

Partie V

Instabilité magnéto-rotationnelle

10	Champ magnétique et stabilité des disques	145
11	Etude numérique de l'instabilité magnéto-rotationnelle	159

10

Champ magnétique et stabilité des disques

« La réalité, c'est ce qui fait mal
quand on éteint l'ordinateur »

— J. Warsen

L'ordinateur en un clique

Plan du chapitre

1. Une instabilité MHD dans les disques?	145
§ 71. Origines	145
§ 72. Description phénoménologique	146
2. Analyse linéaire en présence d'un champ magnétique vertical	147
§ 73. Dérivation d'une relation de dispersion pour les modes axisymétriques	147
§ 74. Nombres sans dimensions	149
§ 75. Limite sans dissipation	150
§ 75.1. Étude formelle	150
§ 75.2. Implications pour les disques et les simulations	151
§ 76. MRI avec dissipation	152
§ 76.3. Cas $P_m = 1$	152
§ 76.4. Cas général	153
§ 77. Conclusion	157

1. Une instabilité MHD dans les disques?

§ 71. Origines

LA POSSIBILITÉ QU'UN CHAMP MAGNÉTIQUE AIT UNE INFLUENCE sur la dynamique des disques d'accrétion a été avancée dès les années 60 par Lynden-Bell (1969). Cependant, cette hypothèse a été négligée durant un certain nombre d'années, au profit de mécanismes de transport hydrodynamiques, jusqu'à la découverte d'une instabilité due au couplage entre un disque et un champ magnétique par Balbus & Hawley (1991a). Par la suite, cette instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) a été longuement étudiée analytiquement et numériquement. On suppose aujourd'hui qu'elle est la source principale du

transport dans les disques d'accrétion magnétisés, ce qui en fait un sujet d'étude de choix pour la compréhension et la modélisation de la dynamique des disques d'accrétion.

L'existence d'une instabilité linéaire *a priori* simple a permis d'effectuer assez rapidement des simulations numériques locales bidimensionnelles (Balbus & Hawley 1991b) puis tridimensionnelles (Hawley *et al.* 1995; Stone *et al.* 1996). Par la suite, des simulations globales de disques d'accrétions couplées à des champs magnétiques ont été obtenues grâce à des moyens numériques plus conséquents (Hawley 2000). Enfin, l'aspect énergétique de cette instabilité a été étudié par Gardiner & Stone (2005), et a permis de mettre en évidence le chauffage dû à la turbulence pour différentes topologies du champ magnétique.²⁴

De manière assez surprenante, ces travaux numériques n'incluaient pas de terme de dissipation d'énergie de nature physique (par exemple viscosité et résistivité moléculaire), la dissipation de la turbulence étant alors due soit aux termes de dissipation artificielle (cas du code Zeus3D par exemple), soit aux approximations de grilles utilisées (codes Godunov). Remarquons cependant que plusieurs travaux numériques ont introduit des termes de dissipation. Citons ainsi Brandenburg *et al.* (1995), où la dissipation physique restait maintenue à un niveau extrêmement faible (100 fois plus faible que la dissipation artificielle), et Fleming *et al.* (2000) où seul un terme de résistivité physique était introduit (la dissipation visqueuse étant alors numérique). Ce manque d'intérêt vis-à-vis des phénomènes dissipatifs dans des écoulements, pourtant hautement turbulents, n'est pas spécifique à ce problème, comme je l'ai montré dans la partie consacrée à la turbulence sous critique. Néanmoins, « l'oubli » des termes de dissipations pose la question de la convergence des simulations numériques. En effet, comme la dissipation est contrôlée par la taille de grille, cette dernière devient *nécessairement* un paramètre physique, ce qui ne peut en aucun cas impliquer la convergence numérique²⁵. Comme je le montrerai, ce point négligé dans les travaux précédents s'avère avoir un rôle capital dans la saturation de la MRI.

Notons d'autre part que ces études ont été systématiquement effectuées avec des champs magnétiques relativement faibles ($\beta > 100$). On peut néanmoins s'interroger sur le comportement de cette instabilité lorsque le champ magnétique est fort, c'est à dire lorsque la pression magnétique est voisine de la pression thermique. Ce point présente un fort intérêt pour les modèles d'accrétion-éjection tel que celui développé par Ferreira & Pelletier (1995) où l'une des contraintes associées à l'éjection est l'équipartition entre énergie thermique et magnétique.

§ 72. Description phénoménologique

Avant d'effectuer tout calcul d'instabilité, il est intéressant de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu par la MRI. Pour cela, je vais utiliser une description qualitative de cette instabilité tirée de Balbus & Hawley (2003). considérons un disque non dissipatif traversé par un champ magnétique vertical B (Fig. 73). On déplace initialement deux particules fluides radialement de part et d'autre de leur point d'origine. Les particules fluides conservant leur

²⁴Le chauffage étant, dans ces travaux, dû à la dissipation aux voisinages de chocs par une méthode de Godunov, ce qui est assez éloigné de la notion classique de viscosité et résistivité moléculaire.

²⁵Rappelons que la convergence numérique signifie que la simulation devient indépendante de la résolution. En pratique, on dira qu'une simulation est convergée lorsque une augmentation de la résolution ne modifie pas le résultat physique.

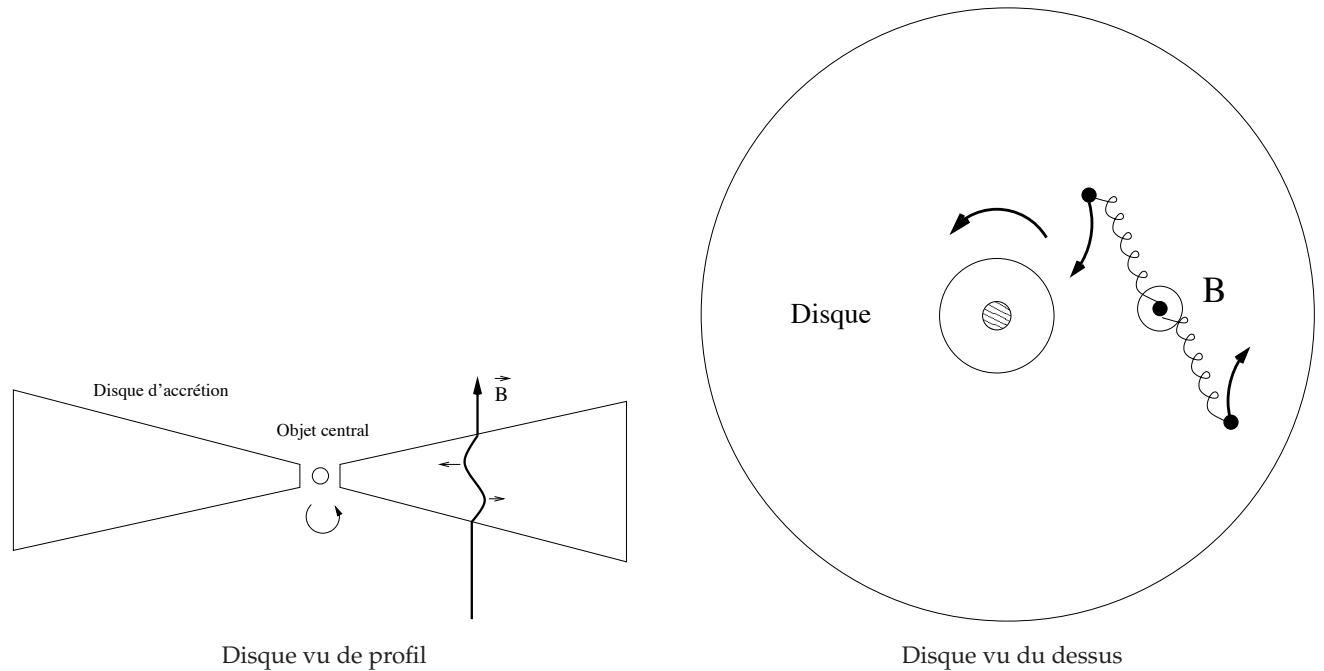


FIG. 73. Schéma de principe à l'origine de l'instabilité magnétorotationnelle. La torsion du champ ou le déplacement du fluide tend à ramener le fluide vers sa position initiale (similaire à l'action d'un ressort). Le mouvement peut s'amplifier si $\partial_r \Omega < 0$ (voir texte).

moment cinétique, la particule interne voit sa vitesse angulaire augmenter et inversement pour la particule externe. De plus, ce déplacement tord la ligne de champ B qui est fixée aux particules fluides (MHD idéale). Cette torsion induit donc un couple de rappel qui tend à ramener les particules fluides vers leur état initial : la particule intérieure est ralentie et la particule extérieure est accélérée. Si $\partial_r |\Omega| < 0$ la particule intérieure peut acquérir une vitesse inférieure à la vitesse locale du fluide : elle tombe alors vers l'intérieur et le déplacement s'amplifie (le phénomène inverse est applicable à l'extérieur). On voit alors avec cette analyse que la condition de stabilité est

$$\partial_r |\Omega| > 0. \quad (72.283)$$

Cette limite est fondamentalement différente du critère de stabilité Rayleigh $\partial_r |r^2 \Omega| > 0$ et permet de rendre instable les disques Képlérien comme nous allons voir par la suite.

2. Analyse linéaire en présence d'un champ magnétique vertical

§ 73. Dérivation d'une relation de dispersion pour les modes axisymétriques

La relation de dispersion que je dérive ici n'est pas fondamentalement nouvelle. En effet, on retrouvera les résultats que je présente dans le cas non dissipatif dans Balbus & Hawley (1991a). De plus, dans le cas faiblement ionisé, on pourra considérer les calculs de Blaes & Balbus (1994), Wardle (1999) et Balbus & Terquem (2001), faisant intervenir différents types de dissipation du champ magnétique (Loi d'Ohm, effet Hall,...). C'est ce type d'approche qui permet de mettre en évidence le problème de la *dead zone* (Gammie 1996), zone trop faiblement couplée au champ magnétique pour déclencher la MRI, déjà évoqué dans la partie 3 de ce manuscrit. Par ailleurs,

la recherche de la MRI en laboratoire a conduit un certain nombre d'auteurs à considérer à la fois les termes de viscosité et de résistivité dans la relation de dispersion (Ji *et al.* 2001; Rüdiger & Shalybkov 2002). Enfin, on pourra trouver des résultats de stabilité linéaire en conditions stratifiées, en présence de résistivité, viscosité et conductivité thermique dans Menou *et al.* (2004). Il semble cependant qu'aucune de ces relations n'ait permis de mettre en avant des limites formelles claires en fonction des coefficients de dissipation. Aussi, je propose ici un calcul complet de la MRI dans l'approximation non stratifiée, incompressible et axisymétrique, faisant intervenir à la fois une viscosité et une résistivité ohmique.

Pour dériver la relation de dispersion, on se place dans l'approximation du modèle local de Hill (§ 9, p. 22), où l'on néglige le terme de stratification. On écrit alors les équation (9.53) et (9.54) pour la vitesse \mathbf{u} et le champ magnétique \mathbf{B} sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{\nabla P}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + 2\Omega S y \mathbf{e}_y + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (73.284) \\ \partial_t \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

dans lesquelles sont définies la viscosité cinématique moléculaire ν et la résistivité moléculaire η . Dans la suite, je me concentrerai sur l'évolution de perturbations axisymétriques infiniment petites par rapport à l'écoulement laminaire. Pour ce faire, nous noterons \mathbf{v} les déviations à l'écoulement laminaire sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{u} - S y \mathbf{e}_x$ où S est le cisaillement de l'écoulement moyen. De plus, je supposerai que le disque est baigné dans un champ magnétique vertical uniforme $B_0 \mathbf{e}_z$ et on notera les déviations infinitésimales du champ magnétique $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{b}$. En linéarisant le système précédent, il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla \psi - 2\Omega v_x \mathbf{e}_y + (2\Omega - S) v_y \mathbf{e}_x + \frac{B_0}{4\pi\rho} \partial_z \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (73.285) \\ \partial_t \mathbf{b} &= B_0 \partial_z \mathbf{v} + b_y S \mathbf{e}_x + \eta \Delta \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

où l'on a défini la pression effective $\psi = P/\rho + B_0 b_z/\rho$. Le système d'équation (73.285) étant homogène, on peut utiliser une décomposition en modes de Fourier en notant $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp [i(\omega t - k_y y - k_z z)]$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp [i(\omega t - k_y y - k_z z)]$, ce qui nous permet d'obtenir le système

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu k^2) \mathbf{v}_0 &= i \mathbf{k} \psi - i k_z \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \mathbf{b}_0 + (2\Omega - S) v_y \mathbf{e}_x - 2\Omega v_x \mathbf{e}_y \quad (73.286) \\ (i\omega + \eta k^2) \mathbf{b}_0 &= -i k_z B_0 \mathbf{v} + b_y S \mathbf{e}_x \\ i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ i \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

La recherche de solutions non triviales nous permet d'obtenir la relation de dispersion. En définissant $\omega_\nu \equiv \omega - i\nu k^2$ et $\omega_\eta \equiv \omega - i\eta k^2$, la vitesse d'Alfvén $V_A^2 = B_0^2/4\pi\rho$, la fréquence

épicyclique $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega - S)$ et $\gamma^2 = k_z^2/k^2$, on obtient la relation de dispersion sous la forme :

$$(\omega_v \omega_\eta - k_z^2 V_A^2) \left(\omega_v^2 \omega_\eta^2 - 2\omega_v \omega_\eta k_z^2 V_A^2 - \omega_\eta^2 \kappa^2 \gamma^2 - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right) = 0 \quad (73.287)$$

que l'on résoudra dans différents domaines d'approximations.

§ 74. Nombres sans dimensions

Le système d'équations (73.285) permet de définir une série de nombres sans dimension, caractéristiques du problème, à condition de disposer d'une échelle de longueur (fixée par les conditions aux limites). On définit donc une échelle de hauteur de verticale H , correspondant physiquement à l'échelle verticale de stratification du disque, et numériquement à la taille verticale de la boîte de simulation. On utilise alors :

Le nombre de Reynolds: Déjà utilisé précédemment, il compare le terme d'advection du champ de vitesse au terme de dissipation visqueuse :

$$Re = \frac{SH^2}{\nu} \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{\nu \Delta \mathbf{u}}$$

Le nombre de Reynolds magnétique: Par analogie avec le Reynolds hydrodynamique, on définit un Reynolds magnétique comparant le transport du champ magnétique aux effets de résistivité :

$$Rm = \frac{SH^2}{\eta} \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\eta \Delta \mathbf{B}}$$

Le nombre de Prandtl magnétique: Ce nombre sans dimension n'est pas indépendant des deux précédents. Cependant, comme on le verra par la suite, il permet de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes physique intéressants pour l'astrophysicien. Il se définit comme étant le rapport des coefficients de dissipation visqueux et résistifs, ce que l'on écrira sous la forme :

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} = \frac{Rm}{Re}$$

Le coefficient de plasma: En MHD, on définit couramment le coefficient de plasma comme étant le rapport des pressions thermique et magnétique. Cette étude étant incompressible, on ne peut pas utiliser une telle définition. J'utiliserai donc une définition légèrement différente, de telle sorte que le coefficient de plasma compare les effets de transport hydrodynamique et la force de Lorentz, ce que j'écrirai :

$$\beta = \left(\frac{SH}{V_A} \right)^2 \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / 4\pi\rho}$$

Remarquons que cette définition du coefficient de plasma est identique, à un facteur de l'ordre de l'unité près, à la définition classique, si l'on suppose que le disque d'accrétion est en équilibre hydrostatique vertical de sorte que $SH \simeq c_s$ où c_s est la vitesse du son.

Le nombre de rotation: Ce nombre, utilisé abondamment dans notre étude hydrodynamique, compare la force de Coriolis aux termes de transport hydrodynamique :

$$R_\Omega = -\frac{2\Omega}{S}$$

Dans cette partie, il sera systématiquement fixé à $R_\Omega = -4/3$ pour obtenir un écoulement Képlerien.

§ 75. Limite sans dissipation

§ 75.1. Étude formelle

Avant d'étudier l'influence des termes dissipatifs, je vais rappeler les principaux résultats concernant la MRI dans la limite de la MHD idéale. Dans cette, limite, l'équation précédente s'écrit simplement :

$$(\omega^2 - k_z^2 V_A^2) \left[\omega^4 - \omega^2 (2k_z^2 V_A^2 + \kappa^2 \gamma^2) - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right] = 0 \quad (75.288)$$

On remarquera dans un premier temps la solution Alfvénique triviale $\omega = \pm k_z V_A$. L'annulation du second polynôme de l'équation de dispersion nous permet d'obtenir :

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 + \frac{\kappa^2 \gamma^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^4 \gamma^4 + 16k_z^2 V_A^2 \Omega^2 \gamma^2} \quad (75.289)$$

Remarquons qu'un critère d'instabilité nécessaire et suffisant est d'avoir $\Im m(\omega) < 0$, ou de manière équivalente $\omega^2 < 0$. Ainsi, dans le cas d'un disque d'accrétion ($\kappa^2 > 0$), on utilisera la deuxième solution (solution $(-)$) pour trouver l'instabilité recherchée. De plus, on remarquera que l'instabilité est d'autant plus forte que γ est proche de 1. On posera donc dans la suite $\gamma = 1$ par simplicité.

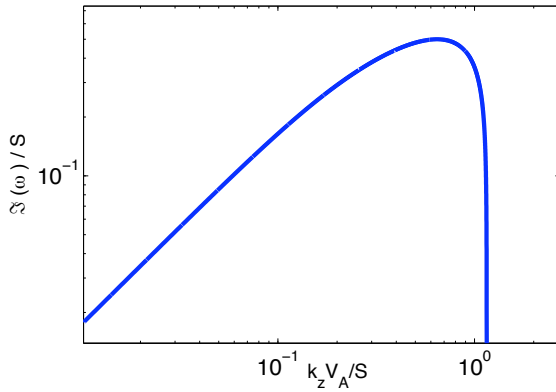


FIG. 74. Tracé du taux de croissance de la MRI en régime képlerien en fonction de la pulsation d'Alfvén $k_z V_A$. On remarque que cette instabilité apparaît pour des pulsations comprises entre 0 et $\omega_A^{\max} \simeq 1$.

Le taux de croissance obtenu avec l'expression (75.289) ne dépend alors que de la pulsation d'Alfvén $\omega_A = k_z V_A$ (le nombre de rotation étant fixé au régime Képlerien). On obtient ainsi le tracé de $\Im m(\omega)$ en fonction de la pulsation d'Alfvén (Fig. 74). L'analyse de ce tracé nous permet d'obtenir les 3 caractéristiques essentielles de la MRI non dissipative.

- **Comportement asymptotique en champ faible.** Lorsque $k_z V_A \ll \kappa$, la MRI a un comportement asymptotique simple, que l'on peut dériver à partir de (75.289) :

$$\Im m(\omega) = \pm k_z V_A \sqrt{\frac{2\Omega S}{\kappa^2}} \quad (75.290)$$

soit pour un disque képlerien et en remarquant que $V_A = SH\beta^{-1/2}$:

$$\Im m(\omega) = \pm \sqrt{3} k_z H \beta^{-1/2} S \quad (75.291)$$

Ainsi, la MRI existe pour des champs arbitrairement faibles, comme on peut le voir sur la figure (74). Notons cependant que comme les taux de croissance deviennent très faibles, les effets dissipatifs de la MHD non idéale stabiliseront l'écoulement pour des β suffisamment grands.

- **Seuil en champ fort.** Comme on peut le voir sur la figure (74), la MRI disparaît lorsque $V_A k_z$ devient suffisamment grand. Ce seuil peut être obtenu en posant $\omega^2 = 0$ dans l'expression (75.289). Il vient alors au régime képlerien :

$$k_z V_A = \sqrt{\frac{4}{3}} S \quad (75.292)$$

- **Maximum du taux de croissance.** En dérivant l'expression (75.289) par rapport à $k_z V_A$, on montre facilement que le maximum du taux de croissance en régime Képlerien est tel que :

$$k_z V_A = \sqrt{\frac{5}{12}} S \quad (75.293)$$

Pour cette pulsation, on tire de (75.289) le maximum du taux de croissance, qui s'exprime simplement par :

$$\Im(\omega)_{\max} = \frac{S}{2} \quad (75.294)$$

§ 75.2. Implications pour les disques et les simulations

En pratique, à l'échelle locale, un disque dispose d'une échelle caractéristique H qui fixe la plus grande longueur d'onde accessible au système et donc $k_{z\min}$. De la même manière, dans une simulation, la taille de boîte fixe le nombre d'onde minimum. Ainsi, dans les cas physiques, une fois que l'intensité du champ magnétique (β) et la taille de boîte sont fixés, on dispose d'une pulsation Alfvénique minimum accessible au système physique telle que :

$$(k_z V_A)_{\min} = 2\pi\beta^{-1/2} S \quad (75.295)$$

Ainsi, en utilisant (75.292) et l'expression précédente, seuls les modes vérifiant :

$$2\pi\beta^{-1/2} < k_z H \beta^{1/2} < \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (75.296)$$

seront instables vis à vis de la MRI. En pratique, pour un champ suffisamment fort ($\beta < 3\pi^2 \simeq 29,5$), l'inégalité précédente ne peut jamais être vérifiée et l'instabilité n'existe pas dans le système physique considéré. Autrement dit, tous les modes instables ont une longueur d'onde plus grande que la taille de l'écoulement. En ce sens, on dira que la MRI est une instabilité en champ faible. Remarquons que dans le cas d'un écoulement stratifié verticalement, on obtient la limite $\beta \simeq 3$ (Balbus & Hawley 1991a), ce qui semble indiquer que la MRI peut exister quasiment jusqu'à l'équipartition entre énergie thermique et magnétique, $\beta \gtrsim 1$.

Lorsque l'on diminue l'intensité du champ magnétique à partir de la limite précédente, on fait entrer aux grandes longueurs d'ondes des modes instables dans l'écoulement. On remarquera alors que le mode le plus instable mis en évidence dans (75.293) apparaît dans l'écoulement si $\beta > 48\pi^2/5 \simeq 97,7$. Pour des champs magnétiques plus faibles que cette valeur limite, le taux de croissance observé sera dominé par celui du mode le plus instable. On retrouvera donc un taux de croissance constant égal à (75.294).

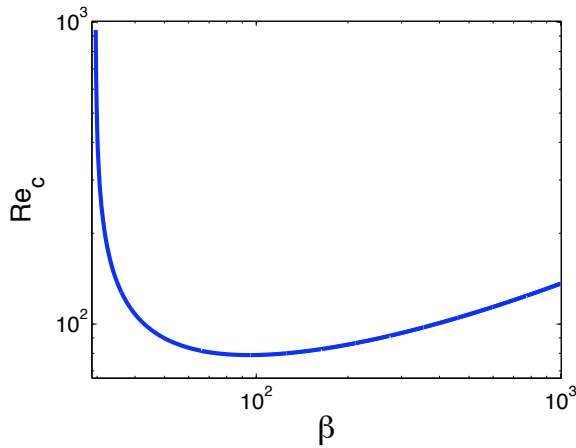


FIG. 75. Tracé du seuil d'instabilité de la MRI en fonction de l'intensité du champ magnétique et de la dissipation pour $Pm = 1$. On remarque le seuil en champ fort mis en évidence dans l'analyse non dissipative $\beta \simeq 29,5$ et le Reynolds minimum pour obtenir l'instabilité $Re \simeq 80$.

§ 76. MRI avec dissipation

§ 76.1. Cas $Pm = 1$

Le cas avec un nombre de Prandtl égal à 1 peut être étudié analytiquement et permet de dériver quelques limites intéressantes. Dans la suite on posera donc $\nu = \eta$ dans la relation de dispersion (73.287) ce qui nous permet d'obtenir :

$$(\omega_v^2 - k_z^2 V_A^2) \left[\omega_v^4 - \omega_v^2 (2k_z^2 V_A^2 + \kappa^2 \gamma^2) - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right] = 0 \quad (76.297)$$

Le critère d'instabilité sur $\Im m(\omega)$ est équivalent dans notre cas à $\nu^2 k^4 < -\omega_v^2$. En remarquant que la relation de dispersion précédente est formellement identique à (75.288), on obtient facilement la condition nécessaire et suffisante d'instabilité :

$$\nu^2 < \frac{\sqrt{\kappa^4 \gamma^4 + 16k_z^2 V_A^2 \Omega^2 \gamma^2}}{2k^4} - \frac{k_z^2 V_A^2}{k^4} - \frac{\kappa^2 \gamma^2}{2k^4} \quad (76.298)$$

où l'on a utilisé la solution (75.289). On remarquera alors que la dissipation maximum pour obtenir l'instabilité est donnée en considérant le mode le plus grand $k_z = 2\pi/H$, $\gamma = 1$. On trace alors une courbe d'instabilité en fonction de l'intensité du champ magnétique (β) et de la dissipation (Re) pour ce mode (Fig. 75). Cette courbe montre à nouveau le seuil d'instabilité en champ fort mis en évidence dans la section précédente pour $\beta = 3\pi^2$. On note aussi l'apparition d'un Reynolds minimum pour obtenir l'instabilité ($Re_{\min} \simeq 80$), obtenu pour $\beta \simeq 100$.

On peut enfin obtenir le comportement asymptotique du seuil de l'instabilité dans la limite $\beta \rightarrow \infty$ en utilisant l'expression du taux de croissance (75.291). L'instabilité est alors obtenue dans cette limite si et seulement si :

$$Re > \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \beta^{1/2} \quad (76.299)$$

Conformément à ce qui était attendu, le nombre de Reynolds critique augmente quand le champ magnétique diminue. Ainsi, pour un Reynolds donné, un écoulement nécessite un champ magnétique minimum pour que l'instabilité se développe. Ce point est conforme à l'intuition que l'on peut avoir, dans la mesure où le champ magnétique vertical est un des moteurs de l'instabilité.

§ 76.2. Cas général

Dans le cas général, il n'est pas possible d'obtenir une expression pour les taux de croissance. Cependant, on peut obtenir des relations analytiques dans la limite en champ faible $V_A k_z \ll \kappa$. Ainsi, si on se place en champ magnétique nul $V_A = 0$, l'équation de dispersion (73.287) donne deux racines distincts : $\omega_\eta^2 = 0$ et $\omega_\nu^2 = \kappa^2$. On reconnaîtra dans la première solution le départ d'une branche Alfvénique (donnant lieu aux ondes d'Alfvén dans un milieu isotrope), et dans la seconde les modes inertiels oscillants à la fréquence épicyclique. Nous allons étudier l'évolution de la branche Alfvénique, à l'origine de la MRI, lorsque $V_A k_z$ est petit mais non nul. On pose alors $\omega_\eta = \delta\omega$, soit $\omega = \delta\omega + i\eta k^2$. Si on suppose que $\delta\omega$ est de l'ordre de $V_A k_z$, l'équation (73.287) s'écrit à l'ordre le plus bas :

$$\delta\omega^2[-k^4(\eta - \nu)^2 - \kappa^2] = 2\Omega S(V_A k_z)^2 \quad (76.300)$$

On obtient alors l'expression de la pulsation ω sous la forme :

$$\omega = i\eta k_z^2 \pm i \left(\frac{2\Omega S}{k_z^4(\eta - \nu)^2 + \kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.301)$$

On remarque que dans cette expression, la viscosité et la résistivité n'ont pas un rôle symétrique. En particulier, à résistivité nulle, l'instabilité existe toujours, même pour des viscosités très grandes. Notons enfin que nous pouvons retrouver dans cette expression le taux de croissance en MHD idéal (Eq. 75.290) pour $\nu = \eta = 0$.

• **Limite à petit Prandtl.** La limite à petit Prandtl magnétique peut être dérivée d'après (76.301) en posant $\nu \ll \eta$. On obtient alors en imposant $\omega = 0$:

$$\eta k^2 = \left(\frac{2\Omega S}{\kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.302)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse initiale $V_A k_z \ll \kappa$. En considérant le mode instable le plus grand ($k_z = 2\pi/H$), on obtient l'expression général du seuil de l'instabilité en fonction des nombres sans dimensions :

$$Rm_c = \left(\frac{2\pi}{3^{1/2}} \right) \beta^{1/2} \quad (76.303)$$

On notera que le seuil (76.303) est identique à celui de Fleming *et al.* (2000). De plus, c'est cette limite qui est à l'origine des *dead zones* présentes dans les disques froids des étoiles jeunes, dans lesquelles la MRI ne peut se développer en raison d'un taux d'ionisation (et donc un Reynolds magnétique) trop faible (Gammie 1996).

Dans le cas d'une résistivité faible, le taux de croissance du mode le plus instable $k_z = 2\pi/H$ s'exprime sous la forme :

$$\tau^{-1} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\Omega S}{\kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.304)$$

On remarquera que l'on retrouve là l'expression du taux de croissance dans le cas non dissipatif en champ magnétique faible (Eq. 75.290).

• **Limite à grand Prandtl.** En suivant une procédure similaire à celle utilisée précédemment avec $\eta \ll \nu$, on extrait la limite de stabilité de (76.301) :

$$\nu k^2 = \left(\frac{2\Omega S}{\eta^2 k^4} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.305)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse auto-consistante $\eta k^2 \ll V_A k_z$. En suivant le raisonnement du cas $Pm \ll 1$, on obtient l'expression du seuil sous la forme :

$$ReRm = \frac{3^{1/2}}{2} (2\pi)^3 \beta^{1/2} \quad (76.306)$$

On retrouve ainsi le fait que l'instabilité peut exister avec des Reynolds arbitrairement petits. Dans cette limite, il est intéressant d'obtenir le taux de croissance de l'instabilité lorsque l'on s'éloigne du point de stabilité marginal :

$$\tau^{-1} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\Omega S}{\nu k_z^2} \right) V_A k_z \quad (76.307)$$

On notera que le taux de croissance obtenu ici diffère de manière significative du taux de croissance dérivé dans le cas Pm petit. D'après l'expression (76.301), on retrouvera le comportement (76.307) dès lors que $\nu k_z^2 > \kappa$, soit :

$$Re < 3(2\pi)^2/2 \simeq 60 \quad (76.308)$$

Cette limite nous permet alors de séparer un régime de haute et basse viscosité, où le taux de croissance de la MRI passe de (75.290) à (76.307). Afin d'éclaircir les causes physiques de cette limite, je vais montrer par une analyse qualitative les mécanismes mis en jeu dans la formation de l'instabilité dans chacun de ces régimes, en partant des équations fondamentales (73.286).

• **Différences qualitatives entre les limites de stabilité à haute et basse viscosité.** Tout d'abord, notons que dans la limite où $V_A k_z \ll \kappa$ les champs v_x, v_y et b_y sont d'ordre $V_A k_z$ par rapport à b_x . En ne retenant que les termes dominants dans (73.286), il vient alors :

$$(i\omega + \nu k_z^2)v_x = -i k_z \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} b_x + (2\Omega - S)v_y \quad (76.309)$$

$$(i\omega + \nu k_z^2)v_y = -2\Omega v_x \quad (76.310)$$

$$(i\omega + \eta k_z^2)b_x = b_y S \quad (76.311)$$

$$(i\omega + \eta k_z^2)b_y = -i k_z B_0 v_y \quad (76.312)$$

où l'on a supposé $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$ par simplicité. Avec ce système d'équation, en nous plaçant tout d'abord à $\nu = \eta = 0$, nous retrouvons l'analyse phénoménologique présentée au § 72. Ainsi, considérons par exemple une perturbation en vitesse radiale v_y . La particule, en se déplaçant, conserve son moment cinétique et crée donc de la vitesse azimutale [Deuxième terme du membre de droite de (76.309)]. De plus, ce déplacement induit la formation d'un champ magnétique radial (Eq. 76.312), ce qui entraîne la formation d'un champ azimutal à cause du cisaillement (Eq. 76.311). Ce champ azimutal réagit alors sous la forme d'une force de rappel (identique au ressort présenté au § 72) sur v_x [Premier terme du membre de droite de (76.309)]. Remarquons au passage que les termes négligés par l'approximation $V_A k_z$ sont en fait des termes de rappel sur l'axe y qui tendent à inhiber l'action de l'instabilité (ces termes sont responsables du seuil d'instabilité en champ fort, Eq. 75.292).

Étudions à présent la limite où $\omega = 0$, $\nu = 0$ et $\eta k_z^2 \gg \kappa$, correspondant à la stabilité marginale avec résistivité. Dans ce cas, on observe un équilibre sur l'axe x entre la force de Coriolis et la force de rappel magnétique. En combinant les équations (76.311) et (76.312), on obtient pour ce rappel magnétique l'expression :

$$-ik_z \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} b_x = -\frac{k_z^2 V_A^2}{\eta^2 k_z^4} S v_y \quad (76.313)$$

Ainsi, la résistivité tend à diminuer l'intensité de ce rappel. On peut comprendre ce résultat en remarquant que la résistivité tend à autoriser les lignes de champs à « glisser » dans l'écoulement. A forte résistivité, le déplacement radial v_y entraîne donc une plus faible déviation du champ magnétique dans la mesure où il glisse le long de l'écoulement pour revenir dans sa position initiale. Lorsque le rappel magnétique (76.313) devient trop faible pour compenser la force de Coriolis, l'instabilité disparaît. Enfin, si on impose que la force de Coriolis soit de même intensité que la force de rappel magnétique, on obtient la limite (76.303) dérivée précédemment.

Si on se place dans le cas inverse avec $\omega = 0$, $\nu \gg \eta$ et $\eta > \kappa$, on observe un nouvel équilibre pour l'équation (76.309). En effet, le terme de force de Coriolis devient négligeable, et on se trouve devant un équilibre entre la force de rappel magnétique et la force visqueuse que l'on écrira sous la forme :

$$-\nu k^2 v_x = \frac{\nu^2 k^4}{2\Omega} v_y \quad (76.314)$$

Lorsque l'équilibre est établi, on retrouve l'expression classique (76.305).

On comprend alors que dans les 2 limites, l'instabilité disparaît lorsque le rappel magnétique (76.313) devient plus faible que la force stabilisante, qui peut être soit la force de Coriolis soit la viscosité. Il est donc normal que le Reynolds magnétique apparaisse dans les deux limites de stabilité en champ faible (76.303) et (76.306), car il permet de contrôler l'intensité du rappel magnétique, et par là même le moteur de l'instabilité. Par ailleurs, le changement de régime visqueux décrit dans la section précédente correspond simplement à un changement de nature de la force stabilisante, comme je viens de le montrer.

• **Étude du taux de croissance général.** On peut étudier le taux de croissance sans faire d'approximation en considérant l'équation (73.287) dans sa forme générale. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \omega^4 - 2ik^2 \omega^3 (\eta + \nu) - \omega^2 (a + k^4 (\eta^2 + \nu^2 + 4\eta\nu) + b) \\ + \omega (2ik^6 (\eta\nu^2 + \nu\eta^2) + aik^2 (\nu + \eta) + 2ib\eta k^2) \\ + \nu^2 \eta^2 k^8 + a\nu\eta k^4 + b\eta^2 k^4 - c = 0 \end{aligned} \quad (76.315)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} a &= 2k_z^2 V_A^2 \\ b &= \kappa^2 \gamma^2 \\ c &= k_z^2 V_A^2 (2\Omega \gamma^2 S - k_z^2 V_A^2) \end{aligned}$$

On ne peut évidemment résoudre analytiquement ce type de polynôme de manière simple. Cependant, on peut utiliser des méthodes numériques approchées permettant d'obtenir les

valeurs de ω pour des paramètres V_A, k_z, η et ν donnés. On réduit alors l'équation (76.315) à la recherche des zéros d'un polynôme que l'on notera :

$$P(\omega) = \omega^4 + \alpha_1\omega^3 + \alpha_2\omega^2 + \alpha_3\omega + \alpha_4 \quad (76.316)$$

On remarquera alors que la recherche des zéros de P est identique à la recherche des valeurs propres de la matrice compagnon de P définie par

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (76.317)$$

On est alors ramené à un problème de valeurs propres pour une matrice 4×4 qui peut être facilement résolu (voir par exemple Press *et al.* 2002). On obtient avec ce type de procédure numérique des graphiques d'instabilité théorique, tel que la figure (76), obtenue en considérant le mode le plus large ($k_z = 2\pi/H$) pour $\beta = 10000$, ce qui se situe dans la limite des champs magnétiques faibles d'après le critère évoqué plus haut.

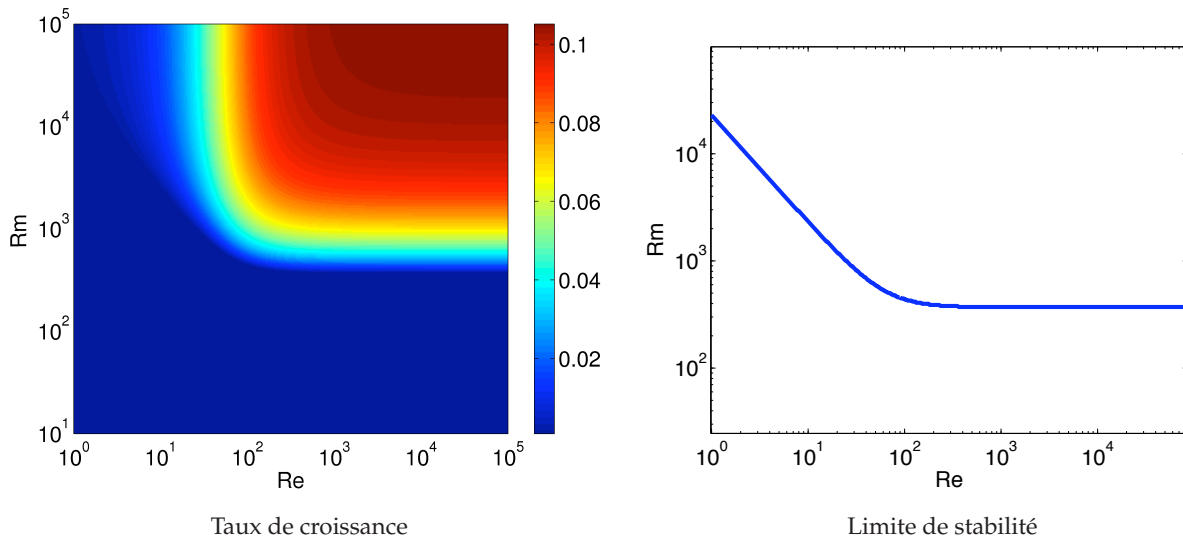


FIG. 76. Tracé du taux de croissance en temps de cisaillement, et de la limite de stabilité linéaire pour un mode $k_z = 2\pi/H$ et $\beta = 10^4$, d'après l'équation générale (76.315) On reconnaît les 2 limites de stabilité $ReRm = cte$ et $Rm = cte$ discutées précédemment.

On remarquera que l'on retrouve dans ce résultat numérique les limites analytiques (76.303) et (76.306), c'est-à-dire $Rm_c \simeq 371$ pour $Re > 60$, et $Rm_c Re_c \simeq 2,3 \times 10^4$ pour $Re < 60$. Par ailleurs, le taux de croissance dans le régime $Re < 60$ est beaucoup plus faible que dans le régime faible viscosité, conformément à l'équation (76.307).

Dans le cas d'un β plus faible, la limite $V_A k_z \ll \kappa$ n'est forcément satisfaite, et les limites de stabilité asymptotiques sont quantitativement fausses. Cependant, la figure (77) montre que le comportement général de la MRI n'est pas modifié, même pour des β petits (ici, $\beta = 50$). On en déduira donc que le comportement de la MRI, et en particulier les deux régimes de viscosités ne sont pas fondamentalement modifiés en champ magnétique fort.

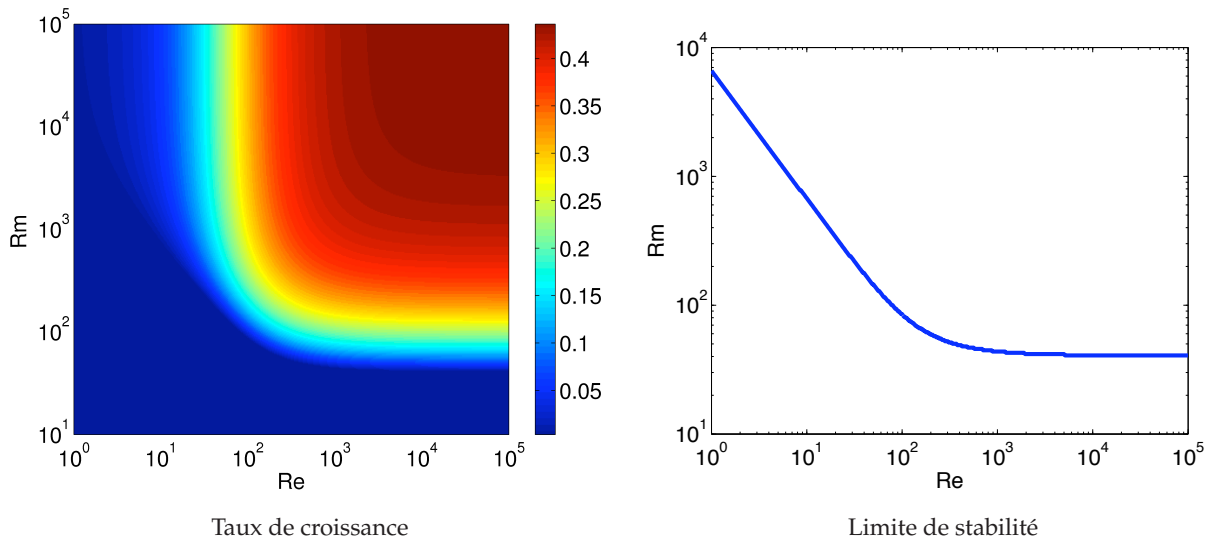


FIG. 77. Tracé du taux de croissance en temps de cisaillement, et de la limite de stabilité linéaire pour un mode $k_z = 2\pi/H$ et $\beta = 50$, d'après l'équation générale (76.315). Les valeurs numériques prédites par notre analyse ne sont vérifiées ici. Cependant le comportement général reste identique à celui de la figure (76).

§ 77. Conclusion

On l'a vu, la MRI est une instabilité relativement complexe. Pour résumer les résultats de ce chapitre, je présente ici les points essentiels.

- La MRI fait intervenir un couplage entre le cisaillement, la force de Coriolis et le champ magnétique. On la trouve dans les écoulements cisailés en rotation anticyclonique en présence d'un champ magnétique faible.
- Un champ magnétique trop fort ($\beta < 29,5$) stabilise le disque en rendant les plus petits modes instables plus grands que la taille verticale du disque.
- Pour un écoulement résistif et non visqueux (cas des disques d'accrétion), les effets de résistivité entraînent la disparition de l'instabilité lorsque $Rm \simeq 3.6\beta^{1/2}$, ce qui n'est pas sans poser des problèmes dans les disques faiblement ionisés et donc fortement résistifs (disques d'étoiles jeunes).
- Pour un disque à forte viscosité, un second régime d'instabilité apparaît ($Re < 60$). Ce second régime, *a priori* non pertinent pour la physique des disques, a un taux de croissance plus faible que l'instabilité classique, et inversement proportionnel à la viscosité.

11

Etude numérique de l'instabilité magnéto-rotationnelle

Plan du chapitre

1. Méthodologie	159
§ 78. Sens physique des simulations	159
§ 79. Définition d'une viscosité turbulente	161
§ 80. Méthode numérique	163
§ 80.1. Paramètres	163
§ 80.2. Contrôle de la dissipation numérique	164
§ 80.3. Moyennes statistiques, écoulement de canal	164
2. Influence du champ magnétique sur la saturation	165
§ 81. Dépendance générale $\alpha(\beta)$	165
§ 82. Limite en champ magnétique fort	165
§ 83. Bouffées turbulentes : phénomène physique ou numérique?	168
3. Influence de la dissipation sur la saturation	169
§ 84. Rôle du nombre de Prandtl	169
§ 85. Comparaison avec le taux de croissance linéaire	171
§ 86. Analyse spectrale	172
4. Cas sans champ magnétique vertical imposé	174
§ 87. Effets dissipatifs et existence de la turbulence	174
5. Conclusion	175

1. Méthodologie

§ 78. Sens physique des simulations

LA PLUPART DES SIMULATIONS QUI ONT ÉTÉ PUBLIÉES dans la littérature ont été effectuées en négligeant la résistivité et la viscosité, comme nous l'avons rappelé au chapitre précédent. Cependant, des tests que j'ai effectués en incluant ces termes dissipatifs montrent que l'on peut difficilement monter à des Reynolds supérieurs à quelques milliers avec les résolutions spectrales courantes (128^3). On peut dès lors s'interroger

sur la pertinence physique de ces simulations quand il s'agit de caractériser les propriétés de transport d'un disque d'accrétion dont le Reynolds frôle les 10^{15} .

Ainsi, on ne peut prendre au pied de la lettre les résultats des simulations actuelles et les extrapoler sur près de 10 ordres de grandeur pour les disques d'accrétion. Dans ce chapitre, je ne prétendrai donc pas que les simulations sont des simulations de disques. Par contre, je vais montrer, à l'aide de quelques exemples, que l'on ne s'attend pas à ce qu'une augmentation conjointe du Reynolds et du Reynolds magnétique modifie drastiquement les propriétés de transport turbulent obtenues. Ainsi, on pourra considérer que les simulations locales telles que celles présentées ici donnent une description générique, peut-être pas totalement quantitative, des quantités statistiques typiques d'une turbulence magnétohydrodynamique dans un disque d'accrétion.

Dans un premier temps, revenons à la transition turbulente des écoulements hydrodynamiques linéairement instables. Dans le cas des instabilités sous critiques (partie 3), nous avons vu que le passage du seuil de l'instabilité engendrait directement un écoulement à turbulence développée. Ce point n'est plus vrai dans le cas des instabilités linéaires : il existe un régime dans lequel l'écoulement développe une instabilité, mais ne peut être qualifié de « turbulent » car il fait apparaître des structures très organisées : c'est le cas des rouleaux de Taylor dans les écoulements convectifs par exemple. Pour les écoulements cisailés en rotation, ce régime peut être étudié lorsque l'écoulement est instable vis-à-vis du critère de Rayleigh. On peut alors mettre en évidence les différents régimes en mesurant le coefficient de transport en fonction du Reynolds de l'écoulement. Ainsi, dans le cas d'un écoulement dans le régime de transition entre laminaire et turbulent, on observe un transport adimensionnalisé évoluant en $Re^{-1/2}$ (voir Fig. 78). Lorsque l'écoulement atteint un état de turbulence développée, on retrouve le résultat obtenu pour la turbulence sous critique, à savoir $\alpha = \text{cte}$. Ainsi, dans un écoulement hydrodynamique, si on atteint un Reynolds suffisamment élevé, on s'attend à ce que le transport, et probablement les autres quantités statistiques, deviennent indépendants du nombre de Reynolds.

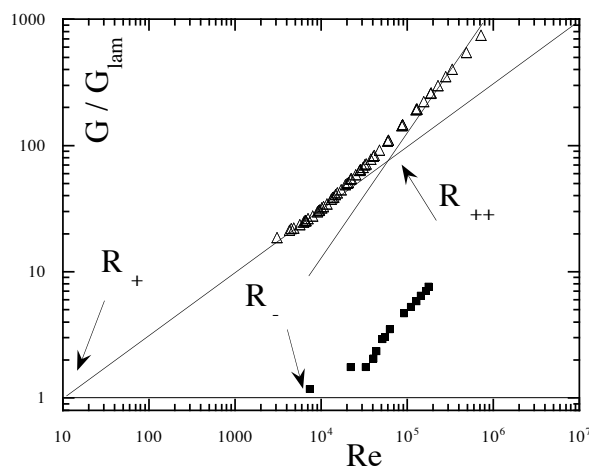


FIG. 78. Tracé du couple (adimensionnalisé par le couple laminaire) entre les 2 cylindres d'un écoulement de Couette Taylor en fonction du Reynolds. Les triangles représentent un écoulement linéairement instable (critère de Rayleigh) et les carrés un écoulement turbulent sous critique. L'instabilité linéaire apparaît pour $R_+ \sim 10$. Le couple est en $Re^{3/2}$ ($\alpha \propto Re^{-1/2}$) entre R_+ et R_{++} puis en Re^2 ($\alpha = \text{cte}$) pour $Re > R_{++}$. On dira alors que R_{++} est le Reynolds de transition vers l'état de turbulence développée. D'après Dubrulle *et al.* (2005a).

Comment expliquer ce comportement vis-à-vis de la phénoménologie utilisée dans la partie 3 (Fig. 38) ? On remarquera tout d'abord que les modes linéairement instables isolés ne peuvent engendrer de cascade turbulente telle que celle décrite dans notre phénoménologie. Ainsi, dans le cas d'une instabilité linéaire, l'obtention d'une cascade est conditionnée par un couplage suffisamment rapide par rapport aux temps de dissipation, entre les différents modes

instables. Si cette condition n'est pas remplie, l'écoulement pourra être instable linéairement, mais le couplage non linéaire formant de nouveaux modes sera très rapidement dissipé par la viscosité, et la cascade ne se formera pas : c'est le régime de transition entre état laminaire et état turbulent décrit précédemment. Lorsque le Reynolds devient suffisamment grand, on obtient une description similaire à celle obtenue d'après la figure (38) : le Reynolds ne fait que modifier l'échelle de dissipation en bas de la cascade de Kolmogorov. Le transport est alors contrôlé par les modes instables les plus grands et leurs couplages non linéaires : il est indépendant du Reynolds.

Dans le cas d'une turbulence MHD, le schéma est moins simple, notamment en raison de la présence de champ magnétique qui induit une anisotropie, mais aussi de la présence de 2 spectres (un spectre magnétique et spectre cinétique), qui peuvent fortement modifier la description précédente. Cependant, il semble qu'en l'absence d'effet dynamo les spectres MHD respectent eux aussi un spectre unidimensionnel type Kolmogorov $E(k) \propto k^{5/3}$, tant pour le champ magnétique que pour le champ de vitesse (Goldreich & Sridhar 1995; Cho & Vishniac 2000), dans la mesure où les échelles de dissipation cinétique et magnétique sont les mêmes. Ainsi, le schéma précédent ne devrait pas subir d'importantes modifications pour correspondre à la turbulence MHD, si l'on suppose que les spectres magnétiques et cinétiques sont similaires. Cependant, une modification du rapport des échelles de dissipation pourrait engendrer une dissymétrie des spectres (Cho *et al.* 2002), et rendre caduc le raisonnement précédent. Ainsi, en première approximation, les coefficients statistiques doivent être constants dans le régime de turbulence développé, lorsque l'on modifie *dans les mêmes proportions* (c'est-à-dire à Pm constant) les coefficients de viscosité et de résistivité.

On peut tester cette hypothèse numériquement assez facilement, dans un domaine de Reynolds malheureusement assez restreint (voir Tab. 4). On remarque dans cette série de simulations à $\beta = 100$ que le coefficient de transport α est à peu près constant dès $Re = 400$ c'est-à-dire pour $Re \simeq 5Re_c$. Par ailleurs, nous avons superposé sur la figure (79) les tracés de l'énergie magnétique et cinétique moyenne pour des écoulements à différents Reynolds ($Re > 400$). On notera là aussi qu'aux fluctuations statistiques près, les simulations donnent des résultats raisonnablement semblables. A titre de comparaison, on trouvera sur la figure (80) le tracé des mêmes quantités pour $Re = 200$. On pourra alors remarquer le comportement temporel fondamentalement différent de cette simulation par rapport à la figure (79) : le régime de turbulence développé n'est pas encore atteint.

Les arguments développés ici ne sont évidemment pas une preuve formelle mais plutôt un ensemble d'indices en faveur du fait que les simulations numériques locales de turbulence MHD peuvent nous donner des informations sur la physique des disques. Il conviendra donc de rester très prudent dans l'interprétation des résultats, en effectuant éventuellement des tests croisés en changeant les conditions aux limites, la physique ou le code numérique.

Dans la suite, je vais préciser quelques-unes des notions que j'ai utilisées ici, et je présenterai le protocole numérique employé en insistant sur les différents biais pouvant apparaître.

§ 79. Définition d'une viscosité turbulente

Dans le but de décrire précisément les phénomènes d'accrétion ou d'éjection dans les disques, il convient d'avoir une description aussi précise que possible des phénomènes de transport, et

Re	α_V	α_B	$\alpha = \alpha_B - \alpha_V$
200	-1,6	3,4	5,0
400	$-4,6 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-1}$	$2,4 \times 10^{-1}$
800	$-3,6 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-1}$	$2,2 \times 10^{-1}$
1600	$-2,8 \times 10^{-2}$	$1,8 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^{-1}$
3200	$-3,7 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{-1}$	$3,1 \times 10^{-1}$
6400	$-3,4 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-1}$	$2,9 \times 10^{-1}$

TAB. 4. Évolution des moyennes adimensionnalisées du tenseur de Reynolds (α_V), du tenseur de Maxwell (α_B) et du transport moyen (α) pour des simulations à $\beta = 100$ pour différents Reynolds ($Pm = 1$). On note que la simulation $Re = 200$ ne semble pas avoir atteint un état de turbulence développée. Le protocole utilisé pour les moyennes est identique à celui décrit dans la section suivante.

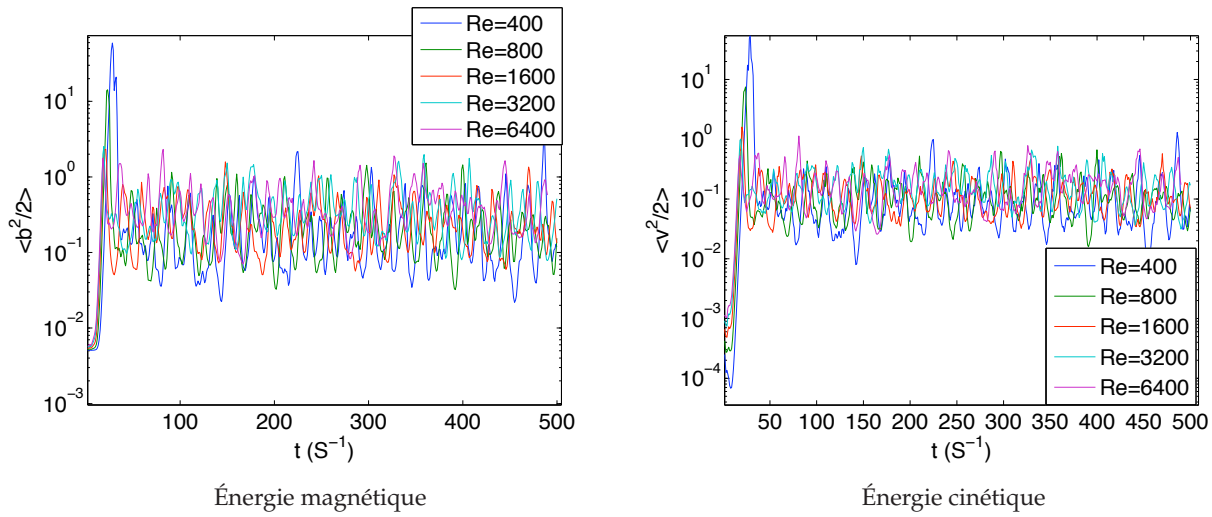


FIG. 79. Évolution temporelle des moyennes de boîte de l'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement en présence de MRI pour $\beta = 100$ et $Re > 400$. Les courbes d'évolution temporelles sont relativement semblables pour chaque simulation.

donc de la turbulence. La description utilisée jusqu'à présent est celle du modèle α telle qu'elle a été définie localement par les équations (41.161) et (41.162). En suivant la même démarche, nous allons définir un « transport turbulent » MHD, applicable à la MRI.

Pour se faire, nous séparons l'écoulement en une composante moyenne et une fluctuation de moyenne nulle : $v = \bar{V} + v'$ et $b = \bar{B} + b'$. En moyennant l'équation (73.284), il vient alors :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \bar{V}_i + \bar{V}_j \partial_j \bar{V}_i &= -\partial_i \bar{\psi} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{V}_k + \bar{B}_j \partial_j \bar{B}_i + \partial_j (\overline{b'_i b'_j} - \overline{v'_i v'_j}) + \nu \partial_j \partial_j \bar{V}_i \quad (79.318) \\
 \partial_t \bar{B}_i + \bar{V}_j \partial_j \bar{B}_i &= \bar{B}_j \partial_j \bar{V}_i + \partial_j (\overline{b'_j v'_i} - \overline{b'_i v'_j}) + \eta \partial_j \partial_j \bar{B}_i \\
 \partial_j \bar{V}_j &= 0 \\
 \partial_j \bar{B}_j &= 0
 \end{aligned}$$

où nous avons adimensionnalisé le champ de manière à éliminer les constantes $4\pi\rho$ et où ψ est la pression généralisée (pression cinématique et pression magnétique).

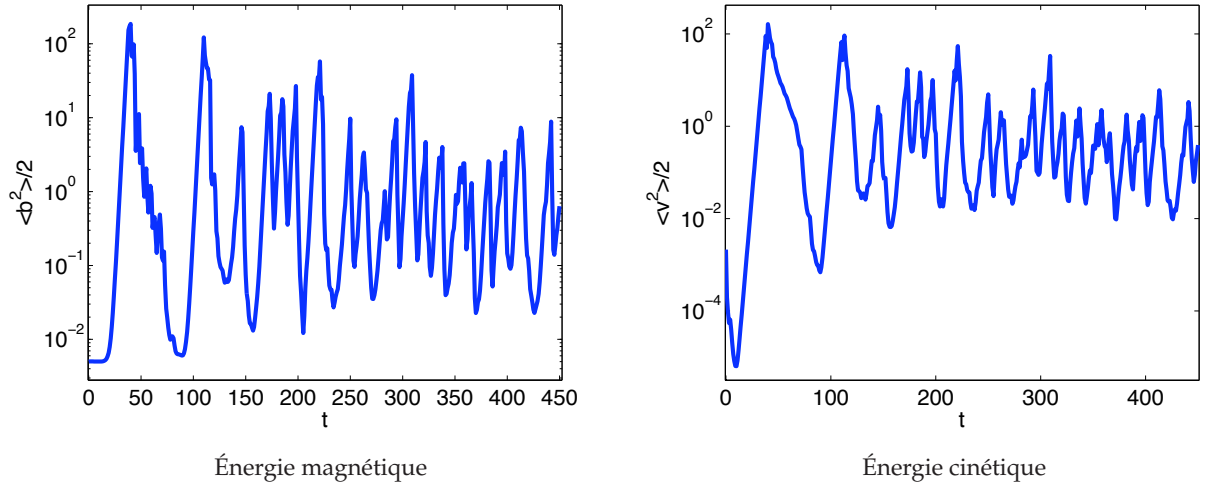


FIG. 80. Évolution temporelle des moyennes de boîte de l'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement en présence de MRI pour $\beta = 100$ et $Re = 200$. D'après le tableau (4), cette simulation n'est pas encore en régime de turbulence développée, ce que l'on peut vérifier ici en comparant l'évolution temporelle avec la figure (79).

On remarque alors plusieurs termes de corrélation des fluctuations des champs. On retrouve en particulier le tenseur de Reynolds $v'_i v'_j$, déjà utilisé dans la partie 3, associé au tenseur de Maxwell $b'_i b'_j$. Dans l'équation d'induction, on obtient par ailleurs le tenseur de Faraday $b'_j v'_i - b'_i v'_j$.

En suivant l'hypothèse de Boussinesq (§ 41.1, p.80), on définit une viscosité turbulente et une résistivité turbulente associées à ces tenseurs ce que l'on écrira :

$$\overline{b'_i b'_j} - \overline{v'_i v'_j} = \nu_t (\partial_i \overline{V}_j + \partial_j \overline{V}_i) \quad (79.319)$$

$$\overline{b'_j v'_i} - \overline{b'_i v'_j} = \eta_t (\partial_i \overline{B}_j - \partial_j \overline{B}_i) \quad (79.320)$$

Dans les écoulements que nous allons considérer, il n'existe pas de gradient moyen de \mathbf{B} , ainsi, on ne pourra pas obtenir de manière numérique une valeur moyenne pour la résistivité turbulente²⁶. Enfin, on adimensionnalise ν_t en faisant apparaître le coefficient α :

$$\nu_t = \alpha SH^2 = (\alpha_B - \alpha_V) SH^2 \quad (79.321)$$

où l'on a séparé la contribution à α venant du tenseur de Maxwell (α_B) de celle du tenseur de Reynolds (α_V).

§ 80. Méthode numérique

§ 80.1. Paramètres

Les simulations présentées dans ce chapitre sont obtenues avec le code spectral MHD décrit dans la deuxième partie de ce manuscrit. L'écoulement calculé correspond au modèle de Hill décrit en introduction (§ 9 p. 22), où l'on néglige la stratification. On utilise de plus les conditions aux limites shearing sheet (voir § 25.2 p. 51) dans la direction y et périodiques dans les directions x et z . On aura systématiquement (sauf mention contraire) une résolution de

²⁶On vérifie de plus que la valeur moyenne du tenseur de Faraday est nulle dans les simulation.

$n_x \times n_y \times n_z = 128 \times 64 \times 64$ modes spectraux. Enfin, le rapport d'aspect sera fixé à $L_x = 4$, $L_y = 1$, $L_z = 1$, afin d'avoir une boîte légèrement allongée dans le sens de l'écoulement.

Les conditions initiales utilisées sont une perturbation des plus grandes longueurs d'ondes du champ de vitesse, le champ magnétique étant fixé à la valeur du champ vertical B_0 voulu. Notons cependant que les conditions initiales n'ont pas d'influence sur les résultats que je présente ici, dans la mesure où les moyennes n'incluent pas les premiers temps dynamiques de la simulation (voir section suivante).

§ 80.2. Contrôle de la dissipation numérique

Remarquons que l'équation (79.318) nous permet de définir un bilan énergétique pour les fluctuations turbulentes. Ainsi, en suivant un calcul similaire au § 41.2 (p. 80), on obtient un bilan qui, une fois intégré sur le volume de la boîte de simulation, s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = S(\overline{b'_i b'_j} - \overline{v'_i v'_j}) - \frac{\nu}{2}(\partial_k v'_i + \partial_i v'_k)^2 - \frac{\eta}{2}(\partial_k b'_i + \partial_i b'_k)^2 \quad (80.322)$$

où $e = b'^2/2 + v'^2/2$. Cette équation de conservation nous permettra d'évaluer les pertes dues à la dissipation numérique, en évaluant chacun des termes de la même manière qu'en hydrodynamique. Ainsi, dans chacune des simulations présentées dans ce chapitre, la dissipation numérique contribue à moins de 1% à la dissipation totale observée dans le fluide.

§ 80.3. Moyennes statistiques, écoulement de canal

Dans la suite, un résultat important des simulations sera l'évaluation des coefficients de transport α_i en fonction des différents nombres sans dimensions du problème. On doit donc passer par une statistique, comprenant une intégration des tenseurs de Reynolds et de Maxwell à la fois spatialement et temporellement. Notons de plus que ces quantités doivent être indépendantes des conditions initiales de la simulation (elles doivent refléter un état turbulent « typique »). Ainsi, dans toutes les moyennes de ce travail, les 100 premiers temps de cisaillement de la simulation ne sont pas utilisés et servent à relaxer les conditions initiales. On effectuera alors les moyennes sur 400 temps de cisaillement (sauf mention contraire). Notons que l'on peut vérifier la convergence des coefficients ainsi obtenus en calculant une moyenne cumulée (Fig. 81), qui montre que les valeurs obtenues ont une incertitude voisine de 10%, ce qui est largement suffisant pour notre étude.

Nous avons vu au chapitre précédent que la MRI, en présence d'un champ vertical, est essentiellement instable pour des modes oscillants selon l'axe z . De plus, dans l'approximation incompressible utilisée ici, ces modes verticaux sont aussi une solution non linéaire des équations de la MHD (Goodman & Xu 1994). Ainsi, on s'attend à ce que le mode le plus instable (qui est, en pratique, le mode ayant la taille verticale de la boîte de simulation), continue sa croissance indéfiniment : c'est la formation d'un écoulement de canal ou *channel flow*. Il se trouve que ce mode est à son tour linéairement instable lorsqu'il devient la structure dominante de l'écoulement (Goodman & Xu 1994). Ainsi, au bout d'un certain temps, ce mode se casse, et engendre *in fine* une structure tridimensionnelle typique d'un écoulement turbulent (Fig. 82).

Cet écoulement de canal est responsable des bouffées turbulentes à croissance linéaire que l'on peut observer dans certaines courbes temporelles [Voir par ex. Fig. (80)]. Dans le cas de simulations essentiellement composées de ce genre de structures, la moyenne statistique n'a

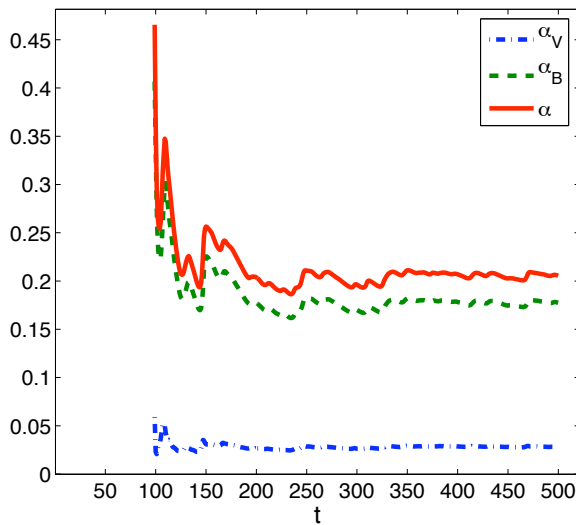


Fig. 81. Moyenne cumulée des coefficients de transport pour une simulation $\beta = 100$, $Re = 1600$. On remarque que la valeur finale est convergée à 10%, ce qui est suffisant.

plus beaucoup de sens, ce que l'on peut vérifier sur les moyennes cumulées. Dans ce cas, nous étudierons de préférence les courbes d'évolution temporelles plutôt que les statistiques.

2. Influence du champ magnétique sur la saturation

§ 81. Dépendance générale $\alpha(\beta)$

Je propose dans cette partie une étude du comportement de la turbulence engendrée par la MRI en fonction du champ vertical imposé. Je vais en particulier m'intéresser au cas où le champ magnétique est « fort », c'est-à-dire au voisinage du point de stabilité marginal (75.292). Ce point a un fort intérêt astrophysique dans la mesure où on s'attend à ce que les phénomènes d'accrétion-éjection se situent dans cette limite. Dans un premier temps, on peut étudier la dépendance générale du coefficient de transport en fonction de β sur une large gamme (Fig. 83).

Tout d'abord, remarquons que pour β grand, la courbe $\alpha(\beta)$ semble avoir un comportement asymptotique de la forme :

$$\alpha \simeq 11,5\beta^{-0.73} \quad \text{si } \beta > 400 \quad (81.323)$$

Ce comportement est sensiblement différent du comportement que l'on peut dériver de Hawley *et al.* (1995) avec $\alpha \simeq 3\beta^{1/2}$. Notons cependant que sur le domaine commun entre nos études, les valeurs finales ne diffèrent que de 30 %, ce qui reste raisonnable compte tenu des autres sources d'erreur discutées précédemment.

Par ailleurs, on pourra remarquer sur ce graphique que le point $\beta = 30$ a un comportement singulièrement différent du reste des simulations. En fait, la simulation $\beta = 30$ fait apparaître des bouffées turbulentes très violentes, formées par un fort écoulement de canal (Fig. 84). Je vais donc essayer de préciser la région de l'espace des paramètres où ce comportement apparaît et quelles sont ses caractéristiques.

§ 82. Limite en champ magnétique fort

Comme on l'aura remarqué, la limite $\beta = 30$ est très proche du seuil d'instabilité théorique (Eq.75.292). De plus, le comportement en bouffées turbulentes semble indépendant du Reynolds

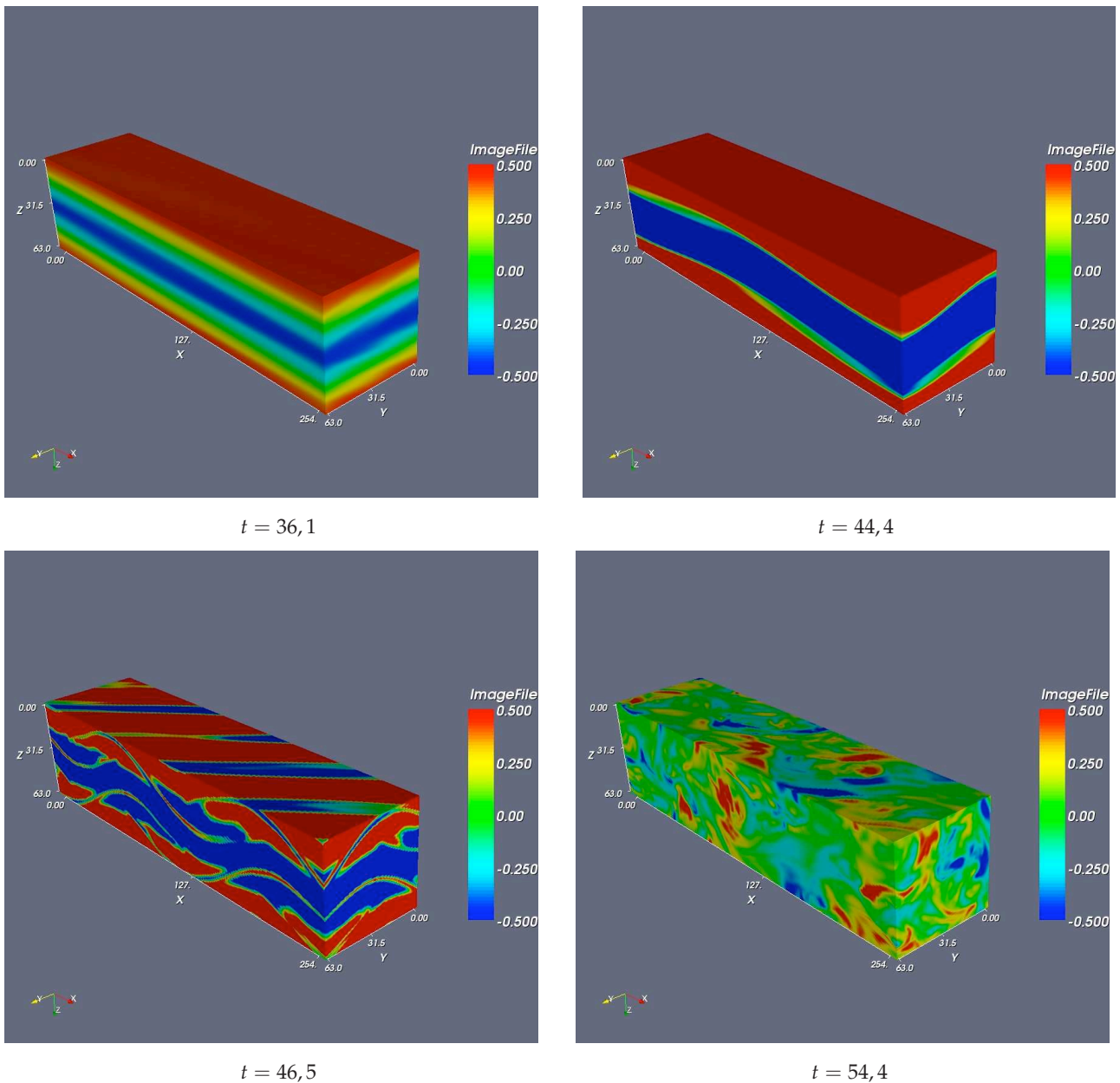


FIG. 82. Mise en évidence de l'écoulement de canal dans une simulation numérique pour $\beta = 50$ et $Re = 2000$ $Pm = 1$ (tracé de v_y). On observe la croissance du mode $k_z = 2\pi/H$, solution non linéaire des équations, puis l'apparition d'instabilités parasites ($t = 44,4$), qui entraînent la destruction du mode et l'apparition d'une turbulence tridimensionnelle développée.

(Fig. 85), ce qui suggère qu'il pourrait avoir lieu dans les disques d'accrétions. Ainsi, par analogie hydrodynamique, on peut l'analyser comme l'état intermédiaire entre l'état de turbulence développée et l'état laminaire, où l'on observe la formation de modes structurés à grande échelle. Cependant, ici, ce n'est pas le Reynolds qui est le paramètre de contrôle mais bien l'intensité du champ magnétique β . On s'attend donc naturellement à ce que le phénomène s'estompe à mesure que le champ magnétique diminue, de même que la turbulence se développe lorsque le Reynolds augmente dans un écoulement. On peut alors s'interroger sur la largeur de la zone de

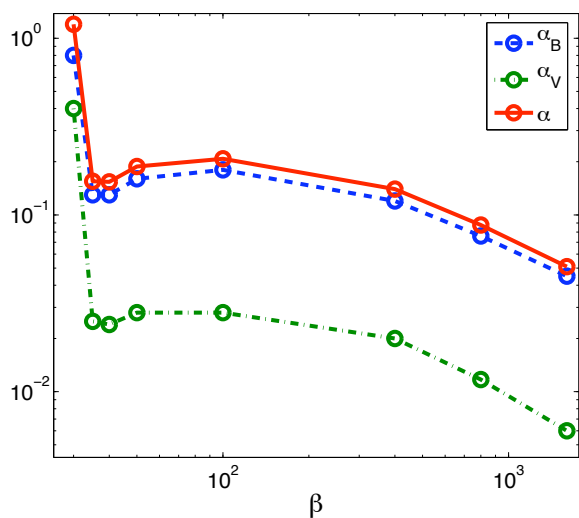


FIG. 83. Moyenne des coefficients du transport en fonction de l'intensité du champ magnétique β pour $Re = 1600$, $Pm = 1$. On remarque que le point $\beta = 30$ se distingue par un transport extrêmement élevé comparativement aux autres simulations ($\alpha = 1, 2$).

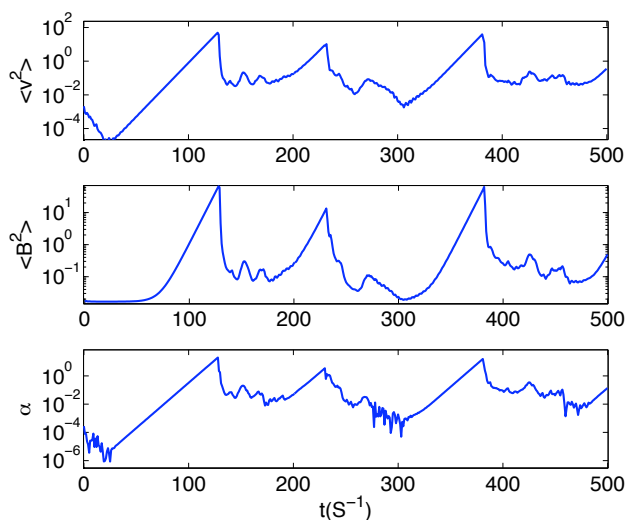


FIG. 84. Courbes temporelles d'une simulation $\beta = 30$, $Re = 1600$. On remarque la présence de bouffées turbulentes dues à la formations de forts écoulements de canal dont la destruction par une instabilité secondaire intervient très tardivement.

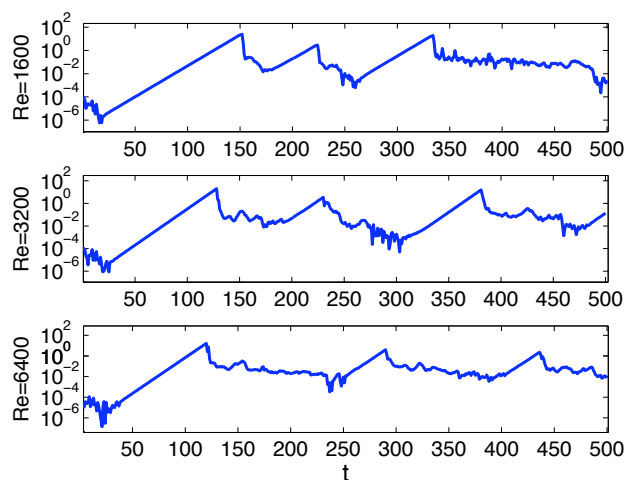


FIG. 85. Tracé du coefficient de transport α pour des simulations à $\beta = 30$, $Re = 1600, 3200, 6400$ et $Pm = 1$. Il semble que le comportement observé initialement sur la figure (84) est indépendant du nombre de Reynolds.

transition entre la stabilité marginale ($\beta = 29,5$) et l'état de turbulence développée qui apparaît au moins dès $\beta = 100$.

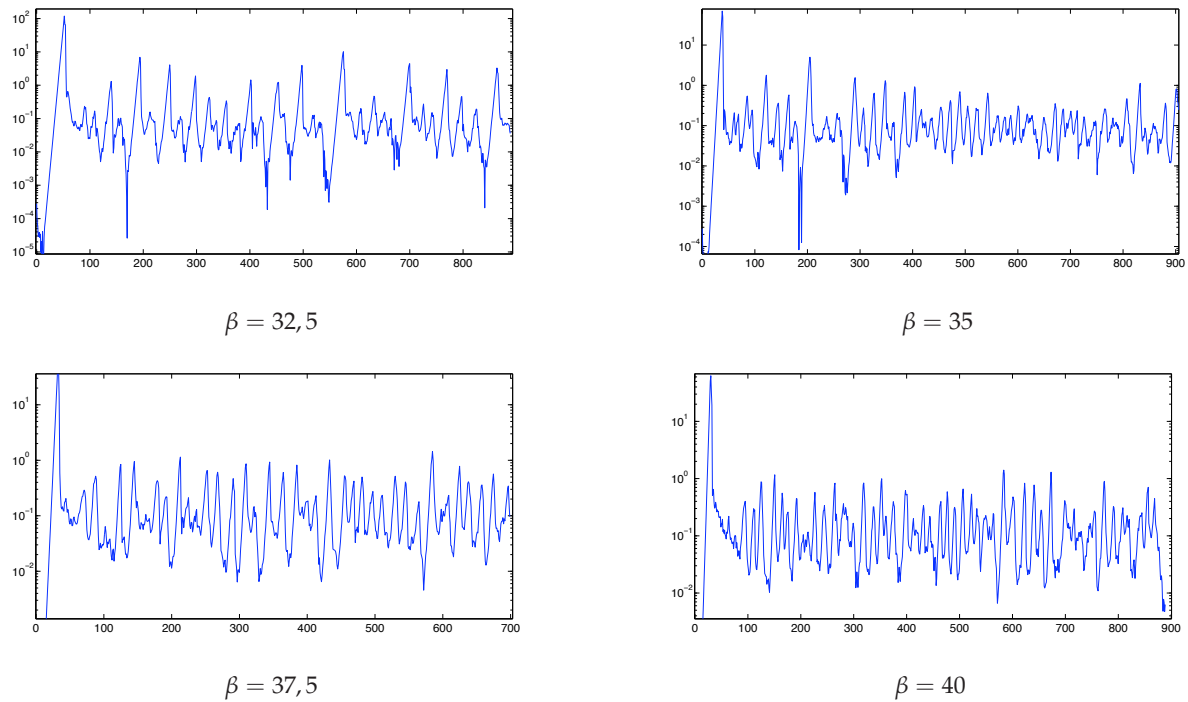


FIG. 86. Évolution du phénomène de bouffée turbulente lorsque l'on s'éloigne du point de stabilité marginal $\beta = 29,5$ pour $Re = 1600$.

Pour étudier cette transition, on réalise une série de simulations de 1000 temps de cisaillement (Fig. 86) en faisant varier l'intensité du champ magnétique. On remarque alors que le phénomène est fortement atténué pour $\beta = 32,5$ et semble disparaître dès $\beta = 35$. Ainsi, on retrouve ce phénomène dans une région étroite au voisinage du point de stabilité marginale, que l'on définit par :

$$\beta_c < \beta < 1.15\beta_c \quad (82.324)$$

§ 83. Bouffées turbulentes : phénomène physique ou numérique?

Comme je viens de le montrer de manière semi-quantitative, le phénomène de bouffée turbulente apparaissant en champ fort est assez violent. Les dynamiques mises en jeu pour les quantités telles que le transport, le champ magnétique ou encore le transport sont énormes (parfois 10^{10} !), ce qui laisse penser qu'il pourrait s'agir d'un phénomène numérique. Cependant, on retrouve un comportement similaire à bas Reynolds avec un champ magnétique faible (Fig. 80). De plus, un comportement semblable est détecté par Fleming *et al.* (2000) (figures 2 et 4) pour des Reynolds magnétiques faibles ($Rm = 260$). Ainsi, comme je l'avais précédemment, il semble que ce comportement soit plutôt la signature de la MRI au voisinage d'un seuil d'instabilité, et donc que le résultat ainsi obtenu reflète, au moins en partie, un phénomène physique.

Cependant, toutes les simulations de ce chapitre, de même que celles de Fleming *et al.* (2000), ont été effectuées en utilisant des boîtes de simulations cartésiennes, avec des conditions aux limites shearing sheet et en négligeant la stratification. Cette remarque est importante car on s'attend naturellement à ce que le mode de canal soit favorisé par les conditions aux limites

verticales et radiales utilisées. On peut ainsi supposer qu'une stratification verticale perturbera l'écoulement de canal, et engendrera plus facilement des instabilités parasites. Par ailleurs, on remarquera que cet écoulement possède une longueur de cohérence « infinie » dans chacune des directions²⁷ x et y . Les conditions aux limites périodiques dans ces directions jouent alors un rôle extrêmement important car elles autorisent une communication instantanée entre les deux côtés de l'écoulement, ce qui n'est pas le cas dans un disque réel. Ainsi, le rôle des conditions aux limites reste flou, et il serait intéressant de tester des conditions aux limites rigides (Couette plan tournant magnétisé) pour vérifier l'influence de ces dernières.

Enfin, notons que les coefficients de transport et d'énergie cinétique impliquent l'existence de mouvements à des vitesses supersoniques lors des bouffées turbulentes²⁸. Le code étant incompressible, des effets d'instabilités secondaires dues à des effets compressibles ne sont pas pris en compte. En particulier, on pourrait s'attendre à une dissipation accrue au sommet des pics de transport due à la formation d'ondes de choc. Il serait alors intéressant d'étudier le même effet en utilisant un code prenant en compte les effets de compressibilité de manière adéquate et de comparer les résultats compressibles et incompressibles. Dans tous les cas, il semble clair que les valeurs maximales du transport que l'on peut obtenir d'après la figure (84) ne sont pas exactes, et il ne serait pas impossible d'obtenir des valeurs dix fois plus faible avec un code compressible.

En conclusion, il semble que le phénomène de bouffée turbulente soit effectivement un phénomène physique dont les caractéristiques restent à déterminer. Il apparaît cependant qu'il doit être exacerbé par les méthodes numériques que j'ai employées ici, et, avant d'arriver à une conclusion astrophysiquement pertinente, il faudra tester le rôle des conditions aux limites, de la stratification et de la compressibilité. Notons enfin que si de tels phénomènes sont effectivement pertinents pour la physique des disques d'accrétion, le modèle du disque α est totalement inutilisable, et un modèle de transport dépendant explicitement du temps sera requis.

3. Influence de la dissipation sur la saturation

§ 84. Rôle du nombre de Prandtl

Comme je le rappelais au chapitre précédent, on trouve très peu de travaux numériques sur la saturation de la MRI prenant en compte les effets dissipatifs. Comme je l'ai fait remarquer au début de ce chapitre, un changement des deux coefficients de dissipation en conservant constant le nombre de Prandtl semble avoir un faible impact sur les quantités statistiques, une fois l'état de turbulence développée atteint. Néanmoins, on peut s'interroger sur le rôle du nombre de Prandtl sur l'efficacité de la turbulence. Cette question est d'autant plus pertinente que ce nombre sans dimension varie énormément suivant les objets étudiés. Ainsi, Brandenburg & Subramanian (2005) suggèrent des valeurs allant de $Pm \sim 10^{-5}$ dans les étoiles jeunes jusqu'à $Pm \sim 10^4$ dans les noyaux actifs de galaxie. D'autres modèles (Henri & Balbus, communication privée) suggèrent une évolution prononcée du nombre de Prandtl à l'intérieur même d'un disque d'accrétion (Fig. 87). Ainsi, pour étudier une telle dépendance, j'ai effectué une série de simulations obtenues pour divers couple (Pm, Re) à $\beta = 100$ (Fig. 88).

²⁷En pratique, les longueurs de corrélation deviennent égales à la taille de boîte.

²⁸Dans un disque en équilibre hydrostatique vertical, on a $SH \simeq c_s$. Ainsi, lorsque la vitesse des perturbations est supérieure à SH , on peut estimer que les mouvements seront supersoniques dans un vrai disque.

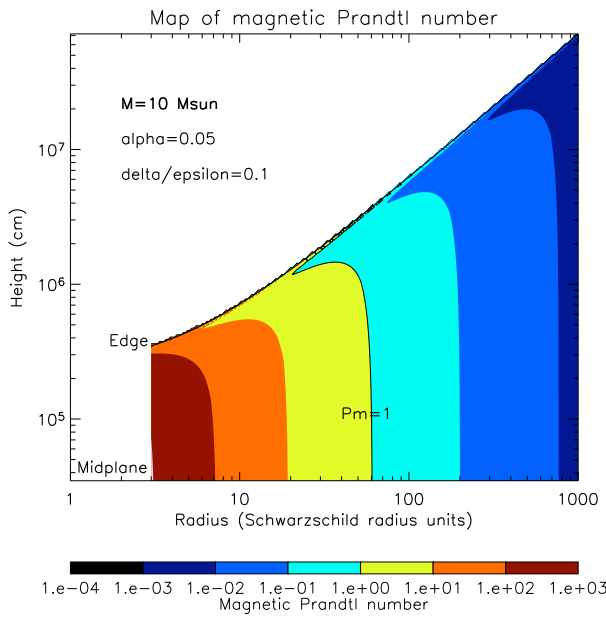


FIG. 87. Évolution du nombre de Prandtl dans un disque d'accrétion autour d'un trou noir de 10 masses solaires. (Crédit Henri & Balbus)

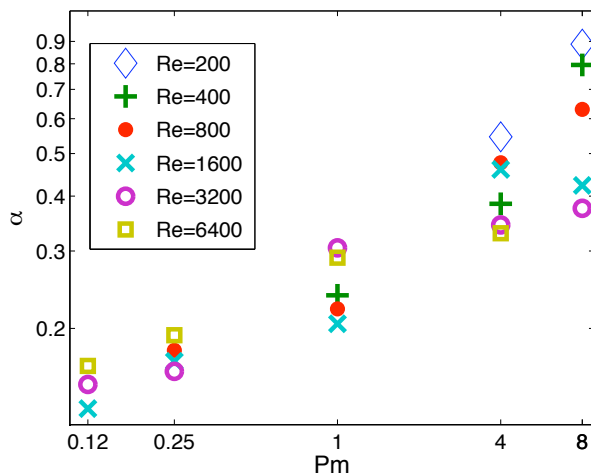


FIG. 88. Évolution du transport moyen (α) en fonction du nombre de Prandtl pour différentes valeurs du Reynolds. Toutes les simulations sont effectuées à $\beta = 100$.

On remarquera sur cette figure la forte corrélation entre le coefficient de transport α et le nombre de Prandtl. Dans le domaine en Pm considéré, on pourra noter cette relation sous la forme :

$$\alpha \propto Pm^\delta \quad \text{pour} \begin{cases} 0.12 < Pm < 8 \\ 200 < Re < 6400 \end{cases} \quad (84.325)$$

avec $\delta \sim 0,35$. On remarquera que cette relation est vraie lorsque le Reynolds et le Reynolds magnétique varient *indépendamment*. Ainsi, on montre que la dépendance du coefficient α vis-à-vis des phénomènes dissipatifs considérés ici se fait essentiellement via le nombre de Prandtl. Ce type de relation, redécouverte ici mais initialement suggérée par Balbus & Hawley (1998), se voit donc confirmée. Par ailleurs, on retrouve le résultat discuté précédemment sur l'effet du Reynolds à Pm constant en remarquant la faible dispersion verticale pour chacun des nombres de Prandtl considérés.

On notera cependant une dispersion plus forte pour $Pm = 8$, qui peut être expliquée par des effets numériques, dus à une résolution trop faible ($Pm = 8$ et $Pm = 3200$ impliquent $Rm = 25600$ ce qui est au dessus du pouvoir de résolution estimé du code). Ainsi, en fixant comme borne supérieur de résolution $Rm = 6400$, on estimera que les simulations $Pm = 4$, $Re = 6400, 3200$ et $Pm = 8$, $Re = 3200, 1600$ sont sous résolues. Des résultats préliminaires à très haute résolution ont tendance à confirmer ce résultat en montrant des transports plus forts pour des simulations avec les mêmes paramètres physiques. Cependant, les temps de calculs extrêmement longs nous empêchent d'avoir une statistique suffisante pour pouvoir parler de résultat définitif.

La corrélation mise en avant ici doit probablement avoir de fortes implications pour la physique des disques. Cependant, il faut pouvoir étendre la courbe de la figure (88) sur plusieurs ordres de grandeurs, ce qui n'a rien d'évident. Notons tout d'abord que les problèmes de résolution numérique imposent de rester systématiquement au voisinage de $Pm = 1$. Ainsi, la seule possibilité pour obtenir une extrapolation convenable de ce résultat est de trouver une description physique satisfaisante de la corrélation observée numériquement.

§ 85. Comparaison avec le taux de croissance linéaire

Une idée apparemment répandue dans la communauté astrophysique est que l'intensité de la turbulence est directement reliée au taux de croissance du mode le plus instable. Par cette affirmation, on sous entend qu'une instabilité forte engendrera nécessairement des fluctuations fortes et sera donc plus efficace. Dans le cas présent, il peut être tentant de tester cette hypothèse sur la corrélation $Pm - \alpha$. Ainsi, en utilisant les résultats du chapitre précédent, et en particulier en résolvant numériquement l'équation (76.315), on peut obtenir facilement le taux de croissance de l'instabilité²⁹ pour les Pm et Re utilisés dans les simulations. La figure (89) montre un tel tracé, en utilisant les mêmes notations que la figure (88).

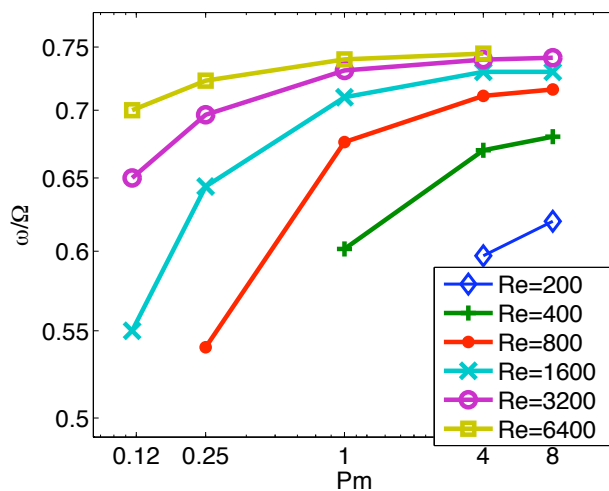


FIG. 89. Taux de croissance linéaire du seul mode linéairement instable pour $\beta = 100$, avec les valeurs de résistivité et viscosité utilisées dans les simulations de la figure (88).

On remarque immédiatement en comparant les figures (88) et (89) que la corrélation $Pm - \alpha$ ne peut être expliquée avec les taux de croissance linéaires. En particulier, on notera la forte influence du nombre de Reynolds à Pm constant, en contradiction avec les résultats

²⁹Dans le cas $\beta = 100$, le seul mode linéairement instable est le mode $k_z = 2\pi$, ce qui correspond donc au taux de croissance du plus grand mode

précédents. Par ailleurs, la dépendance vis-à-vis du nombre de Prandtl semble relativement faible, contrairement à l'effet que l'on cherche à décrire.

On voit donc clairement que l'explication de l'effet $Pm - \alpha$ tient à la dynamique non linéaire du phénomène, beaucoup moins facile à analyser.

§ 86. Analyse spectrale

Par analogie avec la théorie de Kolmogorov, on voit aisément que les deux phénomènes dissipatifs apparaissant dans la turbulence définissent deux échelles de dissipations distinctes. La viscosité définit une échelle de dissipation pour le champ de vitesse, et la résistivité une échelle de dissipation du champ magnétique. En suivant cette idée, on peut tracer les spectres de dissipation ($k^2 E(k)$) des écoulements turbulents dans le cas $Pm > 1$ et $Pm < 1$ (Fig. 90).

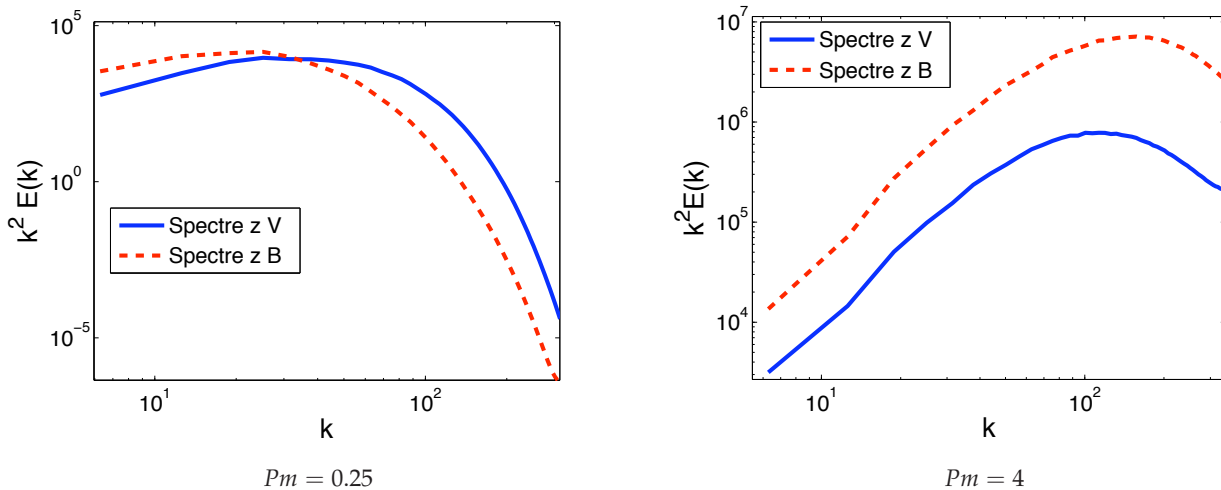


FIG. 90. Tracé des spectres de dissipation pour des écoulements turbulents avec $Pm = 0,25$ et $Pm = 4$, $Re = 3200$. On remarque que la taille relative des échelles de dissipation est liée au nombre de Prandtl.

On pourra alors définir une échelle de dissipation typique, associée au champ de vitesse ou au champ magnétique, comme étant l'échelle où l'on trouve le maximum de $k^2 E(k)$. On notera alors l_B l'échelle de dissipation magnétique et l_V l'échelle de dissipation du champ de vitesse. La figure (90) montre clairement que, conformément à l'intuition que l'on pouvait avoir, lorsque $Pm < 1$, on trouve $l_B > l_V$ et inversement lorsque $Pm > 1$. Partant de cette observation, on peut élaborer un modèle préliminaire pouvant expliquer une partie de la corrélation $Pm - \alpha$.

Tout d'abord, remarquons que dans un écoulement turbulent, le champ magnétique et le champ de vitesse n'ont pas un comportement symétrique. En effet, le champ de vitesse peut casquer aux petites échelles par auto-interaction (terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$), contrairement au champ magnétique. Ainsi, si on se place dans le cas où $Pm \ll 1$, on a alors $l_B \gg l_V$. Ainsi, d'un point de vue spectral, lorsque l'on a dépassé l_B , le champ magnétique se trouve dissipé, et, dans les plus petites échelles, seul le champ de vitesse est présent de manière significative. On observe alors une cascade hydrodynamique type Kolmogorov entre l_B et l_V . Si on suppose à présent $Pm \gg 1$, le schéma précédent n'est pas applicable de manière symétrique. Ainsi, lorsque l'on atteint l'échelle de dissipation du champ de vitesse, le champ magnétique devient prépondérant jusqu'à

sa propre échelle de dissipation. Cependant, il est incapable de créer de manière spontanée une cascade turbulente, et une interaction avec le champ de vitesse (*a priori* faible !) est nécessaire. On peut donc observer une forme d'accumulation d'énergie magnétique entre les échelles l_B et l_V lorsque $Pm > 1$.

Ce type de résultat a déjà été observé numériquement dans le cas de simulations de turbulence homogène (Cho *et al.* 2002). On observe alors un spectre magnétique en k^{-1} et un spectre de vitesse en k^{-4} entre les échelles l_B et l_V lorsque $l_B < l_V$. Si on suppose qu'un phénomène similaire se produit dans le cas de la turbulence induite par la MRI, on peut alors modéliser l'accroissement du transport avec le Prandtl sous la forme d'une cascade inverse de la région du spectre magnétique en k^{-1} sur les grandes échelles responsables du transport (Fig. 91).

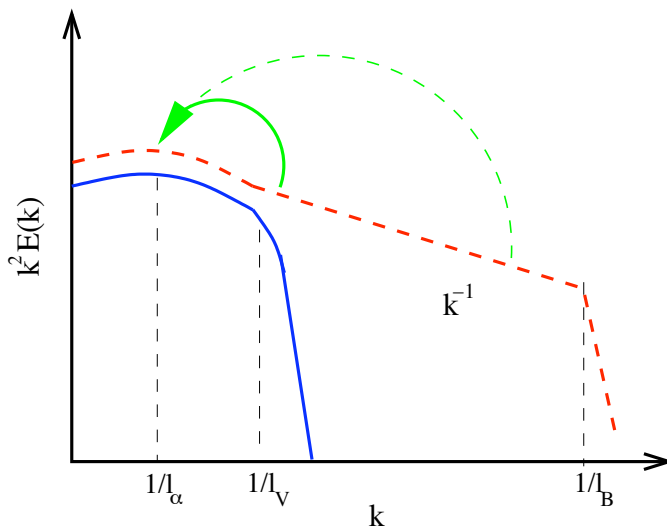


FIG. 91. Spectre turbulent hypothétique obtenu dans le cas $Pm > 1$. Le spectre magnétique est en tirets et le spectre de vitesse en trait plein. L'accumulation d'énergie entre les échelles l_B et l_V pourrait entraîner une réaction inverse sur les grandes échelles (flèches) ce qui expliquerait la corrélation $Pm - \alpha$.

Si ce schéma est vrai, on devrait alors observer plusieurs comportements caractéristiques. Remarquons tout d'abord que trois échelles caractéristiques interviennent dans cette modélisation : les deux échelles de dissipation l_V et l_B , ainsi que l'échelle caractéristique du transport l_α , qui est supposée voisine de la taille de boîte. Considérons alors une échelle l dans le spectre du champ magnétique, comprise entre l_B et l_V avec $l_V > l_B$ ($Pm > 1$). Le modèle proposé suppose que l'interaction de l'échelle l avec l'échelle l_α accroît le transport à l'échelle l_α . Cette interaction ne pourra être efficace que lorsque les deux échelles l_α et l ne seront pas trop éloignées. En effet, si les échelles sont très différentes, il sera difficile, voir impossible d'obtenir une cohérence de phase suffisante pour obtenir la réaction souhaitée. On peut alors envisager deux phénomènes distincts :

- Dans les simulations présentées ici, le Reynolds est assez faible, de sorte que $l_V \sim l_\alpha$. Gardons constant ce Reynolds dans un premier temps, et augmentons le nombre de Prandtl. Ce faisant, on diminue l'échelle l_B et on augmente de fait le domaine en k^{-1} du champ magnétique. Dans un premier temps, lorsque $Pm = O(1)$, les échelles introduites dans le spectre en k^{-1} restent voisines de l_V et donc de l_α . Leur interaction avec les échelles de transport est donc efficace et on observe l'effet $Pm - \alpha$. Lorsque le Prandtl est suffisamment grand, c'est-à-dire l_B suffisamment petit, les échelles ajoutées ne peuvent plus avoir d'interaction efficace avec l'échelle l_α en raison de l'argument précédent. L'effet $Pm - \alpha$ doit donc saturer lorsque le Prandtl est suffisamment grand.

- Supposons à présent que l'on se place à un Reynolds suffisamment grand pour que $l_V \ll l_\alpha$. Dans ce cas, une augmentation du Prandtl à Reynolds constant rajoutera des échelles de tailles inférieures à l_V . L'interaction de ces dernières avec l'échelle l_α ne pourra se faire et l'effet $Pm - \alpha$ sera inexistant.

Si le schéma que je propose ici est correct, on devrait observer une saturation de l'effet $Pm - \alpha$ à Pm suffisamment grand pour $Re = O(10^3)$ ainsi qu'une disparition de cet effet pour $Re \gg 10^3$. Notons cependant que ce schéma n'explique pas le comportement de la figure (88) du côté $Pm < 1$. Néanmoins, on doit là aussi trouver une forme de saturation de l'effet $Pm - \alpha$. En effet, l'extrapolation de l'équation (84.325) montre que le transport doit tendre vers 0 lorsque l'on diminue Pm . Si on considère un écoulement où l'on fixe le Reynolds magnétique, la limite $Pm \rightarrow 0$ correspond à $Re \rightarrow \infty$. Naturellement, dans cette limite, l'écoulement est toujours linéairement instable et on s'attend à ce que l'efficacité de la turbulence soit non nulle. Ainsi, à partir d'un certain régime, l'équation (84.325) doit être fautive tant du côté Pm grand que Pm petit. On peut donc imaginer une courbe *hypothétique* $Pm - \alpha$ lorsque Pm varie sur un domaine suffisamment large pour observer les saturations décrites précédemment (Fig. 92). Un point intéressant serait alors d'évaluer les valeurs de saturation α^+ et α^- afin d'obtenir un domaine typique (et probablement maximum) de variation de α dû à l'effet $Pm - \alpha$.

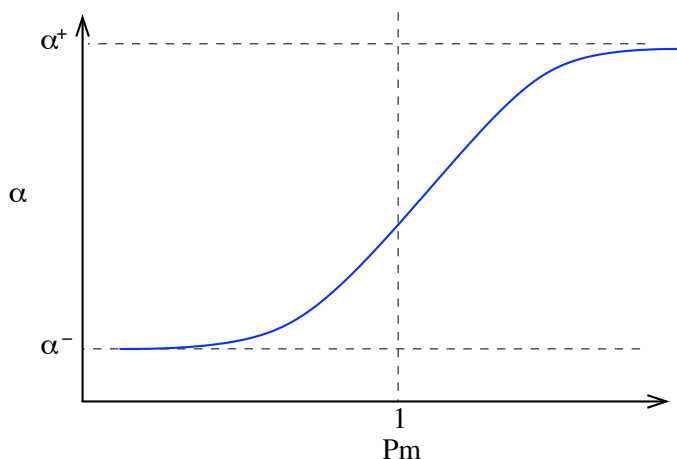


FIG. 92. Allure générale de la courbe $\alpha(Pm)$ à petit Reynolds en supposant une saturation de l'effet $Pm - \alpha$.

4. Cas sans champ magnétique vertical imposé

§ 87. Effets dissipatifs et existence de la turbulence

Les simulations précédentes ont été systématiquement effectuées avec un champ magnétique vertical imposé. On se plaçait ainsi dans le cadre de l'analyse linéaire du chapitre précédent. Cependant, d'autres topologies de champ magnétique sont possibles. En particulier, peu après la découverte de l'instabilité linéaire, il a été montré qu'une turbulence pouvait apparaître sans imposer un champ magnétique moyen dans la boîte de simulation (Hawley *et al.* 1995). On sort alors de l'analyse linéaire classique, et on fait intervenir un éventuel effet dynamo (Brandenburg *et al.* 1995) pour expliquer le maintien de la turbulence dans un écoulement.

Dans le cadre de cette étude, et en collaboration avec Sébastien Fromang, j'ai simulé ce type d'écoulement, en imposant une perturbation initiale du champ magnétique sous la forme d'un bruit blanc, avec un flux magnétique global nul à travers la boîte de simulation. A titre

d'exemple, j'ai tracé le coefficient de transport pour trois simulations dans lesquelles le nombre de Prandtl varie tout en gardant constant le nombre de Reynolds, $Re = 6400$ (Fig. 93).

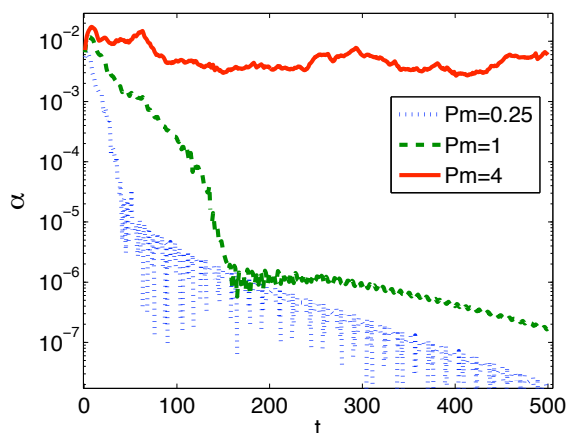


Fig. 93. Tracé de l'évolution du coefficient de transport α en fonction du temps pour des simulations avec $B_0 = 0$ et $Re = 6400$. Un nombre de Prandtl inférieur ou égal à 1 semble éliminer l'instabilité. On retrouve des résultats similaires pour $Re = 1600$ et $Re = 3200$.

De manière surprenante, la turbulence semble disparaître pour $Pm \leq 1$. Des simulations similaires, effectuées à des Reynolds différents montrent un comportement identique ($Re = 1600$, $Re = 3200$). Par ailleurs l'utilisation du code différences finies Zeus3D, avec des intégrations sur 5000 temps de cisaillement et une exploration complète de l'espace des paramètres semblent montrer un résultat similaire (Fromang *et al.* 2007). Comment alors expliquer les nombreuses simulations sans flux net observées dans la littérature ? L'étude des spectres de telles simulations où l'on néglige les termes de dissipation semble montrer que l'on peut définir un nombre de Prandtl numérique, basé sur le rapport des échelles de dissipation numériques magnétique et cinétiques. Pour le code Zeus, il semblerait que le nombre de Prandtl numérique soit voisin de 4, ce qui expliquerait le succès rencontré par ce code pour obtenir des simulations turbulentes sans flux net. Par ailleurs, il semblerait que cette caractéristique soit partagée par la plupart des codes aux différences et volumes finis. En effet, on s'attend naturellement à une viscosité numérique plus élevée que la résistivité en raison des termes de transport du champ de vitesse dus au cisaillement moyen.

Ainsi, cet exemple montre encore une fois que les termes dissipatifs jouent un grand rôle dans la compréhension de la turbulence dans les disques d'accrétion. On voit ici qu'il peuvent aller jusqu'à un résultat totalement contraire à ce qui est régulièrement trouvé dans la littérature, ce qui peut être assez inquiétant. A l'avenir, il semble donc primordial de contrôler ces termes dissipatifs, en utilisant une approche telle que celle proposée ici.

Remarquons enfin que les causes physiques de l'effet dynamo observé dans ces écoulements, et en particulier la disparition du processus pour des Prandtl plus petits que 1 restent obscures. Ce point mériterait d'être étudié en détail, car un tel processus dynamo pourrait éventuellement engendrer un champ à grande échelle, utilisable pour l'éjection et la collimation des jets astrophysiques.

5. Conclusion

Malgré une littérature assez abondante sur le sujet, il semble que l'instabilité magnéto-rotationnelle n'ait pas encore livré tous ses secrets. Comme dans la partie consacrée à l'instabilité sous-critique, je me suis efforcé dans mon étude MHD de contrôler les phénomènes

dissipatifs qui avaient été jusque là partiellement ou totalement négligés. Non seulement ce type d'approche permet de s'assurer que les simulations convergent vers une solution physique, mais elles mettent en avant de nouveaux phénomènes, tels que l'effet $Pm - \alpha$, qui peuvent avoir un impact fort sur notre compréhension finale de la physique de l'accrétion en astrophysique, et même au-delà.

Par ailleurs, une exploration plus systématique de l'espace des paramètres a permis de mettre en évidence des bouffées turbulentes lorsque l'on est au voisinage du seuil d'instabilité en champ fort. Il est certain que ces résultats nécessitent des confirmations en raison des biais numériques que j'ai évoqués, mais aussi des problèmes physiques liés à la transposition des résultats numériques en géométrie cartésienne à un vrai disque d'accrétion. Ce phénomène offre néanmoins des perspectives intéressantes, notamment en raison de la période assez longue observée entre deux bouffées, qui pourrait peut-être expliquer certains phénomènes astrophysiques quasi-périodiques.