DEA Astrophysique
Correction exercices - Astrophysique Instrumentale

Exercice 1 : Domaine des fréquences du visible $\nu = c/\lambda$; $0.4\,\mu$m $\rightarrow$ $7.5\,10^{14}$ Hz ; $0.8\,\mu$m $\rightarrow$ $3.75\,10^{14}$ Hz. $E(\lambda = 0.55\,\mu\text{m}) = 2.25\,eV = 3.6\,10^{-19}\,J$.

Exercice 2 :

$$d\Omega = dS/d^2 \quad ; \quad dS = 2\pi R\,dR \quad ; \quad d\Omega = \frac{2\pi R dR}{d^2}$$

$$\Omega(R) = \int_0^R d\Omega = \frac{2\pi}{d^2}\frac{R^2}{2} = \pi R^2/d^2 = S(R)/d^2$$

$$R = d\sin\theta; \Omega(\theta) = \pi d^2 \sin^2\theta/d^2 = \pi\sin^2\theta$$
$$d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta \quad ; \quad \Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - \theta^2/2; \Omega \sim \pi\theta^2 \sim \pi\sin^2\theta$$

La formule exacte est celle qui fait appel aux angles : $\Omega(\theta) = 2\pi(1-\cos\theta)$.

Cas du détecteur : $\theta = arctg(2.54/4) \rightarrow 32.4^o$; $G = 10^4 \mu\,\text{m}^4 2\pi(1-\cos\theta) \rightarrow 9.79\,10^3\,\mu\text{m}^2$.sr

Exercice 3 : $\theta = 1/2 arctg(1/8) = 3.5^o$. $\Omega = 12\,$msr. $BE = 1.2\,\mu\text{m}^2$.sr. Pour $f/36$, l'étendue de faisceau sera encore plus réduite et chaque pixel verra moins d'émission parasite de fond de ciel. $f/8, \phi = 3.60\,$m : $f_{eq} = 28.8\,$m : 1" $\equiv 140\,\mu$m = 14 pixels ; échelle focale = 0.07 arcsec / pixel.

Exercice 4 : $\nu L_\nu = \nu dL/d\nu = c/\lambda dL/d\lambda d\lambda/d\nu = \lambda dL/d\lambda = \lambda L_\lambda$ La distribution λL_λ mesure la puissance par intervalle de logarithme de fréquence : $\lambda dL/d\lambda = dL/d\log(\lambda)$. L'avantage est de disposer d'une même fonction en fréquence (optique) et longueur d'onde. Dans un graphe log-log, l'aire sous la courbe donne directement la puissance disponible.

Exercice 5 : 1 sr = (1 rd)^2 ; 1 rd = 57.29^o ; 1 arcsec = $4.85\,10^{-6}$ rd ; 1 arcsec^2 = $2.35\,10^{-11}$ sr. V=15/arcsec^2 = $1.62\,10^8$ Jy/sr. (flux F(V=0) = 3810 Jy).

Exercice 6 : 1 erg = 10^{-7} Jy ; 1 m^{-1} = $10^6\,\mu m^{-1}$. Le passage μm^{-1} à Hz^{-1} fait intervenir $d\lambda/d\nu$.

Exercice 7 : Si $F_1 = r.F_2$ ($r = 5$ dans l'exercice), on a : $J_2 = J_{1+2} - 2.5\log(1/1+r)$; $J_1 = J_{1+2} - 2.5\log(r/1+r)$. On a évidemment J_1 et $J_2 > J_{1+2}$. AN : $J_1 = 10.0$; $J_2 = 11.7$.

Exercice 8 : Puissance P ; pendant une seconde, l'énergie est $E = P \times 1\,\text{sec} = N_\nu h\nu$. On a donc bien $N_\nu = P/h\nu$.

Exercice 9 : Il suffit de remplacer λ par c/ν et de faire intervenir le facteur $d\lambda/d\nu = -c/\nu^2 = -\lambda^2/c$. Le signe (-) disparait du problème si on convient de tracer les longueurs d'onde en sens inverse des fréquences. $N_\lambda = B_\lambda/(hc/\lambda)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10 :}}$ Il ne faut pas confondre B_ν et B_λ qui sont des fonctions différentes (de leur variable x) ; on passe de l'une à l'autre en remplacant ν et λ (par c/y) *et en prenant en compte* $d\nu/d\lambda$. Par contre, on peut calculer $B_\nu(\lambda)$ et $B_lambda(\nu)$ en remplaçant simplement ν par c/λ et inversement.

$\boxed{\textbf{Exercice 11 :}}$ Non car tous les photons arrivant sur le soleil sont absorbés. Le soleil se comporte donc bien comme un corps noir. Comme sa température de surface est très élevée (près de 6000 K), le soleil -corps noir chaud- rayonne énormément d'énergie.

$\boxed{\textbf{Exercice 12 :}}$ $F = \sigma T^4$. On trouve alors $F_{300K} = 461.7\,\mathrm{W.m}{-2}$; $F_{1000K} = 5.7\,10^4\,\mathrm{W.m}{-2}$. En calculant $B(1.65\,\mu m, 600K)$, on trouve une émission de $1.2\,10^{15}$ ph/s.

$\boxed{\textbf{Exercice 13 :}}$ $P = 4\pi R^2 \sigma T^4$ (surface totale multipliée par l'emittance intégrée sur toutes les longueurs d'ondes). Pour le soleil, cela donne $P = 3.7\,10^{26}$ W.

$\boxed{\textbf{Exercice 14 :}}$ Le corps noir recevant la puissance P (par unité de surface) va se retrouver à une température d'équilibre telle que $\sigma T^4 = P$ (pertes = gains). Pour la valeur de P fournie $\approx$ constante solaire), on trouve $T \approx 300K$, température proche de la température de surface sur Terre.

$\boxed{\textbf{Exercice 15 :}}$ Le développement limité se calcule à partir de $\exp(x) \approx 1 + x$.

$\boxed{\textbf{Exercice 16 :}}$ Début du calcul identique à la question sur le corps noir précédemment.

$\boxed{\textbf{Exercice 17 :}}$ On calcule $B_1/B_2 = (\lambda_2^5/\lambda_1^5)\exp(hc/kT\,(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1))$. Donc $\log_{10}(B_1/B_2) = (1/2.3)\,\mathrm{Log}(B_1/B_2) = (5/2.3)(\lambda_2/\lambda_1) + (1/2.3)(hc/kT\,(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1))$. On a donc $A \approx 0.485$ et $B \approx 2850$.

$\boxed{\textbf{Exercice 18 :}}$ Le modèle d'atmosphère à 300K et $\tau = 0.2$ est correct. Cependant on prend parfois une atmosphère plus froide (250K) pour tenir compte des effets à différentes altitudes.

$\boxed{\textbf{Exercice 19 :}}$ De manière symétrique, on peut définir la fréquence optique équivalente d'un filtre : $\nu_e = \int \nu x(\nu) d\nu / \int x(\nu) d\nu$; $F_e = \int F(\nu) x(\nu) d\nu / \int x(\nu) d\nu$; On peut alors parler de bande passante de façon que $F_e = \Delta\nu F(\nu_e)$. On en déduit une définition possible de la bande passante comme : $\Delta\nu = F_e/F(\nu_e$.

$\boxed{\textbf{Exercice 20 :}}$ $A_V = \frac{1}{0.282 - 0.112}[J - K - (J - K)_o] = 5.88 \times 2.2 = 8$.

$\boxed{\textbf{Exercice 21 :}}$ le flux de photons Φ donne lieu à un courant $I = e\,\eta\,\Phi$. La puissance correspondant à Φ s'obtient en multipliant par $P = \Phi\,hc/\lambda$. On a donc : $R_{\mathrm{A/W}} = I/P = e\,\eta\lambda/hc \propto \lambda$. Par ailleurs, la détectivité s'établit à partir du NEP : pour un bruit de lecture σ, on a : $NEP = \sigma hc/\lambda$ et $D = 1/NEP \propto \lambda$. Pour un détecteur quantique où chaque photon a une probabibilité à peu près identique η (indépendant de λ) de donner lieu à la détection d'un électron, il est normal que les performances du détecteur augmentent lorsque λ, donc l'énergie par photon, diminuent.

$\boxed{\textbf{Exercice 22 :}}$ le calcul a déjà été fait dans l'exercice précédent ; le facteur $1.24 = 10^6 \times hc/e$, et on suppose que λ est exprimée en μm. Relation rendement quantique - réponse en courant :

si $< N_e >$ est le nb moyen d'électrons comptés pendant t_i, le courant correspondant $< I >$ est : $< I >=< N_e > /t_i = \eta N$ si N est le flux de photons moyen tombant sur le détecteur, correspondant à une puissance incidente : $< P >= N.hc/\lambda$.La réponse en courant est donc : $\mathcal{R}_{A/W}(\lambda) = e.\eta(\lambda)/hc$. Un rendement quantique constant correspond à une réponse croissant vers les grandes longueurs d'onde.

Exercice 23 : $F = F_o\,10^{-m/2.5}$; pour $m = 6$, on obtient la limite de flux $F = 1.5\,10^{-25}\,\mathrm{W.m^{-2}.Hz^{-1}}$. La bande passante correspondante du filtre considéré en Hz est : $\Delta\nu = c\,\Delta\lambda/\lambda^2 = 9.9\,10^{13}$ Hz. Pour une surface de $1.96\,10^{-5}$ m, l'oeil peut donc détecter $2.92\,10^{-16}$ W, correspondant à ≈ 807 photons d'énergie $3.6\,10^{-19}$ J (à 550 nm).

Exercice 24 : Entre 2 électrodes, un électron acquiert une énergie $U = e.\delta V$. Pour $\delta V = 1\,\mathrm{kV}$, $U = 1.6\,10^{-16}$ J = 440 fois l'énergie d'un photon incident à 550 nm.

Exercice 25 : La longueur d'onde de coupure du silicium est de l'ordre de $1.1\,\mu$m, au delà, ce matériau transmet le rayonnement. Idem pour le germanium vers $1.8 - 2\,\mu$m.

Exercice 26 : Pour 900 nm, $R \approx 0.6$; $\eta = 1.24 \times 0.6/0.9 \approx 83\,\%$. A 600 nm, $R \approx 0.35$, ce qui donne $\eta = 1.24 \times 0.35/0.6 \approx 72\,\%$; A 400 nm, on trouve $\eta = 1.24 \times 0.14/0.4 \approx 46\,\%$. Le rendement quantique double pratiquement de 0.4 à $0.9\,\mu$m.

Exercice 27 : $\sigma_e = kTC/e$; en calculant le terme en $\sqrt{(k)}/e$ et en normalisant par 10^{-6} (pour exprimer C en pF), on obtient les nombres cités dans l'énoncé.

Exercice 28 : 12 bits correspondent à 4096 niveaux ; pour une gamme d'entrée de 5V, le LSB vaut $5/4096 = 1.22$ mV. Il vaudra mieux prendre $1\,\sigma \geq 1.2\,\mathrm{V}$ (en réglant les différents gains de la chaine de mesure).

Exercice 29 : Cadence video : 25 Hz, soit un temps de pose de 40 ms. Avec un courant d'obscurité de 5e/s, le nb d'électrons d'obscurité par pose est inférieur à 1. $F = 3.75\,10^{-15}\,\mathrm{W}$ correspond à un flux de photons ($1.2\,10^{-19}$ J à $1.65\,\mu$m) de $31\,10^4$ photons/seconde, donc 1245 photons par pose de 40 ms, et 996 électrons avec $\eta = 80\,\%$. Le bruit statistique correspondant est donc $\sqrt{996} \approx 32$, légèrement supérieur au bruit de lecture de 30 e. Le bruit total vaut : $\sqrt{32^2 + 30^2 + 0.2^2} \approx 44\,\mathrm{e}$. Le bruit de photons domine mais le détecteur n'est pas complètement BLIP. Avec $C_S = 0.05\,\mathrm{pF}$, 44 e de bruit correspondent à $44 \times 1.6\,10^{-19}/0.05\,10^{-12} \approx 140\,\mu\mathrm{V}$. Entre 12 bits,1V ($244\,\mu$V) et 16 bits, 10V ($152\,\mu$V), mieux vaut prendre le convertisseur sur 16 bits.

Exercice 30 : $D^\star = (1/NEP) \times \sqrt{S.\Delta f}$. Pour les valeurs données, on trouve alors $NEP = 3.16\,10^{-12}\,\mathrm{W}$. Pour une source émettant 1 W intégré, un détecteur de 1 mm^2 reçoit à 2 m la puissance : $P = 1\,\mathrm{mm}^2\,4\pi/(2\;\mathrm{m})^2 = 1.99\,10^{-8}\,W$, ce qui donne $S/N = 1.99\,10^{-8}/3.16\,10^{-12} = 6296$; la puissance $P_{\min}$ détectable correspond à $NEP = 1\mathrm{mm}^2 \times P_{\min}/4\pi d^2$, soit $P_{\min} = 1.59\,10^{-4}(= 1/6296)$ W.

Exercice 31 : Les paramètres clés sont la surface (en cm^2 !) et la charge de l'électron. A partir de là, on trouve : a : 375 e/s (9 min) ; b : 43 (19 min) ; c : 62 (27 min).

Exercice 32 : Pupille 5 cm et 550 nm : $\lambda/D = 2.2''$; il faut donc placer un pixel toutes les secondes d'arc (1.1″/pixel).

Exercice 33 : $f/35 \times 3.60\,\mathrm{m} \rightarrow f_{eq} = 126\,\mathrm{m}$. $\alpha_{diff} = \lambda/D = 0.03\,\mathrm{arcsec} \equiv\approx 17\,\mu\mathrm{m}\; rightarrow$ utilisation de pixels de taille $\leq 8\,\mu$m ; il faut donc utiliser le CCD (b).

Exercice 34 : Source centrale gaussienne, de largeur à mi-hauteur $\varpi = 2.35\sigma$. Signal à la distance x du centre : $S(x) = Aexp(-x^2/2\sigma^2)$; $A = 0.9F/\varpi^2$; $F = F_o 10^{-m/2.5}$. Bruit de signal $\propto \sqrt{S}$. On détectera un compagnon de magnitude m_2 si $A_2 = 0.9F_o 10^{-m_2/2.5}/\varpi^2 > \sqrt{S}$.

Exercice 35 : On n'a pas pris en compte l'intégrale du signal (réparti selon une gaussienne) sur l'étendue de chaque pixel.

Exercice 36 : $Q = CV/e$ (en nombre d'électrons), avec $V = 1\,\mathrm{Volt}$ et $C = 3\,10^{-4} \times 10^{-12} \times 100/1.6\,10^{-19} = 1.9\,10^5\,\mathrm{e}$. Le bruit statistique sera de 433 e, avec S/N=433. $S/N \propto \sqrt{V} \propto \sqrt{S}$; on n'utilise pas des grilles trop grandes pour ne pas avoir de bruit de recharge trop important.

Exercice 37 : $\sigma = \sqrt{kTC} = 33\,\mathrm{e}$. Le flux de photons demandé vaut $\phi = 33^2/60 = 17\,\mathrm{photons}$ /s. Pendant 1 mn, 1e/s fournit 60 e, soit un bruit de 7 e supplementaire, négligeable.

Exercice 38 : $I_D.t_{int} > 25^2 \rightarrow t_{int} > 10\,\mathrm{min}$.

Exercice 39 : De K=12.9 on passe au flux en Jy ($62010^{-12.9/2.5} = 4.310^{-3}\,\mathrm{Jy}$) ; surface $50\,m^2$ (VLT) ; $\Delta\nu \approx 210^13\,\mathrm{Hz}$ (Bande K) ; $h\nu_K = 910^{-20}\,\mathrm{J}$; rendement quantique $\eta \approx 0.8$. On n'applique pas de facteur de transmission optique en considérant que la brillance de fond de ciel englobe tous les flux parasites de l'environnement. On obtient un flux de photo-électrons par arcsec^2 $\times$ échelle focale au carré $\rightarrow\approx 240\,\mathrm{e/s}$, donc un temps de pose max de l'ordre de 1200s (20 mn).

Exercice 40 : $F_J(1e/s) = 1.610^{-19}/(50 \times 4.610^{13} \times 0.8) = 8.7\,\mathrm{nJy}$.

Exercice 41 : $NEP = (\sigma hc)/(\eta\lambda T_{int})$. Le NEP dépend de T_{int} puisque les performances s'améliorent si on pose plus longtemps.

Exercice 42 : $\sigma = 100e \equiv 2.7\,10^{-7}\,\mathrm{Jy}$ (pour un rendement quantique de 0.8). Si on observe objet/ciel avec une efficacité de 80%, en une heure de temps de travail, on bénéficie de 24 min (144 poses) de temps de pose. Le rapport signal/bruit obtenu alors est $\sqrt{144} = 12$ meilleur, soit (avec un facteur 3 pour 3σ) $6.8\,10^{-8}\,\mathrm{Jy}$, soit $K_{lim}(3\sigma) = 25.4$. En 10s, la sensibilité reste limitée par le bruit de lecture si $I_D \leq 1000\,\mathrm{e/s}$ (toujours le cas). En prenant une brillance de fond de ciel de K=14.5 mag/arcsec^2, on obtient 2850 photons/sec/pixel à l'entrée du télescope, ce qui peut correspondre à 500 électrons/sec/pixel de détecteur (transmission optique x $\eta \approx 0.2$). Dans ces conditions, le détecteur est BLIP pour $T_{int} = 20\,\mathrm{secondes}$.

Exercice 43 : $\varpi \propto \lambda^{-0.2} \rightarrow \varpi(M) = 0.4$. La résolution obtenue est une convolution des performances de l'instrument (λ/D) et de l'atmosphère (λ/r_o) qui dépendent toutes les deux de λ

mais pas de D. La possibilité de séparer les deux étoiles dépend de la résolution atteinte mais aussi du rapport signal/bruit de la mesure.

Exercice 44 : En approximant les deux pics superposés (halo & fonction d'Airy) à des gaussiennes, avec des relation flux/amplitude/largeur calculées dans le cours, on trouve la relation demandée.

Exercice 45 : cf exercices de calcul de propagation d'erreur.

Exercice 46 : cf séance de cours.

Exercice 47 : $T_F = 77\,\mathrm{K}$ (azote liquide) ; $T_C = 300\,\mathrm{K}$ (ambiante). Alors on obtient $T_{sys} = 146\,\mathrm{K}$.

Exercice 48 : IRAM 30m @ 230 Ghz : 9"

Exercice 49 : cf séance de cours

Exercice 50 : cf séance de cours

Exercice 51 : Si limitation par bruit de photon, S/N(1mn/pose) = $(1/\sqrt{3})$.S/N(3mn/pose) ; 60 poses par heure : gain $\sqrt{60}$ (comparé au gain de $\sqrt{20}$ pour les 20 poses/heure lorsqu'on pose 3mn). Au total, "gain" de $\sqrt{60}/\sqrt{3}/\sqrt{20} = 1$, pas de changement.
Si limitation par bruit de lecture, S/N(1mn/pose) = (1/3).S/N(3mn/pose) ; le "gain" est donc : $\sqrt{60}/3/\sqrt{20} = 0.6$. on perd $-2.5\log(0.6) = 0.6$ magnitude.

Exercice 52 : cf céance de cours