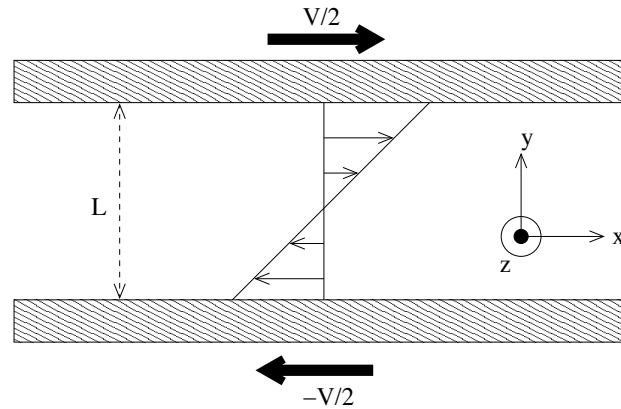


FIG. 39. Schéma de principe d'un écoulement de Couette plan.

### § 43. Mécanisme d'auto-entretien dans l'écoulement de Couette plan

#### § 43.1. Paramètres

Les simulations présentées dans cette partie ont été effectuées dans une boîte ayant pour dimensions :  $L_x = 2.75$ ,  $L_y = 1$ ,  $L_z = 1.96$  avec un Reynolds  $Re = VL_y/\nu = 1600$ . Le Reynolds choisit correspond au Reynolds de transition expérimental. De plus la taille de boîte correspond à la taille de boîte minimale dans laquelle on peut isoler le mécanisme d'auto-entretien (Hamilton *et al.* 1995). En pratique, cette taille de boîte s'obtient par essais successifs en s'efforçant de maintenir la turbulence pour un Reynolds le plus bas possible.

Les conditions aux limites en  $x$  et  $z$  sont des conditions aux limites périodiques. Dans la direction  $y$  des conditions aux limites type mur imperméable sont utilisées. Enfin, la résolution utilisée est de 64 points de grille dans chaque direction.

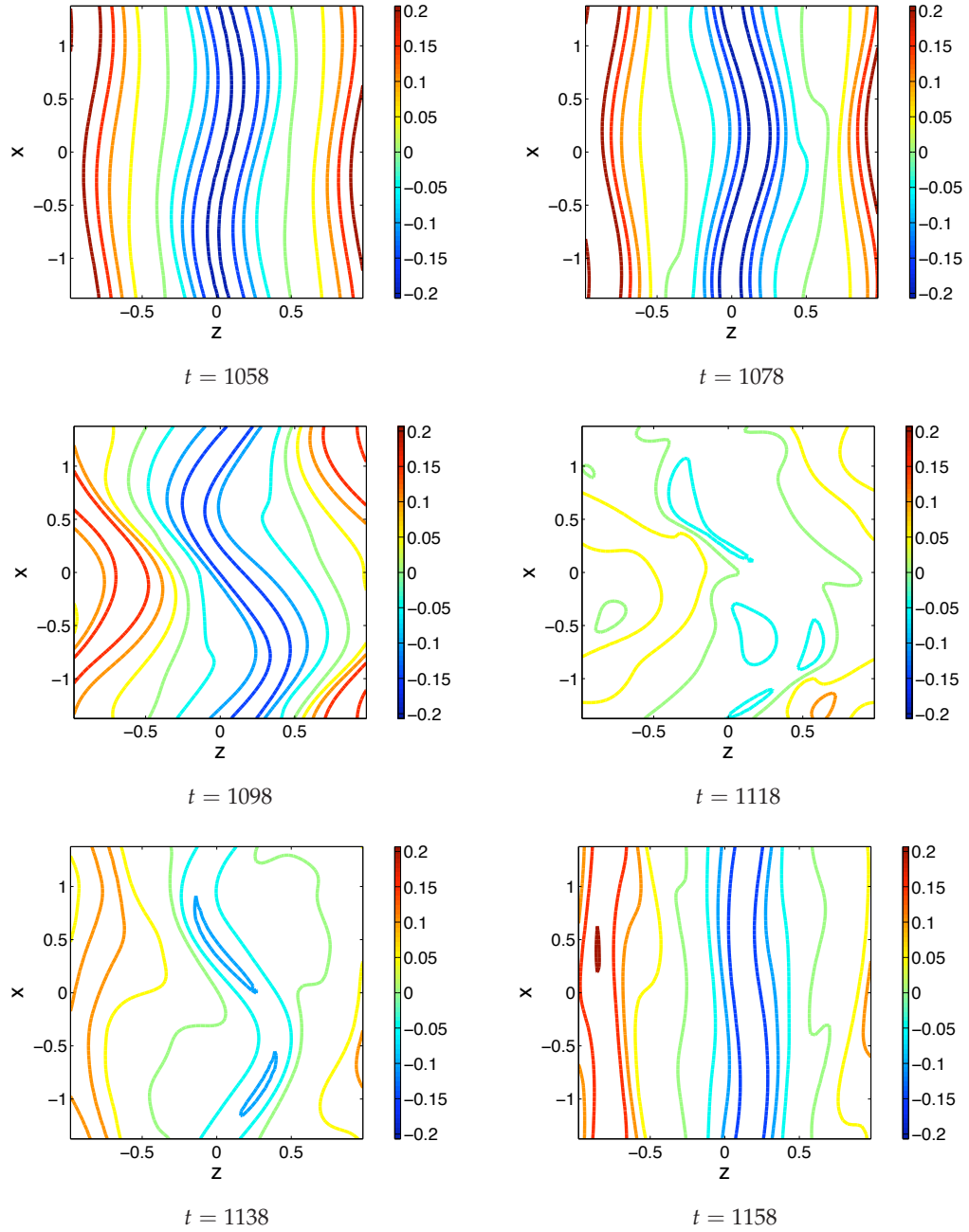
#### § 43.2. Mise en évidence du cycle d'auto-entretien

Le mécanisme mis en jeu dans l'instabilité sous-critique de l'écoulement de Couette est un cycle qui est aujourd'hui bien compris. Dans les expériences et dans les simulations effectuées sur ces écoulements, la première structure à avoir été mise en évidence est une structure de stries, formée par le champ  $v'_x$  dans le plan  $(x, z)$ . On peut observer ces structures sur la série d'instantanés de la figure (40). Ces structures sont en fait le résultat d'un processus d'advection du cisaillement moyen par le champ  $v'_y$  (Fig. 41). En particulier, on pourra remarquer la présence de rouleaux dans la direction de l'écoulement, qui engendrent l'advection de  $\overline{V}_x$ . Le terme mis en jeu par ce processus dans l'équation de Navier-Stokes est donc de la forme :

$$\partial_t v'_x = -v'_y \partial_y \overline{V}_x = -S v'_y \quad (43.166)$$

Outre le fait que ce terme est linéaire, on pourra y reconnaître la source du terme d'injection d'énergie turbulente dans l'équation (41.159). Ainsi, la formation des stries est un processus purement linéaire, source d'énergie turbulente.

L'analyse de l'évolution des stries sur la figure (40) met en évidence la destruction de ces structures par un processus d'instabilité. On peut montrer (Hamilton *et al.* 1995) que l'instabilité des stries est linéaire (on peut les assimiler au premier ordre à une instabilité de



**FIG. 40.** Mise en évidence de stries longitudinales en  $v'_x$  dans le plan médian  $x - z$  de l'écoulement. On voit qu'au cours d'un cycle, la strie est rompue par une instabilité ( $t = 1118$ ). En fin de cycle néanmoins, on observe une réapparition de la structure et le processus est prêt à recommencer.

Kelvin Helmholtz). Cette instabilité est mise en évidence en effectuant une étude spectrale de l'écoulement.

Ainsi, on calcule l'évolution de la puissance spectrale dans chacun des modes  $(\alpha, \beta)$  définis par :

$$P(n_x, n_z) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy |\partial'_x(n_x \alpha, y, n_z \beta)|^2 + |\partial'_y(n_x \alpha, y, n_z \beta)|^2 + |\partial'_z(n_x \alpha, y, n_z \beta)|^2 \quad (43.167)$$

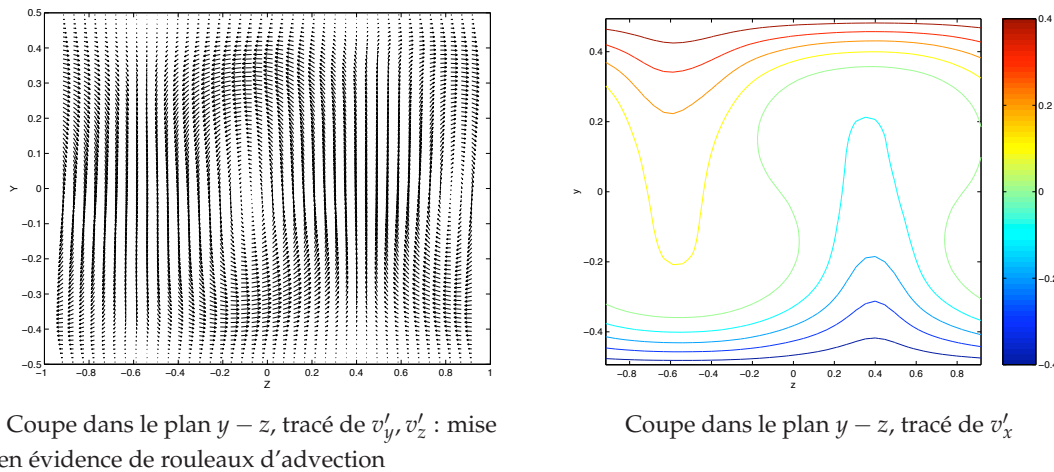


FIG. 41. Mécanisme de formation des stries en  $v'_x$  par advection du champ moyen.

où  $\hat{v}'_i(n_x\alpha, y, n_z\alpha)$  est la transformée de Fourier de  $v_i$  sur les coordonnées  $x$  et  $z$ . On a noté  $k_x = n_x\alpha$  et  $k_z = n_z\beta$  du fait des conditions aux limites périodiques imposées dans les directions  $x$  et  $z$ .

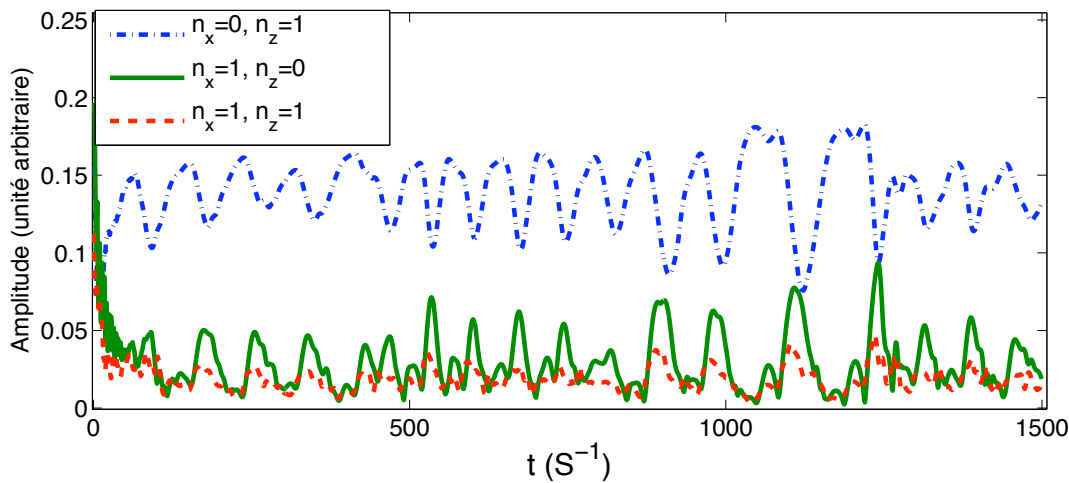
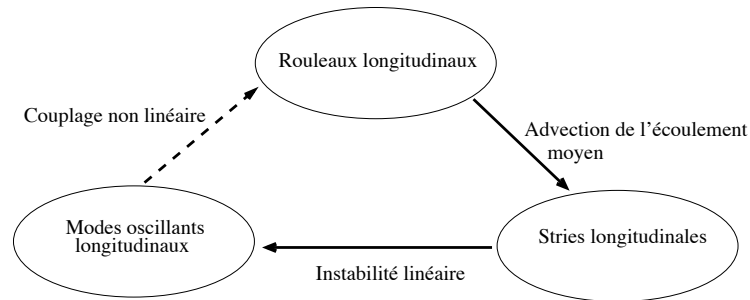


FIG. 42. Évolution de l'amplitude des modes les plus grands dans un écoulement de Couette Plan. L'énergie des modes de strie ( $n_x = 0, n_z = 1$ ) est transférée vers les modes  $n_x \neq 0$ .

Cette décomposition spectrale permet de tracer l'évolution de la puissance spectrale  $P$  de chacun des modes en fonction du temps (Fig. 42). En particulier, on remarquera que les stries observées sur la figure (40) correspondent au mode  $n_x = 0, n_z = 1$ . Ce graphique met en avant un transfert énergétique du mode  $n_x = 0, n_z = 1$  vers les modes  $n_x \neq 0$ , ce qui est conforme à l'observation d'une instabilité de strie. Par ailleurs, la figure (42) met en évidence la périodicité assez régulière du mécanisme avec  $T \simeq 100S^{-1}$ .

La dernière partie du processus mis en jeu dans le mécanisme d'auto-entretien est un couplage entre les modes  $n_x \neq 0$  et les rouleaux de la figure (41). En particulier on peut montrer que les interactions *non linéaires* entre ces modes donnent lieu à la formation d'un mode de



**FIG. 43.** Diagramme du mécanisme d'auto-entretien responsable de l'instabilité sous-critique dans les écoulements de Couette plan. Sont notés en trait pleins les phénomènes linéaires et en pointillés les interactions non linéaires.

vorticité  $n_x = 0$  qui correspond à l'excitation des rouleaux. On pourra remarquer qu'il s'agit là du seul processus non linéaire mis en jeu dans cette instabilité sous-critique, ce qui permet de la qualifier de « quasi linéaire ». Pour résumer, on trouvera un schéma récapitulatif du mécanisme d'auto-entretien de cette instabilité sur la figure (43).

On aura pu remarquer dans ce chapitre que la description de cette instabilité sous-critique semble particulièrement simple. Cependant, il aura fallu de nombreux travaux expérimentaux, théoriques et numériques afin d'aboutir à cette description synthétique. Compte tenu du temps qui nous est imparti, nous ne pouvons pas effectuer une démarche similaire à celle de Hamilton *et al.* (1995) pour les écoulements de Couette en rotation. Néanmoins, la description présentée ici peut donner de bonnes pistes pour expliquer qualitativement les résultats présentés dans les chapitres suivants.





# 7

## Instabilité sous-critique dans les disques d'accrétion

### Plan du chapitre

1. Turbulence sous-critique dans les disques : pourquoi faire? .....	89
2. Écoulements expérimentaux .....	90
§ 44. Intérêt des expériences .....	90
§ 45. Écoulements de Couette-Taylor .....	90
§ 46. Équations du mouvement .....	91
§ 47. Quantités caractéristiques .....	92
§ 48. Nombres sans dimension .....	92
§ 49. Stabilité linéaire .....	93
3. Résultats .....	94
§ 50. Résultats expérimentaux .....	94
§ 50.1. Rôle de la courbure .....	95
§ 50.2. Rôle de la rotation .....	96
§ 50.3. Conclusion sur les expériences .....	97
§ 51. Résultats numériques .....	98
4. Conclusion .....	100

### 1. Turbulence sous-critique dans les disques : pourquoi faire?

COMME JE L'AI MONTRÉ DANS LA PREMIÈRE PARTIE de ce manuscrit, la turbulence est un phénomène plausible pour expliquer le transport dans les disques d'accrétion. Cependant, les conditions physiques régnant dans ces derniers dépendent de la nature du disque : disque de noyau actif et disque d'étoile jeune n'ont clairement pas les mêmes températures, dimensions, densités, *etc.*

Une instabilité linéaire bien connue dans les disques d'accrétion est l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI), mise en évidence dans les disques par Balbus & Hawley (1991a). Elle a été abondamment (bien qu'incomplètement !) étudiée dans la littérature depuis et semble extrêmement prometteuse. Cette instabilité « à tout faire » nécessite néanmoins la présence d'un ingrédient de taille : le couplage du gaz du disque avec un champ magnétique, ce dernier

pouvant être auto-généré par un processus de dynamo ou bien provenir d'une source extérieure au disque. L'existence de ce couplage dans les disques dépend essentiellement de la fraction d'ionisation du gaz via la résistivité du milieu (Gammie 1996), et donc de leur température et de leur densité, les disques froids et denses étant les moins propices au couplage. On peut ainsi voir apparaître dans les disques d'étoiles jeunes (les plus froids) des « zones mortes » ou *dead zones* dans lesquelles le couplage avec le champ magnétique n'est pas suffisant pour l'existence d'une instabilité de type magnétohydrodynamique (Gammie 1996; Fleming & Stone 2003). Notons cependant que l'extension et le positionnement de ces zones mortes dans les disques restent sujet à controverses car ils dépendent de paramètres tels que l'opacité et la composition du disque, difficiles à obtenir.

Ainsi, au moins pour expliquer le transport dans ces zones magnétiquement non couplées, il est nécessaire de trouver une explication alternative à la MRI. On peut ainsi envisager une instabilité d'origine purement hydrodynamique dans les disques, ce qui est l'objet de la présente partie. En poursuivant la logique d'approche progressive présentée dans la première partie de ce manuscrit, je me concentrerai ici sur l'écoulement le plus simple représentant un disque, en ne faisant intervenir que la rotation et le cisaillement dans l'écoulement local présenté au § 9 (p. 22). Je négligerai donc dans toute cette partie les propriétés de stratification et magnétisation.

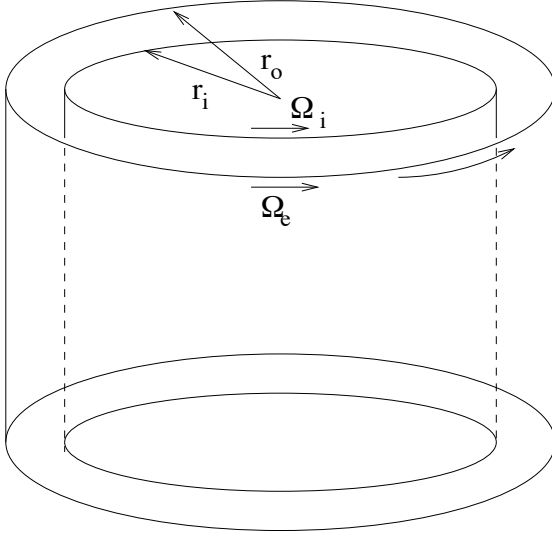
## 2. Écoulements expérimentaux

### § 44. Intérêt des expériences

Les expériences que je vais discuter ici ne sont pas récentes (certaines ont plus de 70 ans) et on peut légitimement se demander quelle est la place de ces résultats dans ce manuscrit. Tout d'abord, il faut se rappeler que la controverse sur l'existence d'une instabilité sous-critique a débuté dans les années 70 avec l'article fondateur de Shakura & Sunyaev (1973). Les moyens numériques limités de l'époque ne permettant pas d'effectuer de simulation d'une telle instabilité, les seuls arguments disponibles étaient basés sur des résultats d'expériences. Aussi, pour être aussi complet que possible, je présente ici des résultats expérimentaux, dont la plupart proviennent d'une réinterprétation de Longaretti (2002) en terme de nombres sans dimension.

### § 45. Écoulements de Couette-Taylor

Dans une expérience cherchant à montrer une instabilité sous-critique dans un disque, il faut réaliser un écoulement voisin de l'écoulement prototype (Fig. 9, p. 24) présenté en introduction. On négligera en particulier les effets magnétiques et la stratification verticale. Remarquons cependant que le forçage en volume de la gravitation qui impose le cisaillement dans un disque ne peut être directement reproduit en laboratoire. On doit donc se contenter d'introduire des murs dans la direction  $y$ , et de provoquer le cisaillement via ces murs : c'est l'écoulement de Couette plan tournant. Malheureusement, en pratique, des murs en translation rectiligne sont difficiles à réaliser. Aussi, on préfère souvent utiliser l'écoulement de Couette-Taylor (Fig. 44), composé de deux cylindres verticaux en rotation. On notera cependant que les conditions aux limites verticales, non représentées sur la figure, restent problématiques expérimentalement.



**FIG. 44.** Écoulement de Couette-Taylor : le fluide est entraîné entre 2 cylindres en rotation différentielle. Expérimentalement, les conditions aux limites verticales (non représentées ici) sont souvent problématiques.

### § 46. Équations du mouvement

Pour détailler les nombres sans dimension pertinents dans le problème de l'écoulement de Couette-Taylor, nous allons commencer par développer les équations du mouvement dans un repère tournant. On considère donc un écoulement de type Couette-Taylor dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,  $z$  étant l'axe des cylindres. On définit alors  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \tilde{\Omega} r \mathbf{e}_\phi$  où  $\tilde{\Omega}$  est une vitesse de rotation moyenne (constante) de l'écoulement qui sera définie plus précisément par la suite. De même, on pose  $\phi = \theta - \tilde{\Omega} t$ . Ceci nous permet de définir le repère  $(r, \phi, z)$  en corotation locale avec le fluide dont le champ de vitesse est donné par  $(w_r, w_\phi, w_z)$ . Dans ce repère, l'équation de Navier-Stokes devient (Longaretti 2002) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla' \mathbf{v} + 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{v_\phi^2}{r} \mathbf{e}_r + \frac{v_\phi v_r}{r} \mathbf{e}_\phi = -\frac{\nabla \pi}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{w} \quad (46.168)$$

On inclut à présent le terme de force centrifuge  $-\rho \tilde{\Omega}^2 r^2 / 2$  dans le terme de pression généralisée  $\pi$ . Par ailleurs, on définit le terme « advection-cisaillement » par :

$$\mathbf{a} \cdot \nabla' \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \nabla (b_r \mathbf{e}_r) + [r \mathbf{a} \cdot \nabla (b_\phi / r)] \mathbf{e}_\phi + \mathbf{a} \cdot \nabla (b_z \mathbf{e}_z) \quad (46.169)$$

Cette définition permet de séparer les contributions dues à la courbure de l'écoulement moyen [deux derniers termes de l'équation (46.168)] et au cisaillement. On pourra remarquer que dans la définition précédente, l'annulation du cisaillement, et donc du tenseur des contraintes induit l'annulation du terme d'advection-cisaillement, et permet ainsi de séparer nettement le rôle du cisaillement et le rôle de la courbure.

Dans le cas d'un écoulement de Couette plan tournant, on obtient l'équation du mouvement en faisant tendre  $r$  vers l'infini dans (46.168) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla \pi}{\rho} - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (46.170)$$

Le système de coordonnées cylindriques devient par cette limite un système cartésien et le terme d'advection se réduit au terme d'advection cartésien classique.

### § 47. Quantités caractéristiques

Plusieurs échelles caractéristiques du problème de l'écoulement de Couette-Taylor doivent être définies pour pouvoir comparer les différentes expériences. Ainsi, on pose  $\tilde{\Omega}$  de tel sorte que :

$$r_e \Omega_e - r_e \tilde{\Omega} = r_i \tilde{\Omega} - r_i \Omega_i \quad (47.171)$$

où les indices  $i, e$  se réfèrent respectivement aux quantités des cylindres intérieur et extérieur respectivement. En posant le rayon caractéristique comme étant :

$$\tilde{r} = (r_e r_i)^{1/2} \quad (47.172)$$

on obtient la propriété suivante dans la limite des faibles écartements ( $r_i \gg d$  où  $d = r_e - r_i$ ) :

$$\tilde{\Omega} = \bar{\Omega}(\tilde{r}) \simeq \frac{r_e \Omega_e + r_i \Omega_i}{2\tilde{r}} \quad (47.173)$$

où  $\bar{\Omega}(r)$  est le profil de rotation en régime laminaire. De la même manière, on définit le cisaillement moyen par :

$$\tilde{S} = \bar{S}(\tilde{r}) = 2 \frac{r_e r_i}{r_e + r_i} \frac{|\Delta\Omega|}{d} \simeq \tilde{r} \frac{|\Delta\Omega|}{d} \quad (47.174)$$

où  $\bar{S}(r) = r d \bar{\Omega} / dr$  est le cisaillement en régime laminaire et  $\Delta\Omega$  est la différence de vitesse de rotation entre les cylindres extérieur et intérieur.

Dans le cas des écoulements de Couette plan, les expressions ci-dessus se réduisent à :

$$\tilde{\Omega} = -\Omega \quad (47.175)$$

et à :

$$\tilde{S} = \bar{S} = \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (47.176)$$

Cette définition de la rotation permet d'obtenir une définition cohérente du signe de  $\Omega$  lors du passage à la limite cartésienne.

### § 48. Nombres sans dimension

L'utilisation de nombres sans dimension permet de trouver les paramètres pertinents pour l'étude de la plupart des problèmes en mécanique des fluides. Ici, en partant des équations précédentes, je vais montrer l'existence de trois nombres d'importance capitale pour la compréhension des expériences.

Les écoulements de Couette-Taylor possèdent plusieurs échelles spatiales caractéristiques : le rayon typique d'un cylindre  $r$ , qui correspond à l'échelle des termes de courbure ; la distance  $d$  séparant les 2 cylindres, qui donne l'échelle caractéristique du cisaillement ; une vitesse caractéristique du fluide donnée par la vitesse de cisaillement<sup>14</sup>, soit  $\tilde{v} = \tilde{S}d$  ; et enfin une échelle de temps caractéristique de la rotation :  $\tilde{\Omega}$ .

Toutes ces grandeurs caractéristiques peuvent être combinées pour former des temps caractéristiques de chacun des phénomènes représentés dans l'équation de Navier-Stokes. Ainsi, on peut obtenir un temps de courbure  $t_c = \tilde{r}/\tilde{v} = (\Delta\Omega)^{-1}$ , un temps de cisaillement  $t_s = (\tilde{S})^{-1}$ , un temps de rotation  $t_r = (2\tilde{\Omega})^{-1}$  et un temps de dissipation  $t_d = d^2/\nu$ .

<sup>14</sup>Ce choix est justifié par le fait que tous les phénomènes physiques qui peuvent se produire tireront leur énergie du cisaillement et non de leur vitesse angulaire. Ils auront donc une vitesse caractéristique de l'ordre de la vitesse de cisaillement.

La comparaison de ces différents temps caractéristiques nous permet de définir des nombres sans dimension permettant d'isoler chacun des termes de l'équation de Navier-Stokes :

- Le nombre de Reynolds que l'on a déjà défini précédemment :

$$Re = \frac{\text{advection-cisaillement}}{\text{dissipation visqueuse}} = \frac{\tilde{v}\tilde{S}}{v\tilde{v}/d^2} = \frac{\tilde{S}d^2}{v} \simeq \frac{\tilde{r}|\Delta\Omega|d}{v} \quad (48.177)$$

- Le nombre de rotation, qui est l'inverse d'un nombre de Rossby :

$$R_\Omega = \frac{\text{Coriolis}}{\text{advection-cisaillement}} = \frac{2\tilde{\Omega}}{\tilde{S}} \simeq \frac{2\tilde{\Omega}}{\tilde{r}} \frac{d}{\Delta\Omega} \quad (48.178)$$

On parlera alors de rotation cyclonique lorsque  $R_\Omega > 0$  (la vorticité due au cisaillement et la rotation sont de même signe) et de rotation anticyclonique lorsque  $R_\Omega < 0$  (vorticité et cisaillement sont de signe contraire). On remarquera aussi que dans le cas d'un écoulement à profil képlerien,  $R_\Omega = -4/3$ .

- Enfin, le nombre de courbure :

$$R_c = \frac{\text{Courbure}}{\text{advection-cisaillement}} = \frac{\tilde{v}^2/\tilde{r}}{\tilde{v}^2\tilde{d}} = \frac{d}{\tilde{r}} \quad (48.179)$$

On peut alors adimensionnaliser l'équation de Navier-Stokes en choisissant comme échelle de temps  $\tilde{S}^{-1}$  et comme échelle de longueur  $d$ . Ainsi, en utilisant les nombres sans dimension ci-dessus et en posant  $X^*$  la grandeur adimensionnée correspondant à  $X$ , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* + R_\Omega (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^*) + R_c \left( -\frac{v_\phi^{*2}}{r^*/\tilde{r}^*} \mathbf{e}_r + \frac{v_\phi^* v_r^*}{r^*/\tilde{r}^*} \mathbf{e}_\phi \right) = - \left( \frac{\nabla^* \pi}{\rho} \right)^* + Re^{-1} \Delta^* \mathbf{v}^* \quad (48.180)$$

On voit alors immédiatement que l'écoulement de Couette plan tournant correspond à la même équation avec  $R_c \rightarrow 0$ , au changement de système de coordonnées près.

## § 49. Stabilité linéaire

Les limites de stabilité peuvent être définies à partir de paramètres locaux de rotation. Dans le cas de l'écoulement de Couette-Taylor, on notera :

$$\bar{\Gamma}_\Omega(r) = \frac{2\bar{\Omega}(r)}{rd\bar{\Omega}/dr} \quad (49.181)$$

On peut remarquer que dans cette définition,  $\bar{\Gamma}_\Omega(\tilde{r}) = R_\Omega$ . Dans la limite du Couette plan, on définit :

$$\bar{\Gamma}_\Omega(r) = -\frac{2\Omega}{d\bar{v}_y/dx} \quad (49.182)$$

Comme  $\Omega$  et  $S$  sont constants dans les écoulements de Couette plan, les nombres  $\bar{\Gamma}_\Omega$  et  $R_\Omega$  sont identiques pour ces écoulements. Par ailleurs, de la même manière que le nombre de rotation, le paramètre local de rotation est positif dans le cas de la rotation cyclonique et négatif dans le cas anticyclonique.

Dans le cas d'un écoulement de Couette plan ou d'un écoulement de Couette-Taylor, on montre qu'une condition suffisante d'instabilité à tout Reynolds est donnée par le critère de Rayleigh :

$$-1 < \bar{\Gamma}_\Omega < 0 \quad (49.183)$$

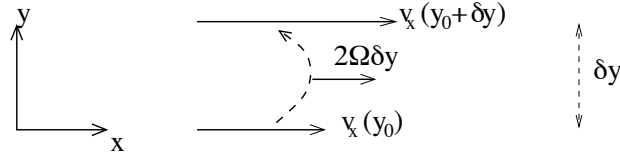


FIG. 45. Effet de la force de Coriolis sur une particule fluide déplacée selon l'axe  $y$ .

qui s'avère être en pratique un critère nécessaire et suffisant d'instabilité.

On peut comprendre cette limite dans l'écoulement de Couette Plan en utilisant un argument de déplacement d'une particule fluide. Le développement que je propose ici est similaire aux travaux de Tritton & Davies (1981) et Tritton (1992). Pour ce faire, considérons un écoulement cisailé en rotation (Fig. 45). L'écoulement moyen est cisailé avec un profil de la forme  $\bar{V} = Sy e_x$ . Ce cisaillement engendre une accélération de Coriolis le long de l'axe  $y$  de la forme  $-2\Omega Sy$ , contrebalancée par un gradient de pression moyen  $d\bar{\pi}/dy$ .

Considérons une colonne de fluide infinie dans la direction  $x$ , centrée en  $y_0$ , et déplaçons la dans la direction  $y$  d'une distance  $\delta y$ . On peut alors supposer que ce déplacement se fait sans variation de pression, ce qui nous permet d'écrire en utilisant l'équation (46.170) :

$$v_x(y_0 + \delta y) - v_x(y_0) = \int dt 2\Omega v_y = 2\Omega \delta y \quad (49.184)$$

La colonne fluide ainsi déplacée subit une accélération de rappel sur l'axe  $y$ , notée  $\delta y''$ , composée de la force de Coriolis et du gradient de pression :

$$\delta y'' = -2\Omega[v_x(y_0 + \delta y)] - \frac{d\pi}{dy}(y_0 + \delta y) \quad (49.185)$$

ce que l'on pourra réduire en utilisant l'équilibre de pression précédent et en remarquant que  $v_x(y_0) = Sy_0$  :

$$\delta y'' = -2\Omega(2\Omega - S)\delta y \quad (49.186)$$

Cette dernière équation met en évidence la fréquence épicyclique  $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega - S)$ . Le système sera donc stable si  $\kappa^2 > 0$ , ce qui correspond à la condition (49.183).

Cette limite a été étudiée du côté cyclonique ( $\bar{\Gamma}_\Omega = 0$ ) et du côté anticyclonique ( $\bar{\Gamma}_\Omega = -1$ ) de manière numérique et expérimentale. Les résultats obtenus sont conformes avec les études théoriques de stabilité linéaire dans ces écoulements.

### 3. Résultats

#### § 50. Résultats expérimentaux

Comme je l'ai montré en introduction, l'approximation disque mince ( $H \ll R$ ) est particulièrement adaptée à la description de la turbulence dans les disques d'accrétion (§ 9, p. 22). Ainsi, on s'attend à ce que la turbulence soit peu anisotrope, de sorte que les longueurs typiques de corrélation dans les trois directions soient voisines de  $H$ . En conséquence, le nombre de courbure typique pour décrire la turbulence des disques est faible (de l'ordre de  $H/R$ ). Aussi, la description d'écoulements expérimentaux au voisinage de  $R_c = 0$  est bien adaptée à la caractérisation astrophysique. Par ailleurs, je rappelle que le profil képlerien donne un nombre de

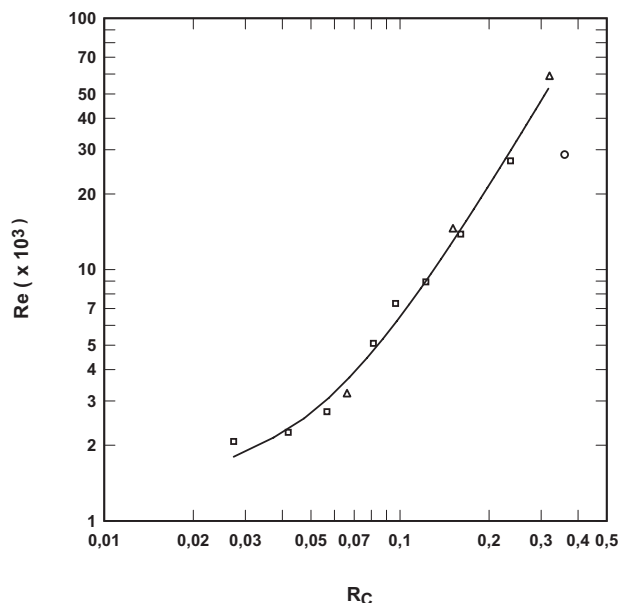


FIG. 46. Reynolds de transition turbulente en fonction du nombre de courbure.

rotation caractéristique de  $-4/3$ . On doit donc s'atteler à décrire la turbulence dans ces régimes d'écoulement.

### § 50.1. Rôle de la courbure

Les données présentées ici ont été obtenues sur des écoulements de type Couette-Taylor du côté cyclonique avec le cylindre intérieur au repos en faisant varier l'écartement présent entre les deux cylindres. Dans ce cas, on a d'après les définitions (48.178) et (48.179)  $R_{\Omega} = 2R_c$ . Les temps caractéristiques de courbure et de rotation sont en conséquence proches et les effets de courbure et de rotation sont *a priori* indiscernables. On cherche alors à étudier le Reynolds de transition vers la turbulence (noté  $Re_c$  dans la suite). Les résultats obtenus par Taylor (1936) et Wendt (1933) sont donnés sur la figure (46).

Les données du Reynolds critique sont correctement ajustées par une expression du type (Richard & Zahn 1999) :

$$Re_c \simeq R^+ + b^+ \left( \frac{d}{\tilde{r}} \right)^2 \quad (50.187)$$

avec  $R^+ = 1400$  et  $b^+ \simeq 5 \times 10^5$ ,  $R^+$  correspondant au Reynolds critique sans effet de courbure (et de rotation). Le terme  $(d/\tilde{r})^2$  peut alors être soit un effet de courbure soit un effet de rotation. Cependant, on sait que pour les écoulements de Couette plan, la transition vers la turbulence se fait à Reynolds  $\tilde{S}d^2/\nu$  constant. Ici, dans le régime dominé par le terme quadratique, on peut affirmer que la transition turbulente se fait à  $Re^* = \tilde{S}\tilde{r}^2/\nu = (\tilde{r}/d)^2 Re$  constant. En conséquence, la transition n'est plus caractérisée par la distance séparant les deux cylindres mais par le rayon moyen  $\tilde{r}$  pour un cisaillement donné. Comme la rotation ne possède qu'une échelle caractéristique de temps ( $\tilde{\Omega}^{-1}$ ), et que la courbure possède une échelle caractéristique de longueur ( $\tilde{r}$ ), on peut penser que l'effet observé dans ces résultats est un effet dû uniquement à la courbure.

### § 50.2. Rôle de la rotation

De la même manière que pour la courbure, des expériences ont été faites d'une part pour des écoulements de Couette-Taylor par Richard (2001) du côté cyclonique et anticyclonique, et d'autre part pour des écoulements de Couette plan en rotation par Tillmark & Alfredsson (1996), uniquement du côté cyclonique.

- **Écoulement de Couette plan tournant.** Les données de l'expérience de Couette plan en rotation sont représentées<sup>15</sup> sur la figure (47). Le point noir correspond à une simulation de Komminaho *et al.* (1996) pour  $Re = 3000$  et  $R_\Omega = 0.06$ .

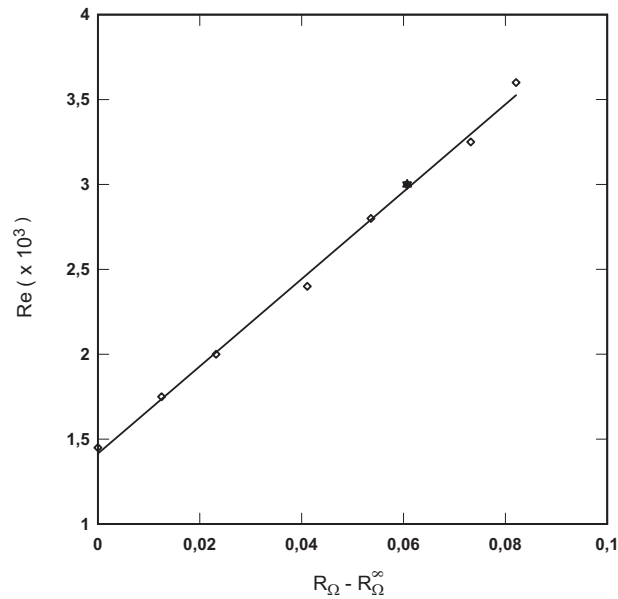


FIG. 47. Reynolds de transition en fonction du nombre de rotation pour un écoulement de Couette plan.

On obtient un ajustement correct avec une équation du type :

$$Re_c = R^+ + a^+ R_\Omega \quad (50.188)$$

où  $R^+ \simeq 1400$  et  $a^+ \simeq 26000$ . Remarquons, d'une part, que la valeur de  $R^+$  est cohérente avec la valeur obtenue pour la courbure. D'autre part, l'équation (50.188) montre que la rotation devient très rapidement le paramètre clé du mécanisme d'auto-entretien. En particulier, la rotation commence à dominer la turbulence lorsque  $R_\Omega = 0,05$  [ $Re_c(R_\Omega = 0,05) \simeq 2R^+$ ]. Ainsi, on peut s'attendre à ce que le temps typique du mécanisme mis en jeu soit de l'ordre de  $\Omega^{-1}$  pour des  $R_\Omega$  supérieurs à  $10^{-1}$ . Ceci contraste avec le mécanisme mis en évidence dans l'écoulement de Couette plan au chapitre précédent, où le temps caractéristique du mécanisme était  $100 S^{-1}$ .

- **Écoulement de Couette-Taylor.** Les données de Richard (2001) sont faites avec un nombre de courbure constant  $R_c = 0,36$ . Elles sont représentées sur la figure (48), les points grisés n'étant pas pris en compte. En effet, compte tenu des difficultés expérimentales du côté anticyclonique (deux cylindres tournants), des circulations à grande échelle se mettent en place et peuvent

<sup>15</sup>Afin d'obtenir des courbes d'instabilité facilement comparables entre les coté cycloniques et anticycloniques, nous avons noté  $R_\Omega^\infty$  le nombre de rotation critique ( $R_\Omega^\infty = 0$  du côté cyclonique et  $R_\Omega^\infty = -1$  du côté anticyclonique).



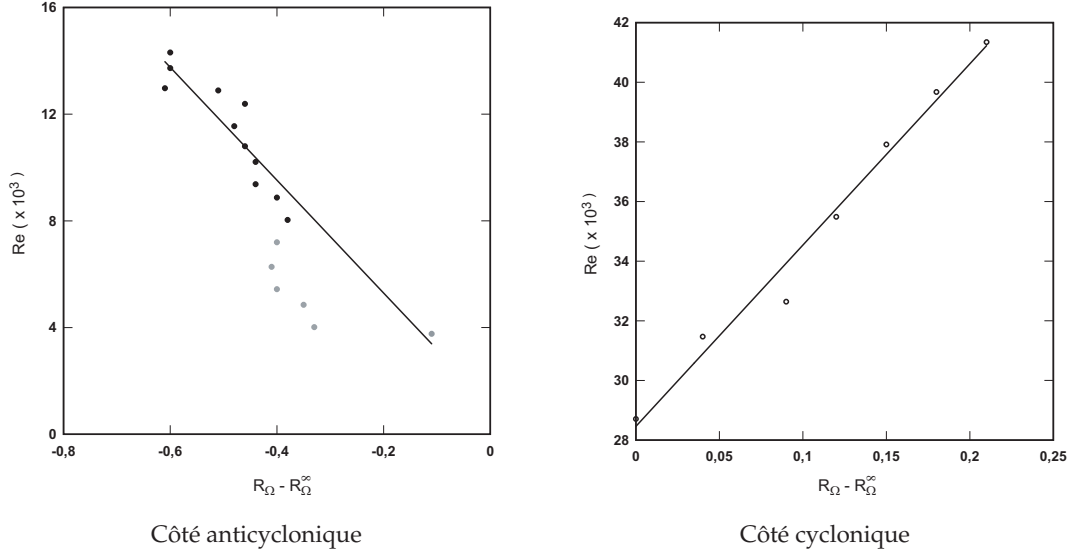


FIG. 48. Reynolds de transition pour un écoulement Couette-Taylor, d'après Richard (2001) et Longaretti (2002).

provoquer localement des instabilités linéaires. Ceci peut expliquer le « plateau » observé sur la figure (48) lorsque  $R_\Omega$  est proche de 1. Le jeu de données du côté cyclonique est ajusté par une expression du type :

$$Re_c = R^+ + b^+ R_c^2 + a^+(R_c) |R_\Omega - R_\Omega^\infty| \quad (50.189)$$

afin d'être cohérent avec l'expression du Reynolds critique en fonction de la courbure (50.187). On trouve  $b^+ = 4.10^5$  et  $a^+(R_c) = 75000$ . On voit donc que la courbure a un rôle non négligeable sur les paramètres de rotation du côté cyclonique. Cependant, il n'est pas certain que les écarts observés ne soient pas dus à des différences de protocole expérimental (le seuil de la turbulence est une notion assez « subjective » expérimentalement dans les écoulements sous-critiques).

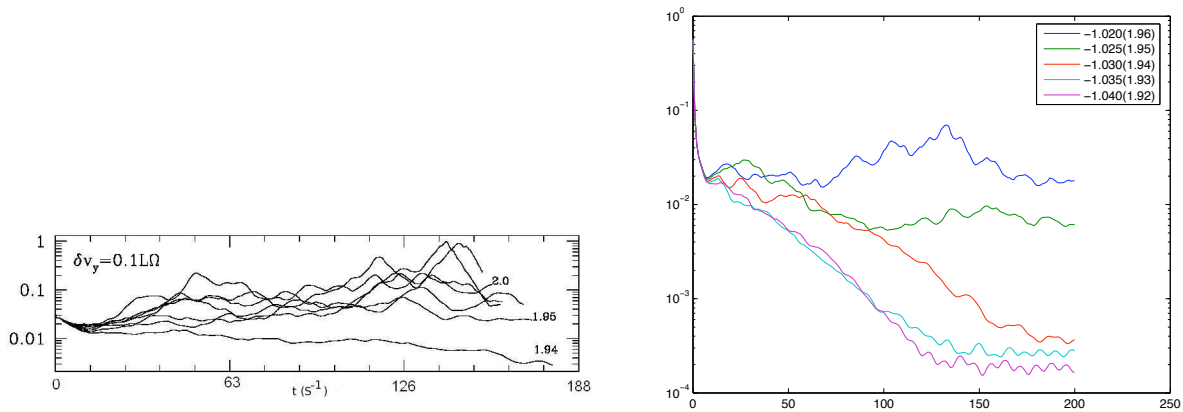
Pour le côté anticyclonique, un ajustement cohérent avec les expressions ci-dessus est de la forme :

$$Re_c = R^- + b^- R_c^2 + a^-(R_c) |R_\Omega - R_\Omega^\infty| \quad (50.190)$$

On trouve  $R^- + b^- R_c^2 = 1300 \simeq R^+$  et  $a^- \simeq 25000 \sim a^+(R_c = 0)$ . Compte tenu de ces résultats, on peut supposer que la courbure a un effet négligeable devant l'effet de rotation, et donc que  $b^- \ll b^+$ . Notons cependant que les résultats anticycloniques semblent beaucoup moins fiables que du côté cyclonique. Ainsi, il semble que ces écoulements soient très sensibles aux effets de circulation d'Ekman causés par les conditions aux limites verticales [plateau de la figure (48)]. D'autres part, des résultats expérimentaux postérieurs à ces travaux ont montré, avec un nombre de courbure plus important, que l'écoulement ne semblait pas instable, et ce jusqu'à  $Re = 10^6$  (Ji *et al.* 2006). Ainsi, il conviendra d'interpréter les résultats expérimentaux du côté anticyclonique avec beaucoup de prudence.

### § 50.3. Conclusion sur les expériences

Tout d'abord, on peut voir que le phénomène de turbulence est très fortement perturbé par la présence de rotation, symétriquement du côté cyclonique et du côté anticyclonique [Figs. (47) et (48)]. De plus, la courbure semble avoir un effet notable sur le mécanisme du côté cyclonique

Résultat original de Hawley *et al.* (1999)Reproduction avec notre version de Zeus3D (valeurs de  $q$  entre parenthèses)

**FIG. 49.** Représentation de l’évolution de l’énergie turbulente en fonction du temps pour différentes valeurs de  $R_\Omega = -2/q$ . On voit dans les 2 cas que la turbulence disparaît lorsque l’on s’éloigne de la stabilité marginale  $R_\Omega = -1$  ( $q = -2$ ), dès  $R_\Omega = -1.030$  ( $q = 1.94$ ).

mais est sans effet apparent sur le côté anticyclonique, si l’on en croit les données de Richard (2001).

Du point de vue des expériences décrites ici, la turbulence sous-critique apparaît donc comme une hypothèse plausible (mais non prouvée) pour expliquer la turbulence dans les disques d’accrétion  $R_\Omega = -4/3$ , pour des Reynolds *a priori* peu élevés ( $Rg < 10^3$  pour un disque).

## § 51. Résultats numériques

Numériquement, la plupart des résultats sur la turbulence sous-critique dans les disques sont obtenus en utilisant le modèle local de disque que j’ai présenté au § 9 (p. 22), dans lequel les effets de stratification verticale et de couplage avec le champ magnétique sont négligés. Les conditions aux limites utilisées sont périodiques dans les directions  $x$  et  $z$  et shearing sheet (voir § 25.2, p. 51) dans la direction du cisaillement  $y$ . Ce type de boîte de simulation sera utilisé dans tous les résultats numériques que je discuterai dans cette partie, sauf mention contraire.

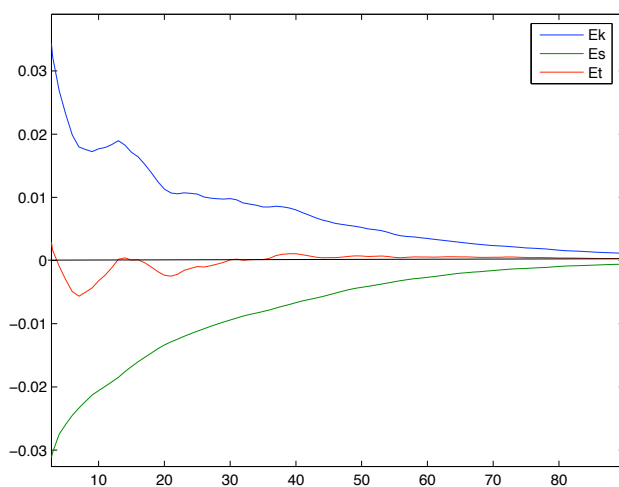
A la suite des travaux numériques de Balbus *et al.* (1996) puis Hawley *et al.* (1999), il était couramment admis que la turbulence sous-critique n’existait pas dans les disques. Le principal argument mis en avant était une série de simulations effectuées avec le code Zeus3D. On retrouvera ainsi sur la figure (49), les résultats originaux de Hawley *et al.* (1999) ainsi qu’une reproduction de ces résultats obtenue avec le code Zeus3D durant ma thèse, pour des résolutions équivalentes.

On voit clairement sur ces figures que la turbulence sous-critique semble très difficile à obtenir dès que l’on cherche à se rapprocher du régime astrophysique  $R_\Omega = -4/3$ , ou de manière équivalente  $q = 1.5$  ( $q \equiv -2/R_\Omega$ ). Cette disparition apparente de turbulence dans les simulations a mené à la conclusion qu’il n’existait pas de turbulence sous-critique dans les

régimes pertinents pour les disques. Cependant, les résultats expérimentaux suggèrent qu'il peut exister une telle turbulence au régime képlérien, pourvu que le Reynolds soit suffisamment élevé.

Dans ce cas de figure, il convient d'envisager les différents biais pouvant apparaître, tant du point de vu expérimental que du point de vu numérique. Pour les biais expérimentaux, on pourra retenir le bruit inhérent à toute manipulation et les effets de circulation d'Ekman dont nous avons parlé précédemment (voir Richard 2001). Numériquement parlant, les simulations citées précédemment ont été effectuées avec des résolutions relativement faibles ( $64^3$ ), et sans maîtrise de la dissipation, ce qui laisse présager un fort impact de la dissipation numérique. Étant donné que techniquement, nous ne pouvons refaire les expériences de Richard, il convient de réviser plus scrupuleusement les résultats numériques.

La dissipation du code Zeus3D dans la plupart des publications est très mal maîtrisée. Pire, il apparaît que cette dernière est dominée par le terme de dissipation artificielle introduit pour tenir compte des effets d'entropie en aval des chocs. La dissipation utilisée est une extension 3D de Von Neumann & Richtmyer (1950) (voir Stone & Norman 1992 pour le détail de l'implémentation). Cette extension n'étant pas tensorielle, elle agit dès lors que l'un des termes de la forme  $\partial_i v_i$  (sans sommation) est négatif. Cet effet peut se voir sur la figure (50), où la totalité de l'énergie cinétique est convertie en énergie thermique via le seul terme de dissipation présent qui est la dissipation artificielle.



**FIG. 50.** Tracé de l'énergie cinétique ( $E_k$ ), l'énergie spécifique ( $E_s$ ) et l'énergie totale en fonction du temps pour  $R_\Omega = -1.035$ . La totalité de l'énergie cinétique est transformée en énergie thermique : c'est l'action du terme de viscosité artificielle.

On pourra ainsi remarquer que le terme de viscosité artificielle 3D basé sur Von Neumann & Richtmyer (1950) est non nul même en cas de mouvement totalement incompressible où  $\nabla \cdot v = 0$ . Il peut alors dissiper les vortex et autres structures caractéristiques de la turbulence incompressible. Une méthode alternative consiste à utiliser la formulation tensorielle de Tscharnuter & Winkler (1979), qui introduit une dissipation dépendant explicitement de la divergence du champ de vitesse. On ne dissipe alors que les termes de compressibilité, ce qui permet de réduire de manière significative la dissipation due à ce terme pour l'instabilité sous-critique, essentiellement incompressible. Cependant, la dissipation due au schéma spatial ne peut-être annulée, et les phénomènes dissipatifs restent dominés par des phénomènes numériques, peu contrôlables, et non physiques.

## 4. Conclusion

A travers ce bref tour d'horizon sur la turbulence sous-critique appliquée aux disques d'accrétion, plusieurs résultats essentiels ont été mis en évidence :

- Les résultats expérimentaux semblent tous montrer de manière cohérente qu'une instabilité sous-critique existe du côté cyclonique, bien que son Reynolds critique augmente rapidement avec la rotation. Ceci va à l'encontre de l'argument analytique avancé par Hawley *et al.* (1999) contre cette instabilité.
- Certains résultats expérimentaux semblent montrer une turbulence sous-critique jusqu'au régime képlerien (Richard 2001), d'autres non (Ji *et al.* 2006). Il apparaît par ailleurs que ces manipulations sont très sensibles aux perturbations (couche d'Ekman).
- Les résultats numériques montrent que l'instabilité disparaît très rapidement lorsque l'on augmente la rotation du côté anticyclonique (Balbus *et al.* 1996; Hawley *et al.* 1999). Cependant, les résolutions sont faibles et aucune dissipation physique n'est introduite (rôle de la dissipation numérique ?).

On le comprend, le contrôle de la dissipation joue un rôle clé dans la compréhension de l'instabilité sous-critique dans les simulations numériques. Dans mon travail de thèse, j'ai donc cherché à comprendre et contrôler le rôle des phénomènes dissipatifs, pour apporter une explication aux résultats apparemment négatifs de Balbus *et al.* (1996) et Hawley *et al.* (1999) et en contradiction avec Richard (2001).

# 8

## Efficacité de la turbulence sous-critique

### Plan du chapitre

1. Résultats .....	102
§ 52. Rôle de la dissipation.....	102
§ 52.1. Protocole.....	103
§ 52.2. Résultats cycloniques.....	103
§ 52.3. Résultats anticycloniques.....	105
§ 53. Transport et instabilité non linéaire.....	106
2. Discussion.....	108
§ 54. Convergence numérique.....	108
§ 54.4. Dissipation numérique.....	108
§ 54.5. Spectres et convergence.....	109
§ 54.6. Transport et modèle phénoménologique.....	110
§ 55. Comparaison avec les résultats antérieurs.....	112
§ 55.7. Côté cyclonique.....	112
§ 55.8. Côté anticyclonique.....	112
§ 56. Conditions aux limites et rapport d'aspect.....	114
§ 57. Conditions initiales.....	115
§ 58. Circulation d'Ekman.....	117
3. Conclusions.....	118

**L**E CHAPITRE PRÉCÉDENT A PERMIS DE METTRE EN ÉVIDENCE une apparente contradiction entre résultats expérimentaux et résultats numériques. Mon objectif a donc été de réexaminer les résultats numériques et de comprendre leur réelle signification physique (et éventuellement les biais numériques). Pour cela, un contrôle plus soigneux des problèmes de convergence a dû être effectué, en utilisant notamment, pour la première fois dans ce type de problème, un code spectral 3D. Je vais donc développer dans ce chapitre mes résultats sur ce problème, dont une partie a été publiée dans Lesur & Longaretti (2005). Notons enfin que l'écoulement que je décris dans ce chapitre est identique à l'écoulement

utilisé par Balbus *et al.* (1996) et Hawley *et al.* (1999) dans leurs simulations (voir § 51, p.98 pour un descriptif complet).

## 1. Résultats

### § 52. Rôle de la dissipation

Contrairement aux simulations précédentes, nous avons voulu introduire une dissipation physique dans nos simulations, et ce à plusieurs fins. Premièrement, il faut noter que les codes spectraux tels que ceux que nous utilisons ont une dissipation numérique naturellement faible. L'absence de dissipation physique entraîne alors l'accumulation d'énergie aux petites échelles, la production de spectres aberrants et rapidement l'explosion de la simulation. Ce phénomène, particulier aux codes spectraux, est en partie contrôlé par la procédure d'antialiasing décrite dans la partie numérique de ce manuscrit. Deuxièmement, le contrôle de la convergence d'une simulation ne peut se faire qu'en introduisant une dissipation physique. Ainsi, une simulation sera considérée comme résolue si l'échelle de dissipation naturelle de l'écoulement est plus grande que la taille d'un pas de grille. Ce type d'analyse est très courant en mécanique des fluides mais malheureusement peu répandu dans la communauté numérique d'astrophysique.

L'introduction du terme de dissipation physique nous donne alors un nouveau paramètre libre par rapport aux simulations antérieures que l'on quantifiera à l'aide du nombre de Reynolds, définit précédemment. Dans la suite, nous maintiendrons constantes les dimensions de la boîte de la simulation, et donc le rapport d'aspect, ainsi que les conditions aux limites. Ainsi, le nombre de rotation  $R_\Omega$  et le nombre de Reynolds sont les seuls paramètres libres du problème.<sup>16</sup> Notre stratégie est alors de définir la région de l'espace des paramètres ( $R_\Omega, Re$ ) pour laquelle la turbulence sous-critique est observée.

Remarquons que la transition sous-critique, contrairement à la transition super-critique, n'est pas clairement définie en terme de Reynolds critique et des écarts de près de 50% peuvent être observés entre différentes expériences. Notamment, on peut observer une turbulence auto-entretenu pendant plusieurs centaines de temps dynamiques puis un soudain retour à un état laminaire, le tout étant dépendant des conditions initiales et du nombre de Reynolds. Ce type de phénomène a déjà été étudié analytiquement (Darbyshire & Mullin 1995) et numériquement (Faisst & Eckhardt 2004) dans les écoulements de Poiseuille sous-critique. D'après ces résultats, une transition entre une décroissance rapide et un auto-entretien assez long apparaît pour une gamme de nombres de Reynolds assez étroite, bien que non singulière. On peut donc supposer qu'un tel comportement est applicable pour l'instabilité sous-critique dans les écoulements de Couette plan tournants (ce qui semble vérifié, voir Richard 2001), et on partira de ces résultats pour définir un écoulement instable.

Dans cette étude, on définira donc un écoulement comme turbulent si l'énergie turbulente reste fluctuante et constante en moyenne sur une durée de 100 temps de cisaillement du côté cyclonique et 200 temps de cisaillement du côté anticyclonique. Cette différence vient de l'amplitude des fluctuations, plus élevée dans le cas de la turbulence anticyclonique que dans le cas cyclonique. Notons que cette définition est en partie arbitraire et les Reynolds critiques

<sup>16</sup>Une étude complète devrait faire intervenir tous les paramètres en incluant le rapport d'aspect et les conditions aux limites. Ce type d'approche reste cependant trop coûteux en terme de temps de calcul.

obtenus dépendent directement de cette dernière. Cependant, compte tenu des remarques précédentes, il apparaît qu'une autre définition ne devrait changer nos résultats que d'un facteur multiplicatif de l'ordre de l'unité.

### § 52.1. *Protocole*

Pour étudier la transition turbulente, nous avons choisi d'effectuer des simulations à Reynolds constant, en utilisant à la fois le code spectral décrit dans la partie précédente, et le code aux différences finies. Pour effectuer une exploration systématique de l'espace des paramètres, on fait alors varier progressivement le nombre de rotation des simulations.

En pratique, on choisit donc un nombre de Reynolds. Selon la cyclonicité voulue, on choisira comme point de départ un état marginalement instable d'après le critère linéaire : soit  $R_\Omega = 0$  (côté cyclonique) soit  $R_\Omega = -1$  (côté anticyclonique). Les conditions initiales choisies sont une excitation aléatoire et incompressible des modes les plus larges dans la boîte de simulation. Des tests, incluant par exemple des vortex, ont montré que ces résultats étaient peu dépendants de cette condition initiale. Par la suite, on fait évoluer par palier le nombre de rotation au cours du temps, les paliers devant être suffisamment longs pour pouvoir vérifier que l'écoulement est bien turbulent d'après le critère précédent ( $100$  ou  $200 S^{-1}$  selon la cyclonicité). Ce protocole présente l'avantage de limiter la dépendance vis-à-vis des conditions initiales. En effet, on peut supposer que le mécanisme d'auto-entretien évolue lorsque l'on modifie  $R_\Omega$ . Ainsi, des conditions initiales idéales pour une région de l'espace des paramètres peuvent ne pas l'être pour une autre. Une évolution continue à partir d'un point turbulent telle que celle proposée ici permet de faire évoluer progressivement l'écoulement et donc le mécanisme d'auto-entretien, de sorte que la turbulence soit maintenue le plus longtemps possible. Ce protocole nous permet alors de tracer l'évolution, en fonction du temps, du transport turbulent et de l'énergie turbulente. La figure (51) montre un tel tracé du côté cyclonique et du côté anticyclonique pour  $Re = 12000$  avec notre code spectral et une résolution de  $64^3$ .

Sur ces exemples, on peut voir que la turbulence est maintenue jusqu'à  $R_\Omega = 0.2$  du côté cyclonique et  $R_\Omega = -1.024$  du côté anticyclonique. Ce protocole peut-être réitéré en changeant le nombre de Reynolds et obtenir ainsi la courbe d'instabilité non linéaire dans l'espace  $(Re, R_\Omega)$ . Pour confirmer ces courbes, j'ai effectué d'autres tests avec d'autres résolutions, ainsi que d'autres méthodes numériques (différences finies).

### § 52.2. *Résultats cycloniques*

Du côté cyclonique, on obtient la limite d'instabilité donnée sur la figure (52). On pourra remarquer que les simulations aux différences finies semblent ne pas atteindre des nombres de rotation aussi élevés que les simulations spectrales : on peut y voir un effet de résolution ou de compressibilité (le code aux différences finies, compressible, montre des vitesses caractéristiques de l'ordre de la vitesse du son). En effet, les méthodes aux différences finies ont une résolution des petites échelles beaucoup plus approximative que les méthodes spectrales. Ainsi, lorsque l'on sera proche du seuil, la phénoménologie développée au chapitre précédent montre que le mécanisme d'auto-entretien occupera toute la largeur du spectre simulé. Si les petites échelles sont alors mal résolues, la turbulence disparaît spontanément.

Remarquons de plus qu'en raison du protocole utilisé, on est certain que la turbulence auto-entretenu existe pour chaque point de la figure (52). Néanmoins, en raison de l'échantillonnage

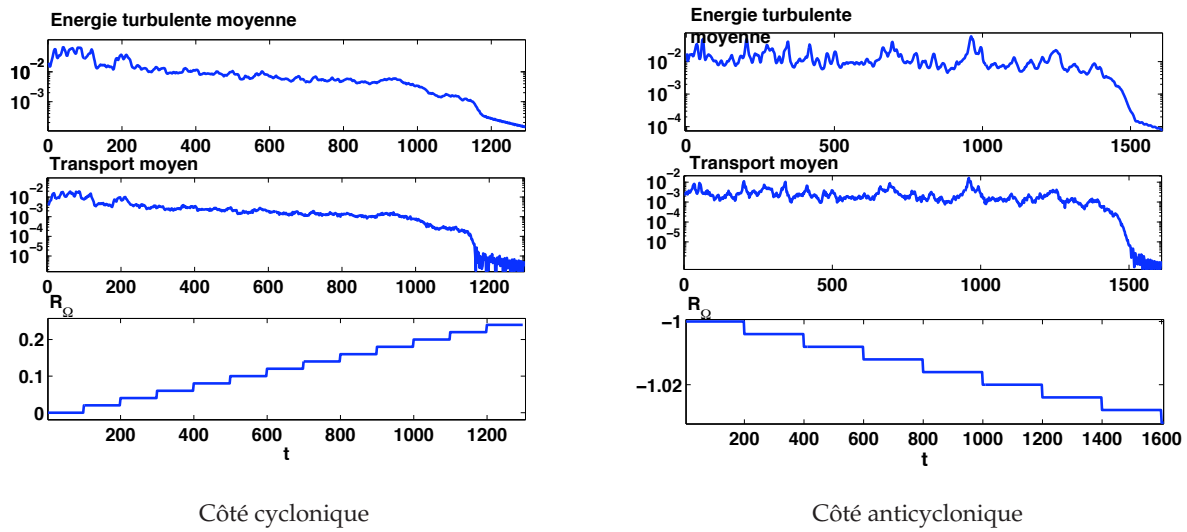


FIG. 51. Exemple de simulation spectrale avec  $64^3$  modes et  $Re = 12000$ , représentant l'évolution de l'énergie turbulente moyenne et du transport moyen en fonction du temps. On notera l'augmentation (ou la diminution) par palier du nombre de rotation imposé au cours du temps.

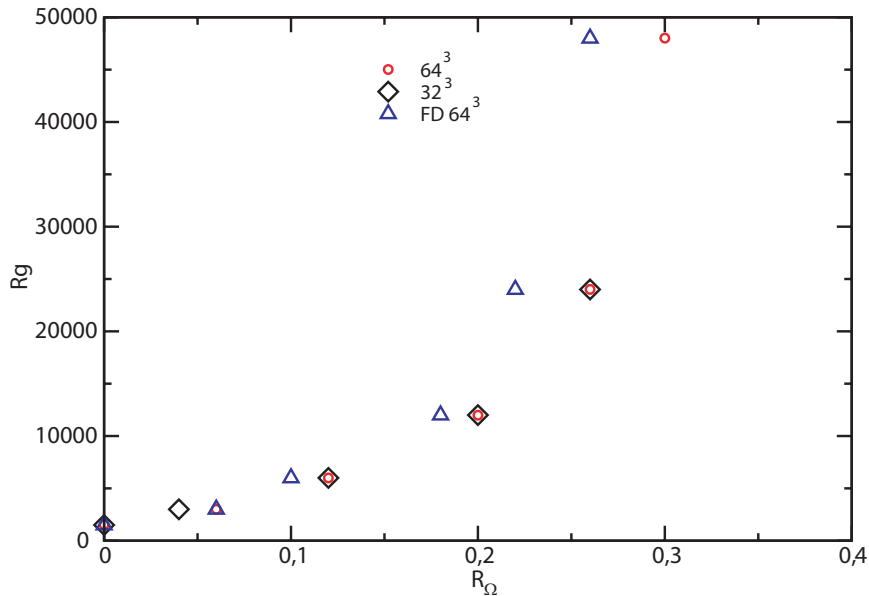
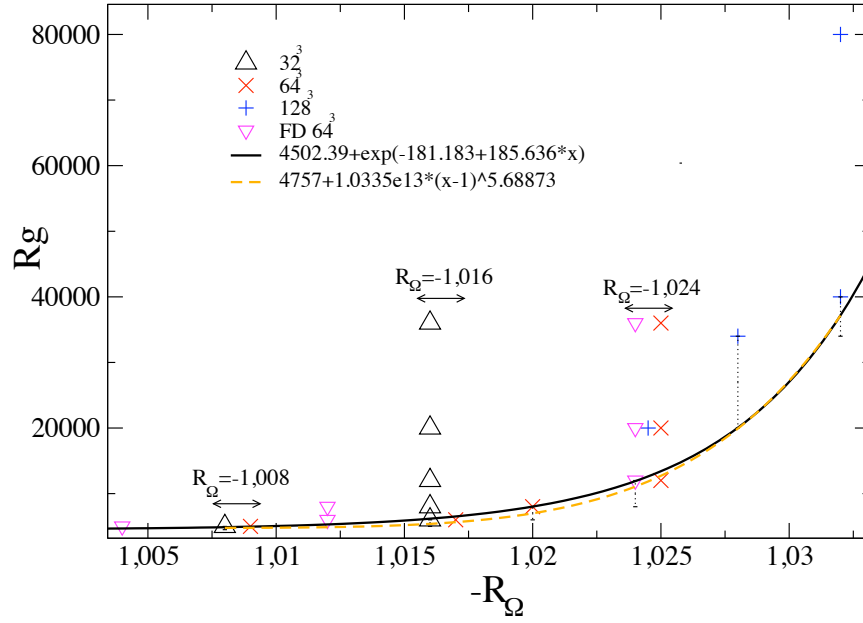


FIG. 52. Limite de stabilité pour un écoulement cyclonique. Les cercles correspondent aux simulation spectrales  $64^3$ , les losanges aux simulations spectrales  $32^3$  et les triangles aux simulations différences finies  $64^3$ .

en Reynolds utilisé, un point situé en dessous d'un point testé pourrait être aussi turbulent. Ceci est vrai jusqu'au Reynolds testé immédiatement inférieur. En effet, pour ce Reynolds, on est sûr que la turbulence n'existe pas, d'après notre protocole. L'échantillonnage introduit donc une barre d'erreur (non représentée ici) qui peut avoir un impact important sur les résultats. Notons enfin que les simulations représentées ici sont résolues : les points spectraux de résolutions différentes donnent le même résultat.





**FIG. 53.** Limite de stabilité pour un écoulement anticyclonique. Tous les points sont calculés avec le code spectral, exceptés les triangles (code différence finie). Les barres d'erreur (pointillées) proviennent de l'échantillonnage en Reynolds (voir texte). Les points trop proches ont été écartés pour faciliter la lecture. Enfin, les points situés sur les courbes correspondent à des simulations résolues, les autres non (voir texte).

### § 52.3. Résultats anticycloniques

La courbe de stabilité marginale du coté anticyclonique est donnée sur la figure (53). Contrairement au cas cyclonique, on voit que la dépendance en  $R_\Omega$  est très forte et la turbulence est perdue numériquement dès  $R_\Omega = -1.034$ , c'est-à-dire très proche de la stabilité marginale. De plus, on remarque que des résolutions de plus en plus élevées sont requises pour atteindre les points les plus éloignés. En particulier les simulations les moins résolues ( $32^3$ ) semblent atteindre un nombre de rotation minimum, puis, quel que soit le Reynolds utilisé, ne dépassent plus ce point. Les simulations mieux résolues montrent que la courbe de transition physique ne suit pas cette coupure brutale et qu'il s'agit donc là d'un effet purement numérique, dû à des simulations non résolues.

Pour expliquer la figure (53), supposons dans un premier temps que la résolution soit infinie, et étudions le comportement de la plus petite échelle du mécanisme d'auto-entretien  $l_M$  et l'échelle de dissipation  $l_\eta$ . Considérons une simulation à un Reynolds donné et supposons alors que  $l_\eta$  est constant durant cette simulation<sup>17</sup>. Initialement ( $R_\Omega = -1$ ), l'écoulement est turbulent :  $l_M(R_\Omega = -1) > l_\eta(Re)$ . Lorsque l'on diminue progressivement  $R_\Omega$ , la figure (53) montre que  $Rg$  augmente, c'est-à-dire que  $l_M(R_\Omega)$  diminue. Arrivé à un certain point, on a :

$$l_M(R_\Omega) \simeq l_\eta(Re) \quad (52.191)$$

C'est le seuil d'instabilité non linéaire au delà duquel la turbulence disparaît. Supposons à présent que l'on effectue une simulation sous résolue. Par définition, on a  $l_\eta < l_g$  où  $l_g$  est la

<sup>17</sup>En réalité,  $l_\eta$  n'est pas constant. Cependant, si l'on suppose un spectre de type Kolmogorov, on montre que  $l_\eta \simeq L/(Re^{3/4}\alpha^{1/4})$  de sorte que l'on peut considérer  $l_\eta \simeq \text{cte}$  dans notre domaine d'étude.

taille de grille. La simulation suivra alors le même cheminement que précédemment, mais la turbulence disparaîtra lorsque le mécanisme ne pourra être résolu, c'est-à-dire lorsque :

$$l_M(R_\Omega) \simeq l_g \quad (52.192)$$

La limite d'instabilité devient alors indépendante du nombre de Reynolds, ce qui correspond aux points superposés verticalement à  $R_\Omega = -1.016$  pour une résolution de  $32^3$  et  $R_\Omega = -1.024$  à  $64^3$ .

En suivant cette phénoménologie, on constate donc que le mécanisme d'auto-entretien du coté anticyclonique devient très rapidement étendu spectralement, et requiert donc des résolutions élevées. Ce point explique aussi l'échec de Hawley *et al.* (1999) pour détecter la turbulence sous-critique au régime képlérien : la résolution requise est beaucoup trop élevée pour pouvoir être atteinte avec les moyens numériques actuels. Remarquons cependant que c'est le contrôle de la dissipation dans le code qui nous a permis d'expliquer ce résultat *a priori* aberrant.

### § 53. Transport et instabilité non linéaire

Comme je l'ai déjà fait remarquer, le transport turbulent est une quantité qui intéresse beaucoup l'astrophysicien pour les modèles de disque. Dans ce travail, j'ai essayé de quantifier le transport qui serait dû au transport turbulent dans un vrai disque, en me fondant sur le résultat des simulations. En particulier, le modèle phénoménologique du chapitre précédent montrait que, pour une turbulence sous-critique, on s'attendait à avoir au seuil de transition une relation de proportionnalité entre le coefficient de transport adimensionnalisé  $\alpha$  et l'inverse du Reynolds de transition  $Rg$  (Eq. 41.164, p.82). Pour tester ce résultat en éliminant le maximum de bruit, nous avons commencé par couper les courbes temporelles (Figs. 52 et 53) à chaque changement de  $R_\Omega$ , ce qui nous donne des segments de simulations à  $R_\Omega$  constant. Cette procédure, effectuée pour toutes les simulations disponibles, permet d'obtenir des séries de segments ayant le même nombre de rotation mais pas le même nombre de Reynolds.<sup>18</sup> D'après l'équation (41.165), le coefficient de transport ne dépend pas du Reynolds dans l'état turbulent. On s'attend donc à trouver le même coefficient de transport dans chacune des séries à  $R_\Omega$  constant. Ainsi, en faisant la moyenne du coefficient de transport de chaque série, on obtient la dépendance  $\alpha(R_\Omega)$ . Connaissant le Reynolds de transition  $Rg$  pour chaque  $R_\Omega$  d'après les figures (52) et (53), on peut finalement obtenir le tracé du transport moyen  $\alpha$  en fonction du Reynolds transition (Fig. 54).

La corrélation remarquable observée sur cette figure correspond à l'équation du modèle phénoménologique (41.164) dans la limite  $Rg \rightarrow \infty$ . Plus précisément, on trouve du coté cyclonique :

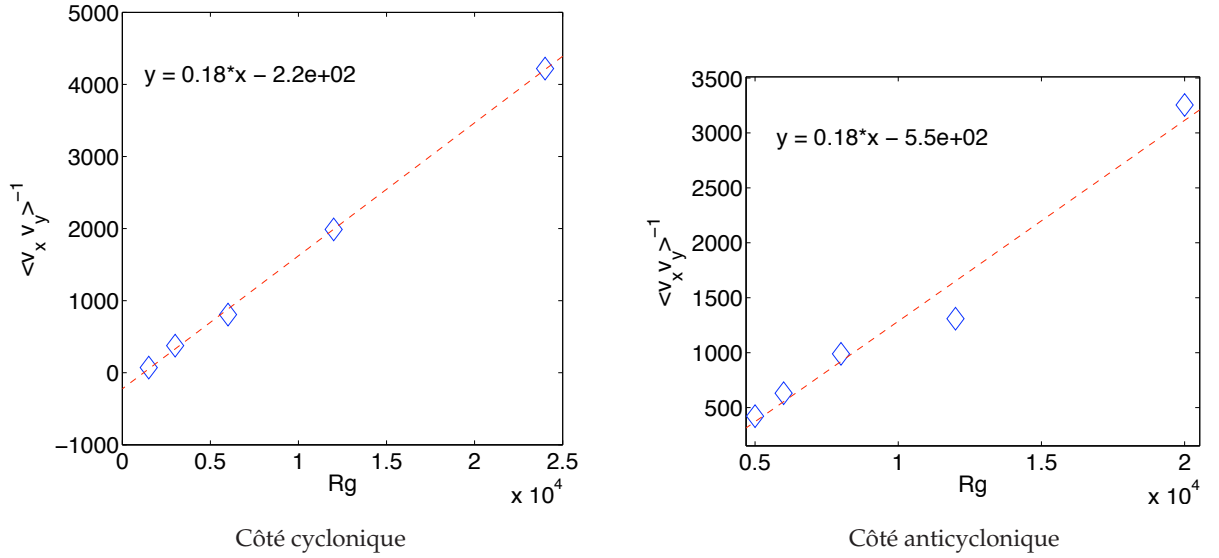
$$\langle v_x v_y \rangle = \frac{5.5}{Rg - 1250} (Sd)^2 \quad (53.193)$$

et du coté anticyclonique :

$$\langle v_x v_y \rangle = \frac{5.5}{Rg - 3000} (Sd)^2 \quad (53.194)$$

On pourra remarquer que les constantes de correction sur  $Rg$  diffèrent du coté cyclonique et du coté anticyclonique, ce qui peut-être expliqué par un Reynolds de transition différent pour les 2 points de stabilité marginale  $R_\Omega = 0$  et  $R_\Omega = -1$ .

<sup>18</sup>Les segments présentant un écoulement laminaire ne sont évidemment pas inclus dans ces séries.



**FIG. 54.** Évolution du transport moyenné en fonction du nombre de rotation. Les moyennes sont faites sur des extraits de simulation ayant des Reynolds différents mais des nombres de rotation identiques.

En utilisant les extrapolations proposées sur la figure (53), on peut obtenir différentes estimations du Reynolds critique au régime képlerien. Ces valeurs, combinées à (53.194), permettent alors d'obtenir des estimations du transport au régime képlerien (Tab. 3). Aux extrapolations de la figure (53), j'ai rajouté l'extrapolation linéaire des dernières valeurs obtenues, et une estimation sans extrapolation, considérant que  $Rg$  est constant à partir du dernier point résolu. Remarquons que cette dernière valeur constitue une borne supérieure pour le transport : si elle était vérifiée, alors on aurait détecté la turbulence sous-critique au régime képlerien avec notre code spectral à une résolution de  $128^3$ , ce qui n'est pas le cas. Notons de plus que le Reynolds des disques astrophysiques étant estimé à  $10^{10} - 10^{15}$  (voir introduction), l'extrapolation exponentielle prédit l'absence d'instabilité sous-critique.

	Exponentiel	loi de puissance	linéaire	aucune extrapolation
$Rg$	$1,3 \times 10^{26}$	$1,1 \times 10^8$	$1,8 \times 10^6$	$4 \times 10^3$
$\alpha$	n/a	$5 \times 10^{-10}$	$3,1 \times 10^{-6}$	$3 \times 10^{-4}$

**TAB. 3.** Valeurs estimées du Reynolds de Transition et du transport d'après les extrapolations de la figure (53). La valeur donnée par la dernière colonne est une borne supérieure au transport, supposant que  $Rg$  ne varie plus jusqu'à  $R_\Omega = -4/3$  depuis le dernier point résolu ( $Re = 4 \times 10^4, R_\Omega = -1.034$ ).

Ces résultats permettent donc de conclure que le transport dû à l'instabilité sous-critique, si elle existe effectivement dans les disques, est au plus de  $3 \times 10^{-4}$ , les valeurs raisonnables se situant dans l'intervalle  $10^{-8} - 10^{-5}$ .

## 2. Discussion

### § 54. Convergence numérique

Les résultats précédents étant obtenus avec des nombres de Reynolds relativement élevés, il est important de vérifier que les simulations sont bien résolues. En pratique, une vérification de convergence s'effectue en simulant plusieurs fois le même processus avec des résolutions différentes. A partir d'une certaine résolution, les résultats deviennent identiques : c'est la résolution minimum pour le processus considéré. Le test classique de résolution a été effectué pour certains points (voir Figs. 52 et 53). Cependant, les simulations à plus haut Reynolds et donc haute résolution n'ont pu être testées en raison du coût prohibitif en temps de calcul (un doublement de la résolution entraînant, avec notre code spectral, une augmentation d'un facteur 20 du temps d'intégration). Dans cette section, je vais donc montrer quelques arguments justifiant la convergence des simulations précédentes.

#### § 54.1. Dissipation numérique

Un point important, et souvent négligé en astrophysique, est le contrôle des phénomènes dissipatifs. En particulier, il convient de maintenir la dissipation numérique à un niveau faible comparativement à la dissipation visqueuse. Dans notre travail, nous avons basé le contrôle de la dissipation sur l'équation d'énergie (41.159). Pour les écoulements cisailés en rotation, cette équation se réduit à :

$$\partial_t \langle e \rangle = -S \langle v'_x v'_y \rangle - \nu \sum_i \langle (\nabla v'_i)^2 \rangle - \varepsilon_{\text{num}} \quad (54.195)$$

où les crochets  $\langle \rangle$  sont des moyennes de boîte. De plus, on a rajouté dans l'équation précédente un terme représentant la dissipation numérique ( $\varepsilon_{\text{num}}$ ), *a priori* dépendant du code utilisé et donc inconnu. Pour contrôler les effets dissipatifs dans un code, il convient alors d'introduire une dissipation physique non négligeable, comme ce qui a été fait dans notre travail. Le calcul numérique à chaque pas de temps de (54.195) permet alors d'obtenir une estimation de la dissipation numérique. On calculera alors sa contribution à la dissipation totale en évaluant :

$$\gamma_{\text{num}} = \frac{\varepsilon_{\text{num}}}{\varepsilon_{\text{num}} + \nu \sum_i \langle (\nabla v'_i)^2 \rangle} \quad (54.196)$$

Il convient alors de maintenir ce terme à des valeurs aussi faibles que possible. Par exemple, on a tracé l'évolution des différents termes de l'équation (54.196) pour une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $64^3$  sur la figure (55). Dans cet exemple, la dissipation numérique représente au plus 2% de la dissipation totale ( $\gamma_{\text{num}}$ ). De plus, cet exemple est à la limite de résolution (voir Fig. 53). On montre ainsi que sur toutes les simulations présentées ici, la dissipation numérique ne représente qu'une part négligeable de la dissipation du code.

Un autre aspect intéressant pour quantifier la dissipation est de connaître l'échelle de dissipation typique dans les simulations. Pour se faire, on peut calculer la contribution de chaque échelle à la dissipation totale. On calcule ainsi :

$$\tau_d(k) = \nu \int_{-k}^k dk_x \int_{-k}^k dk_y \int_{-k}^k dk_z k^2 E(k_x, k_y, k_z) \quad (54.197)$$

où  $E(k_x, k_y, k_z)$  est l'énergie turbulente dans le mode  $(k_x, k_y, k_z)$ . La quantité  $\tau_d(k)$  correspond alors à la contribution des échelles de tailles supérieures à  $2\pi/k$  à la dissipation. A titre

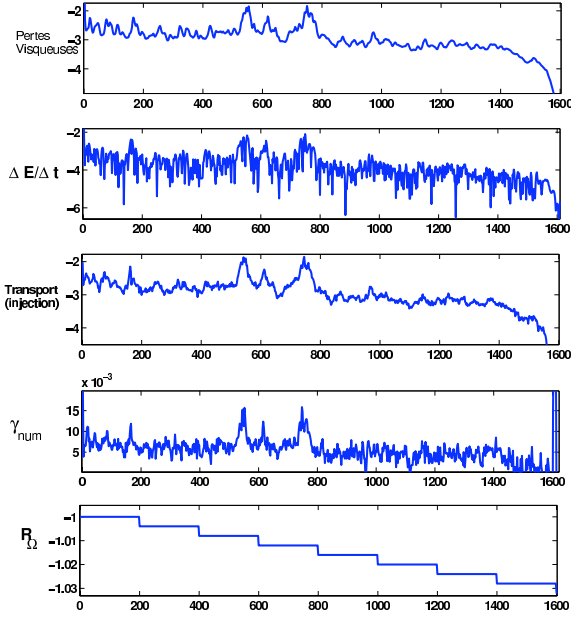


FIG. 55. Évolution des différents termes de l'équation (54.196) pour une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $64^3$  avec notre code spectral. On remarque que la part relative de dissipation numérique ( $\gamma_{\text{num}}$ ) reste inférieure à 2%.

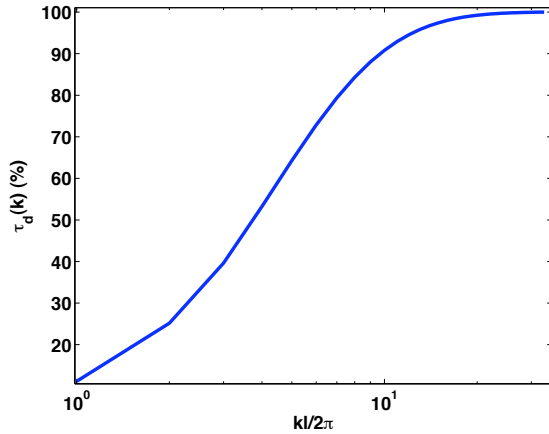


FIG. 56. Représentation de la contribution des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$  à la dissipation totale (en %). On remarque que 90% de la dissipation est due à des échelles de taille supérieure ou égale à 2 fois la taille de grille. D'après une simulation à  $Re = 6000$  et une résolution de  $64^3$ .

d'exemple, on a représenté  $\tau_d(k)$  pour une simulation  $64^3$  et  $Re = 6000$  sur la figure (56). On pourra notamment remarquer que l'essentiel de la dissipation (90%) se fait sur des échelles dont la taille est supérieure à 2 fois la taille de grille. On en conclut donc *a priori* qu'une simulation  $32^3$  sera à la limite de résolution dans les mêmes conditions, ce qui est effectivement le cas (Fig. 53). On peut donc en conclure que les segments verticaux observés sur la figure (53) sont bien dus à une échelle de dissipation devenant plus petite que l'échelle de grille, conformément à ce que nous avons avancé au § 52.3.

#### § 54.2. Spectres et convergence

L'étude des spectres du champ turbulent peut fournir une information complémentaire sur le comportement des échelles de dissipation en fonction de la résolution. En particulier, on s'attend à observer un spectre en  $k^{-5/3}$  dans la partie inertielle (entre  $l_M$  et  $l_\eta$ ). A partir d'une certaine échelle, la pente doit devenir plus importante en raison des phénomènes dissipatifs. Nous

proposons sur la figure (57) les spectres moyennés de simulations avec différents Reynolds et résolutions pour un nombre de rotation de  $-1.016$ . D'après la figure (53), la simulation à  $32^3$  n'est résolue que pour  $Re = 6000$ . On remarquera que pour cette valeur du Reynolds, on observe effectivement le début de la chute du spectre aux petites échelles. De plus, les spectres à  $32^3$  et  $64^3$  se superposent, signe d'une bonne concordance entre les 2 simulations et donc d'une résolution suffisante. Pour  $Re = 12000$ , seule la simulation  $64^3$  est résolue d'après la figure (53). On remarquera que le spectre à  $32^3$  ne fait pas apparaître de domaine dissipatif. En particulier, le domaine dissipatif du spectre  $64^3$  apparaît au niveau de la coupure du spectre  $32^3$  : ce dernier n'est donc clairement pas résolu.

Les simulations à  $Re = 20000$  ne sont résolues ni à  $32^3$  ni à  $64^3$ . On notera que le spectre à  $32^3$  adopte un comportement aberrant, dominé par les petites échelles. Ce type de phénomène est typique des codes spectraux : une dissipation physique trop faible sur le domaine spectral résolu entraîne une accumulation d'énergie aux petites échelles en raison d'une dissipation numérique extrêmement faible. Le spectre  $64^3$  suit la loi de Kolmogorov jusqu'à la coupure sans exhiber de coupure de dissipation. Nul doute que ce dernier aurait un comportement similaire au spectre  $32^3$  à des Reynolds plus important.

On le comprend donc, l'analyse des spectres confirme l'analyse initiale que nous avons pu faire sur la figure (53).

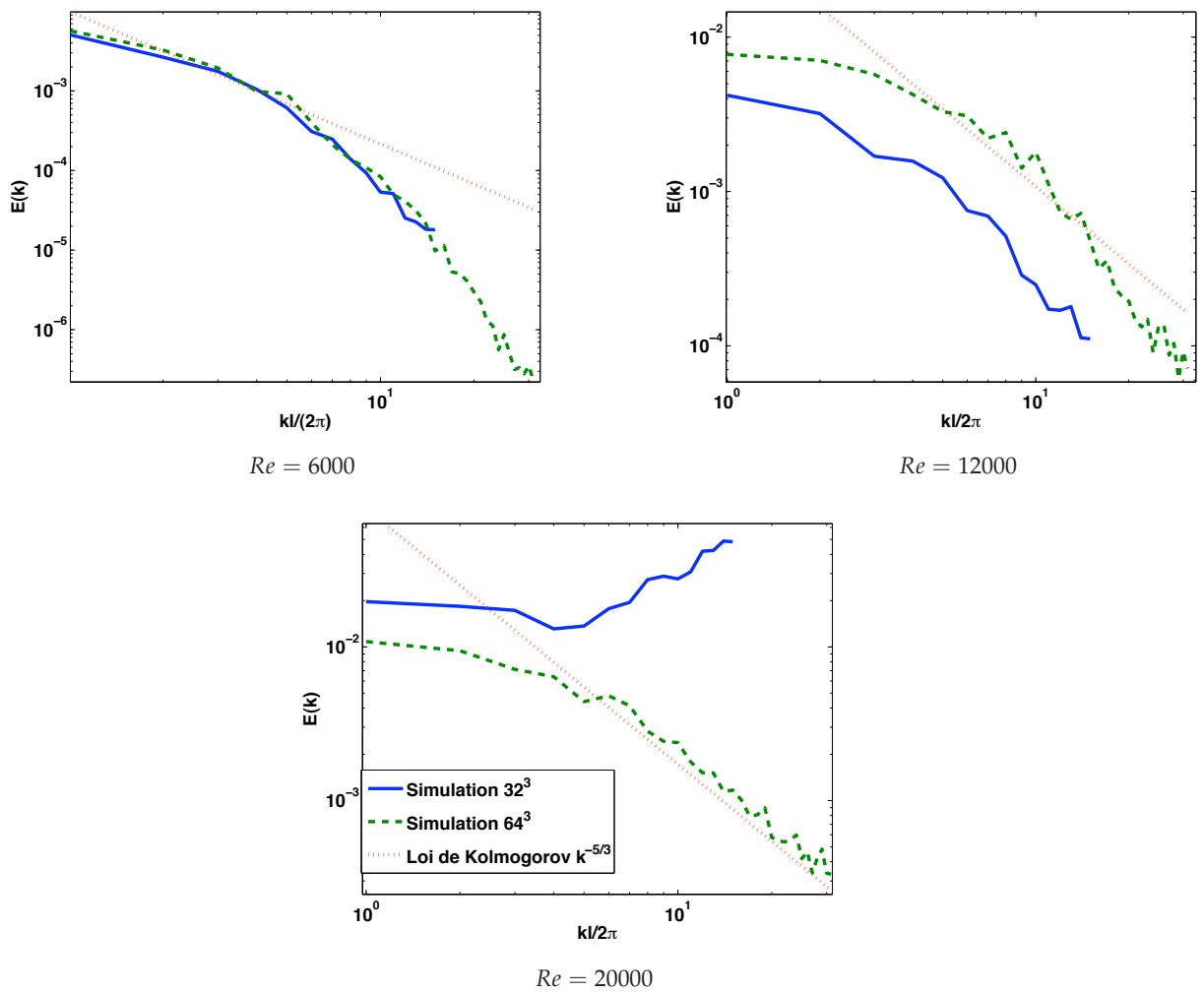
### § 54.3. Transport et modèle phénoménologique

Le modèle phénoménologique proposé précédemment suppose que le transport a lieu essentiellement aux grandes échelles, dans le mécanisme d'auto-entretien. C'est ce modèle phénoménologique, combiné avec nos résultats numériques (Fig. 54) qui permet d'obtenir une estimation du transport dans les disques.

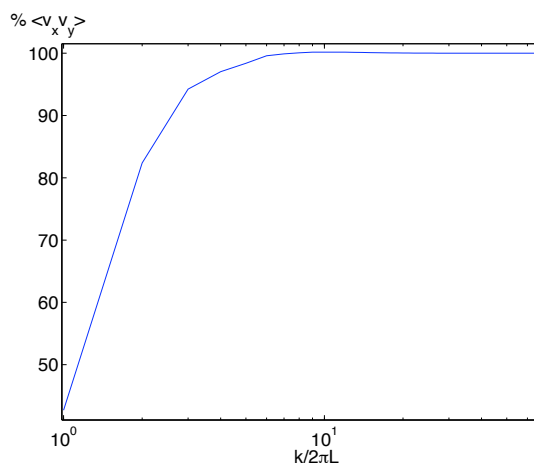
Un modèle alternatif serait d'imaginer un mécanisme d'entretien de plus en plus efficace lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, de sorte que le transport soit plus efficace que prévu dans les disques à très grands Reynolds. Ceci se traduirait par un mécanisme d'auto-entretien de plus en plus large spectralement, s'étendant de l'échelle de boîte  $L$  jusqu'aux plus petites échelles de dissipation  $l_\eta$ . On peut cependant objecter à ce modèle trois contre-arguments importants. Premièrement, remarquons qu'un mécanisme d'auto-entretien nécessite forcément des mouvements en phase sur différentes échelles. Un mécanisme très étalé spectralement tout en étant efficace sur tout le domaine spectral nécessiterait donc une très forte corrélation temporelle sur des échelles variant d'un facteur  $10^5$ , ce qui semble peu plausible. Deuxièmement, les expériences de Dubrulle *et al.* (2005a) mettent en avant un couple en  $Re^2$  dans les écoulements de Couette-Taylor en turbulence totalement développée, ce qui correspond à un  $\alpha$  indépendant du Reynolds. Enfin, on peut remarquer que le transport moyen peut s'écrire à l'aide des modes Fourier sous la forme :

$$\langle v_x v_y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{v}_x(k_n) \tilde{v}_y^*(k_n) \quad (54.198)$$

Cette égalité nous permet de calculer la contribution de chaque échelle  $k_n$  au transport total observé dans une simulation. Ce type de calcul est donné sur la figure (58) sur laquelle on a représenté la contribution au transport total des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$ , pour une simulation avec une résolution de  $128^3$  et un nombre de Reynolds de  $2 \times 10^4$ . On peut ainsi

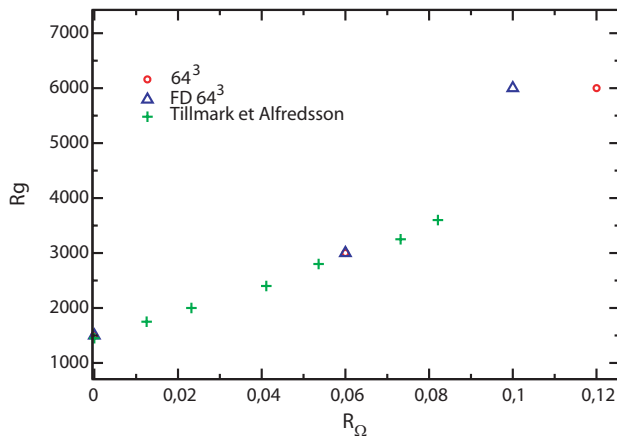


**FIG. 57.** Spectres d'énergie pour deux résolutions différentes. On donne en pointillés rouges la pente correspondant au spectre de Kolmogorov. La simulation à  $32^3$  n'est résolue que pour  $Re = 6000$ . La simulation  $64^3$  est résolue pour  $Re = 6000$  et  $Re = 12000$  et. Spectres obtenus pour  $R_\Omega = -1.016$ .



**FIG. 58.** Représentation de la contribution des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$  au transport total (en %). On remarque que 90% du transport est dû à des échelles de taille supérieure à  $1/4$  de la taille de boîte. D'après une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $128^3$ .

observer que, bien que l'on soit très proche du seuil d'après la figure (53), le transport reste dominé par les plus grandes échelles disponibles dans la boîte de simulation.



**FIG. 59.** Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation d'après les données de Tillmark & Alfredsson (1996) et nos données de simulations spectrales (cercles) et différences finies (triangle). Les simulations de Komminaho *et al.* (1996) se superposent au point  $R_\Omega = 0,06$ ,  $R_g = 3000$  et n'ont pas été représentés sur la figure.

Ces trois arguments montrent que, bien que non définitivement rejeté, l'argument d'un transport fort aux très petites échelles semble très peu probable, et ne permet donc pas d'utiliser la turbulence sous-critique comme explication au transport dans les disques astrophysiques.

## § 55. Comparaison avec les résultats antérieurs

Comme nous l'avons dit précédemment, d'autres simulations et expériences ont été effectuées avant ce travail, et il convient donc de les comparer et éventuellement expliquer les divergences de comportement. Concernant les résultats numériques de Hawley *et al.* (1999), nous avons montré qu'ils étaient parfaitement reproductibles sans dissipation [panneau de gauche de la figure (49)]. L'effet de coupure qu'ils observaient étant un effet de résolution identique à ce que nous avons observé et expliqué sur la figure (53). En particulier, on remarquera que leurs résultats (Fig. 49) correspondent à ce que l'on observe sur nos simulations avec un Reynolds  $Re = 12000$ .

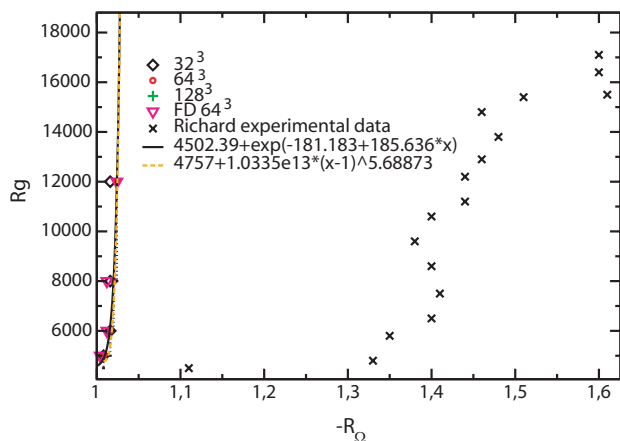
### § 55.1. Côté cyclonique

Parmi les résultats du côté cyclonique, on peut citer ceux de Tillmark & Alfredsson (1996), tirés de résultats expérimentaux sur un écoulement de Couette plan tournant, ainsi que Komminaho *et al.* (1996), sur des simulations de Couette plan, dont une faite avec rotation. On a reporté ces résultats expérimentaux et numériques sur la figure (59), superposés aux premiers points de nos propres résultats (Fig. 52). Comme on peut le remarquer, l'accord obtenu entre ces différents résultats, en présence de conditions aux limites différentes est remarquablement bon. Notons que l'on ne peut utiliser les résultats de Richard (2001) en raison de la forte influence de la courbure sur la turbulence de côté cyclonique (voir § 50.1).

### § 55.2. Côté anticyclonique

Les résultats du côté anticyclonique sont beaucoup plus rares dans la littérature. D'un point de vue expérimental, il est assez difficile d'explorer le régime anticyclonique linéairement stable en raison des fortes vitesses de rotation nécessaires. Ainsi, il n'existe pas à notre connaissance d'expérience d'écoulement de Couette plan tournant dans ce régime. On peut cependant noter les résultats de Richard (2001) dans un écoulement de Couette-Taylor, apparemment





**FIG. 60.** Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation d'après les données de Richard (2001) et nos données de simulations spectrales (losanges, cercles et croix) et différences finies (triangle inversé). La croissance de  $R_g$  en fonction de  $R_\Omega$  semble beaucoup plus importante pour nos simulations que pour les données de Richard.

peu modifiés par la présence de courbure (§ 50.1). Nous avons donc superposé les résultats expérimentaux anticycloniques (Fig. 48) avec nos résultats (Fig. 53) sur la figure (59).

On remarque immédiatement que, contrairement au côté cyclonique, le désaccord entre transition expérimentale et numérique est extrêmement fort. En particulier, les expériences donnent une transition sous-critique au régime képlerien pour  $Re \simeq 4000$  alors que les simulations extrapolées prédisent une transition vers  $Re \simeq 10^8$ . Ces différences peuvent être expliquées par plusieurs biais, parmi lesquels on retrouve :

**Rôle des conditions aux limites:** Les simulations ont toutes été effectuées avec des conditions aux limites type shearing sheet, assez différentes des conditions type murs utilisées dans les expériences.

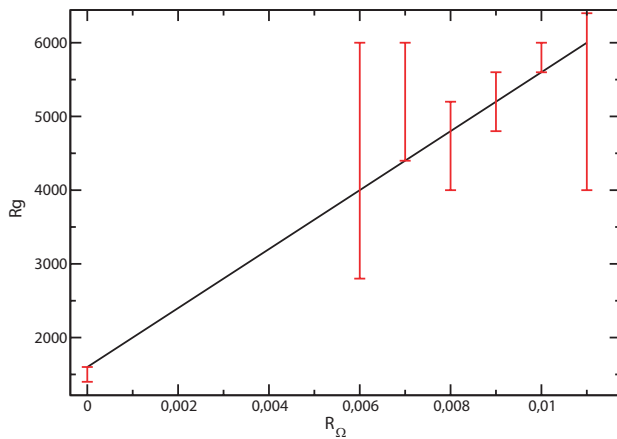
**Rapport d'aspect:** Les simulations mettent en jeu des boîtes de taille relativement modeste. On peut donc s'attendre à ce que ces boîtes limitent le développement de la turbulence, ou la supprime.

**Conditions initiales:** Bien qu'*a priori* maîtrisées par notre protocole numérique, nous n'avons pas pu tester toutes les conditions initiales possibles. Les expériences, avec leur bruit naturel, accèdent donc à un éventail plus large de conditions initiales.

**Circulation d'Ekman:** Les conditions aux limites verticales ne peuvent être maîtrisées parfaitement dans les expériences de Couette-Taylor (elles supposeraient en effet l'usage d'un mur dont la vitesse dépend de la position!). Les conditions aux limites utilisées en pratique engendrent donc naturellement un écoulement secondaire d'Ekman, propice à la formation de turbulence « artificielle »

**Bruit de manipulation:** Les expériences du côté anticyclonique mettant en jeu de grandes vitesses de rotation, il n'est pas exclu d'observer une turbulence apparente engendrée par des artefacts de la manipulation.

Cette liste est bien entendu non exhaustive, mais est représentative des différentes remarques pouvant être apportées à ce travail. Je vais donc étudier ces diverses possibilités, et je fournirai quelques indices sur les raisons probables de la cohérence des résultats observés sur la figure (60).



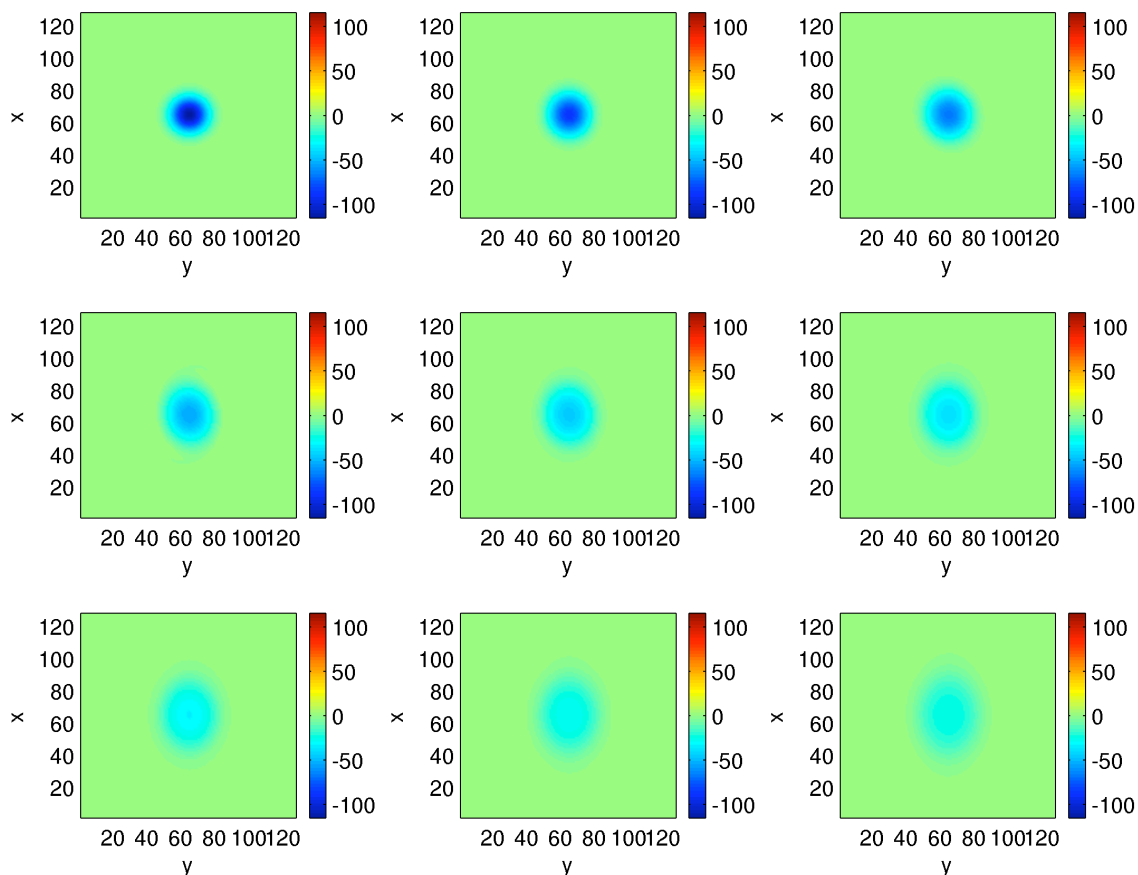
**FIG. 61.** Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation dans un écoulement de Couette plan avec murs. Le rapport d'aspect utilisé est  $L_x = 1,75\pi$   $L_y = 1$   $L_z = 1,2\pi$  et la résolution  $40 \times 80 \times 40$  avec Zeus3D.

### § 56. Conditions aux limites et rapport d'aspect

Le rôle des conditions aux limites dans les simulations est assez difficile à détecter, notamment en raison de l'utilisation d'un code spectral avec lequel il n'est pas possible de les modifier. Remarquons cependant que les résultats de la figure (59) sont obtenus avec soit des conditions aux limites de type shearing sheet (résultats spectraux), soit avec des murs (Tillmark & Alfredsson 1996; Komminaho *et al.* 1996). De plus, les simulations de Komminaho *et al.* (1996) utilisent des boîtes très étendues dans les directions  $x$  et  $z$ , de sorte que le rapport d'aspect ne doit pas intervenir dans leur résultat. Il semble donc que, du côté cyclonique du moins, les simulations numériques en conditions shearing sheet donnent des résultats similaires à ceux avec des murs, et ce pour des rapports d'aspect quelconques ( $1 \times 1 \times 1$ ).

Cependant, le rapport d'aspect joue un rôle lors de l'utilisation de conditions aux limites type murs. On peut ainsi observer sur la figure (61) la courbe de transition obtenue pour un écoulement de Couette plan tournant, avec une résolution de  $40 \times 80 \times 40$  et un rapport d'aspect<sup>19</sup> constant de  $L_x = 1,75\pi$   $L_y = 1$   $L_z = 1,2\pi$  avec Zeus3D. On pourra en particulier remarquer que la pente de la transition ainsi obtenue est approximativement 4 fois plus importante que celle obtenue sur la figure (59). On comprend donc que le rapport d'aspect semble jouer un rôle important lorsque l'on utilise des murs, mais pas avec des conditions shearing sheet (on dira en ce sens que le shearing sheet est plus permissif pour le rapport d'aspect). Enfin, notons qu'en adaptant le rapport d'aspect dans les simulations avec murs, on peut ramener la transition aux valeurs expérimentales (Lesur 2004). Ce type de procédure est malheureusement très coûteux en temps de calcul et n'a pu être expérimenté au delà du simple test.

Enfin, du côté anticyclonique, il ne nous a pas été possible d'obtenir la transition vers la turbulence avec des murs. Ce résultat est cohérent avec l'analyse non linéaire de Rincon *et al.* (2007), mettant en avant l'absence de mécanisme identique à celui décrit par Waleffe (1997) dans les écoulements anticycloniques avec murs.



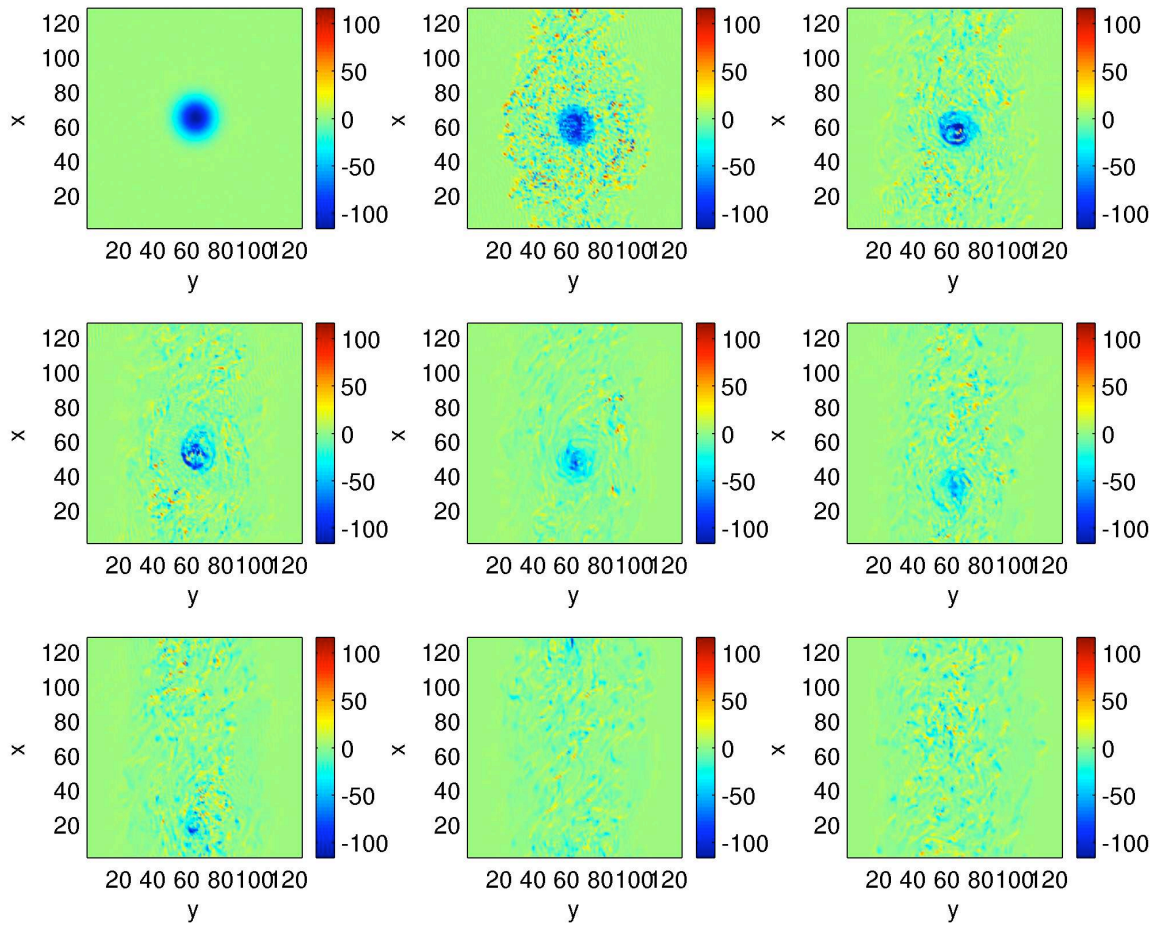
**FIG. 62.** Représentation de la vorticité de l'écart à l'écoulement laminaire tous les 20 temps de cisaillement. On observe l'évolution d'un vortex vertical dans un écoulement de Couette tournant. L'écoulement est ici purement bidimensionnel et le vortex est dissipé visqueusement.

### § 57. Conditions initiales

Les conditions initiales utilisées dans notre protocole étaient une excitation aléatoire aux grandes échelles. Cependant, le protocole utilisé permet d'obtenir une évolution progressive du fluide vers le seuil de transition, les conditions initiales sont ainsi « oubliées » par l'écoulement, et on peut estimer que le seuil de transition observé est indépendant des conditions initiales choisies.

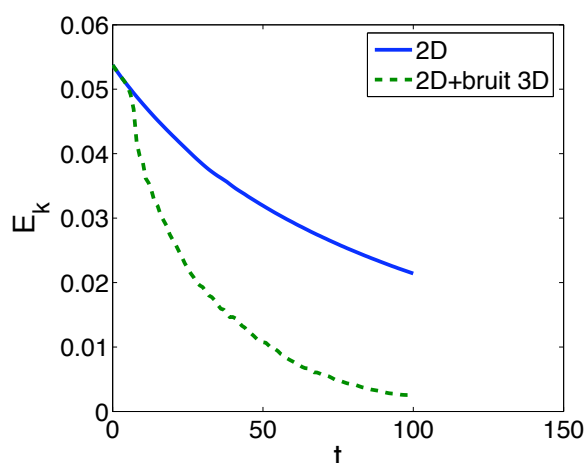
Cependant, de nombreuses simulations ont mis en avant la possibilité d'obtenir des vortex au temps de survie assez long. En 2D, les simulations de Umurhan & Regev (2004) mettent en évidence un effet d'excitation non linéaire de vortex dans les disques. La formation de vortex est aussi étudiée en 3D par Barranco & Marcus (2005) dans le cadre de simulations stratifiées dans lesquelles les vortex semblent survivre. Ces propositions sont en particulier basées sur une analogie avec la grande tache rouge de Jupiter (voir Barranco & Marcus 2005 et Marcus 1993 pour plus de détails sur cette analogie).

<sup>19</sup>Il s'agit du rapport d'aspect utilisé dans les simulations de Couette plan de Hamilton *et al.* (1995), voir § 43.

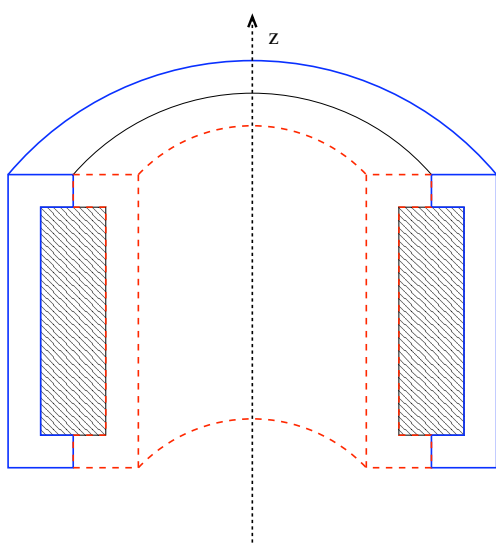


**FIG. 63.** Représentation de la vorticité de l'écart à l'écoulement laminaire tous les 20 temps de cisaillement. La condition initiale est identique à la figure (62), auquel on a ajouté un très faible bruit blanc (non visible sur la figure  $t = 0$ ). On observe l'accroissement de l'amplitude des perturbations et la destruction rapide du vortex par des mouvements 3D.

J'ai voulu tester l'hypothèse d'un vortex source d'instabilité non linéaire, telle qu'elle est avancée par Umurhan & Regev (2004). Plutôt que d'injecter un bruit aléatoire, j'ai donc injecté un vortex vertical dans une boîte *quasi* bidimensionnelle ( $L_x = 1, L_y = 1, L_z = 0, 1$ ) et une résolution de  $128 \times 128 \times 16$  placée dans un régime képlerien ( $R_\Omega = -4/3$ ). Dans un premier temps, le vortex est injecté seul dans la simulation, et est naturellement dissipé visqueusement au cours du temps (Fig. 62). Nous refaisons alors la même expérience en ajoutant un faible bruit blanc tridimensionnel (Fig. 63). On voit très vite que les perturbations 3D au voisinage du vortex s'amplifient et détruisent la structure cohérente de ce dernier. Ce phénomène peut être vu sous son aspect énergétique sur la figure (64) : on remarque que le bruit blanc initialement très faible comparativement à l'amplitude du vortex entraîne une dissipation accélérée de l'énergie, par un phénomène qui peut s'apparenter à une cascade turbulente. Nous avons tenté de modifier



**FIG. 64.** Évolution des fluctuations d'énergie des simulations des figures (62) et (63). La vitesse de dissipation, identique durant les premiers temps de cisaillement, devient beaucoup plus rapide dans la simulation avec bruit : la structure cohérente du vortex est donc détruite par les mouvements 3D.



**FIG. 65.** Schéma d'un type de conditions aux limites utilisées dans les expériences de Richard (2001) : il s'agit d'une coupe dans le plan  $(r, z)$  du dispositif de Couette-Taylor (Fig. 44). Le fluide est représenté en hachures, le cylindre extérieur en trait plein et le cylindre intérieur en tirets. Les cylindres entraînent chacun une partie des murs servant de condition aux limites verticales.

la cyclonicité du vortex ainsi que son amplitude, sans changer qualitativement les résultats présentés ici.

On le voit, au moins dans le cas non stratifié, l'utilisation de vortex bidimensionnels pour justifier une instabilité sous-critique semble assez compromise. On pourra ainsi noter la destruction extrêmement rapide de ces grosses structures, malgré un rapport d'aspect largement favorable à la formation de ces dernières.

## § 58. Circulation d'Ekman

Dans les expériences de Couette-Taylor, il est difficile d'obtenir des conditions aux limites aux bords des cylindres qui ne perturbent pas l'écoulement laminaire. Dans les expériences de Richard (2001), différentes possibilités sont étudiées, et la solution la moins perturbatrice semble être l'utilisation de deux demi-cylindres (Fig. 65). Cette condition aux limites induit un écoulement parasite. En effet, le fluide proche des conditions aux limites verticales est entraîné visqueusement par ces dernières : il acquiert donc une vitesse azimutale différente du profil laminaire théorique. La force de Coriolis agit alors en engendrant un déplacement radial de ce fluide : c'est la formation d'une circulation d'Ekman (Tritton 1992).

Naturellement, on peut s'attendre à ce que cette circulation ait des effets néfastes sur la détection de la turbulence. En particulier, elle pourrait exciter artificiellement l'écoulement et faire apparaître des mouvements parasites. Pour tester l'influence réel de l'écoulement d'Ekman, j'ai donc essayé d'introduire dans une simulation de Couette plan les mêmes conditions aux limites que celles utilisées sur l'écoulement de Couette-Taylor (65).

Ainsi, j'ai simulé cet écoulement de Couette plan dans des conditions similaires à celles utilisées par Richard (2001). En particulier, je prends un Reynolds de 6000, et un rapport d'aspect de  $L_x = 6, L_y = 1, L_z = 10$ . Le rapport  $L_z/L_y$  correspondant à ce qui était utilisé dans les expériences. La résolution utilisée est de  $256 \times 64 \times 256$  et la simulation a été effectuée pendant 400 temps de cisaillement. On obtient alors typiquement une coupe correspondant à la figure (66).

Cette simulation montre l'apparition de deux petits « jets », résultats de la circulation d'Ekman sur les limites inférieures et supérieures de la boîte<sup>20</sup>. De plus, on notera que les perturbations dues à la circulation n'engendrent pas de mouvements notables dans le centre de l'écoulement : il ne semble donc pas que les conditions aux limites soient une source importante de turbulence. Enfin, les perturbations engendrées par ces conditions aux limites sont très faibles, et engendrent un transport « parasite » d'environ  $5 \times 10^{-5}$ , bien trop faible pour pouvoir expliquer les résultats expérimentaux.

Il faut cependant remarquer que cette simulation relève plutôt du simple test que de l'argument démontré. On peut en effet envisager des effets de rapport d'aspect, de courbure ou encore de résolution pouvant modifier le résultat de cette simulation. On pourra donc conclure que l'effet d'une circulation d'Ekman parasite n'est pas démontré, et nécessitera des arguments solides pour expliquer le désaccord entre résultats numériques et résultats expérimentaux.

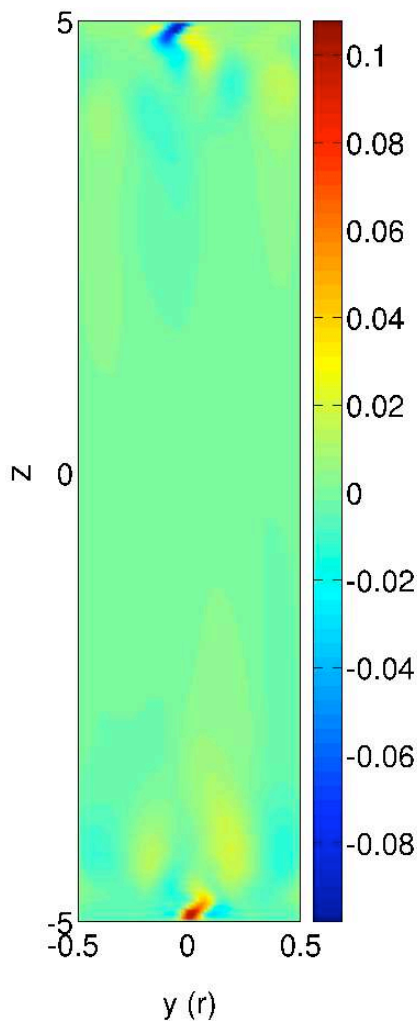
### 3. Conclusions

Les résultats de ce chapitre me permettent d'apporter les conclusions suivantes sur le rôle de la turbulence sous-critique dans les disques d'accrétion astrophysiques :

- On ne peut pas, à l'heure actuelle, trancher sur l'existence ou non d'une instabilité sous-critique hydrodynamique dans les disques en raison du Reynolds très élevé de ces écoulements, qui ne peut être reproduit ni numériquement, ni en laboratoire.
- Si elle existe, l'instabilité sous-critique ne permet pas d'expliquer le transport observé dans les disques d'accrétion, même dans les limites basses (voir introduction). En pratique, on a  $\alpha_{SS} < 3 \times 10^{-4}$ .
- Le Reynolds de transition dans le régime sous-critique est corrélé au transport turbulent, conformément à notre modèle phénoménologique.

Postérieurement à ce travail, des expériences hydrodynamiques ont été effectuées avec un dispositif de Couette-Taylor, similaire à celui de Richard, à l'université de Princeton (Ji *et al.* 2006). Ces expériences ont abouti aux mêmes conclusions que mes travaux et n'ont pas permis de détecter la turbulence en régime Képlerien. Notons néanmoins que ces expériences avaient un nombre de courbure plus élevé que Richard (2001), ce qui pourrait expliquer une partie de ce résultat contradictoire (voir § 50.1). Par ailleurs, les conditions aux limites verticales utilisées par

<sup>20</sup>Ce phénomène est aussi connu sous le nom de « feuille de Stewartson ».



**FIG. 66.** Tracé de la vitesse verticale dans une coupe  $(y, z) = (r, z)$  pour  $Re=6000$  avec les conditions aux limites de Richard (2001) à  $t = 400S^{-1}$ . NB : le rapport d'aspect n'est pas respecté pour des raisons de facilité d'impression.

Ji *et al.* (2006) sont une version améliorée des conditions de Richard (2001), permettant de réduire de manière notable la circulation d'Ekman.

Tous ces résultats tendent à montrer que les expériences de Richard (2001) ont été biaisées par un phénomène parasite pouvant être dû à du bruit de manipulation, un effet de conditions aux limites ou tout autre effet non envisagé jusqu'à présent.

Comme on a pu le voir dans ce chapitre, la turbulence sous-critique dans les disques est un problème sujet à de nombreuses controverses. J'ai essayé de présenter ici mes résultats tout en étudiant la plupart des biais qui sont habituellement discutés. Il va de soit que je n'ai pas pu étudier toutes les possibilités, pour des raisons de temps et de faisabilité numérique. J'espère néanmoins que le lecteur y trouvera un tour d'horizon assez complet pour pouvoir se faire sa propre idée sur la question.

