ASTROPHYSIQUE INSTRUMENTALE
Examen 2011-2012 CORRECTION Session Janvier 2012

1 V en orbite varie en $R^{-1/2}$ (pour une masse centrale fixe). La vitesse à 0.1 AU est donc proche de $30 \times 3.3 \approx 100\,\mathrm{km/s}$.
En projection (et sur l'équateur), la planète devra "traverser" le diamètre solaire, donc le temps de transit est $\approx 1.4\,10^6/100 = 1.4\,10^4\ s \equiv 3.9\,\mathrm{heures}$.
Le rapport dés surfaces (étoile & planète) est de 10^{-4}. Donc $\Delta F = 10^{-4}\,F$. $\Delta m \approx 2.5/2.3 \times 10^{-4} \approx 10^{-4}$: la différence de magnitude est de l'ordre de 0.1 milli-mag (quelle que soit la magnitude de l'étoile observée). On utilise pour cela le DL : $\ln(1+x) \approx x$ et $\ln(x) = 2.3\ \log_{10}(x)$
La quantité de flux absorbé peut dépendre de la longueur d'onde si la planète a une atmosphère et si celle ci, selon sa composition chimique, a un spectre particulier.
A partir des données, on détermine le nombre délectrons reçus par le CCD dans son ensemble (en utilisant la magnitude absolue du soleil car l'étoile est située à 10 pc) :

$$N_e = F_o 10^{-m/2.5} \times \Delta\nu \times S_{tel} \times \tau / h\nu_o = \frac{4000\,10^{-26}\,10^{-4.82/2.5} \times 10^{14} \times 0.3 \times 0.2}{3\,10^{-19}} = 0.88\,10^7 e/s$$

On doit étaler la tache stellaire pour ne pas dépasser le niveau δ dans chaque pixel.
$N = \phi T$; $n = N/\delta$.

$$\mathrm{SNR}(T) = \frac{N}{\sqrt{N + n\,\sigma^2}} = \frac{N}{\sqrt{N + \frac{N}{\delta}}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\delta}}} = \frac{\sqrt{\phi T}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\delta}}}$$

Pour approximer SNR à $\sqrt{\phi T}$, on prendra $\sigma^2/\delta \leq 0.1$, soit $\sigma \leq 58$ e.
Pour détecter un point à 0.1 mmag à 3σ, il faut un SNR : $\sqrt{\phi T} = 3\,10^4 \rightarrow T = 90$ s.
Lorsqu'on augmente T, on augmente N, donc on augmente n en étalant de plus en plus la tache stellaire. C'est la taille du CCD qui empêchera finalement le rapport signal sur bruit d'augmenter indéfiniment.
Pour $T = 60$ s, on obtient $\mathrm{SNR} = \sqrt{10^7 \times 60} = 2.4\,10^4$. Chaque point de transit est détecté à $2.4\,\sigma$.
En 4 heures, on va pouvoir mesurer $\approx 4 \times 30 = 120$ points (on perd 50% du temps à lire et stocker les données). La mesure qui consiste à déterminer le rayon de la planète par la profondeur du transit est obtenu par un ajustement à 120 points de mesures, ce qui augmente la précision du résultat final. Mesurer chaque point de transit à $2.5\,\sigma$ n'est donc pas gênant et on pourrait même encore relacher cette contrainte.

2 En reprenant les chiffres de la simulation :

$$\mathrm{SNR}(1) = \frac{4141.63}{\sqrt{4141.63 + 149454.92 \times 397 + 50^2 \times 397}} = \frac{4141}{7767} \approx 0.53$$

Le terme de bruit dominant provient du flux de fond de cial parasite. Cela est normal à près de 4 μm de longueur d'onde. Vu les niveaux de signal de fond, le courant d'obscurité reste négligeable, surtout avec le faible temps de pose utilisé (voir ci-dessous).
Comme le signal de l'étoile est obtenu par soustraction du fond de ciel, le terme de bruit est compté deux fois et le SNR effectif vaut en fait $0.53/\sqrt{2} = 0.37$. Il faut donc $(20/0.37)^2 = 2848$ poses pour aboutir par co-addition de poses à un SNR final de 20 ; ce nombre obtenu est très proche des 2790 indiqués dans la simulation.
Le temps de pose total est 307 s, pour 2790 poses, ce qui donne un DIT = 0.11 s. Cette valeur est correctement choisie puisque le nombre d'électrons (essentiellement dus au fond de ciel) dans le pixel central (valeur max) est de 149483, alors que la saturation intervient pour 289000 e. On est donc quasiment à mi-dynamique.
Le seeing ϖ varie comme $\lambda^{-0.2}$. Si 0.8" est donné dans le visible, cela correspond à $\varpi \approx 0.5''$ en bande L. Avec 0.07 arcsec/pixel, cela ferait une tache de seeing de 160 pixels, même en prenant un cercle de diamètre égal à 2 fois le seeing. Par contre, si on prend en compte 0.8" en L, avec 2 fois le seeing, on obtient près de 400 pixels sous la PSF, ce qui est très similaire au résultat donné dans la simulation.

$$\mathrm{SNR(pic)} = \frac{149483.76 - 149454.92}{\sqrt{149483.76 + 2500}} = \frac{29}{390} = 0.07$$

3 En utilisant les résultats des séries et en les reportant dans les expressions de $\overline{n_\nu}$ et $\overline{n_\nu^2}$, on obtient assez simplement les expressions demandées.
$h\nu \ll kT \rightarrow \overline{n_\nu} \gg 1$ (domaine radio) et inversement.

$$\sigma_\nu^2 = \overline{n_\nu^2} - \overline{n_\nu}^2 = \frac{e^\beta + 1}{(e^\beta - 1)^2} - \frac{1}{(e^\beta - 1)^2} = \frac{e^\beta}{(e^\beta - 1)^2}$$

$$\overline{n_\nu}(1 + \overline{n_\nu}) = \frac{1}{(e^\beta - 1)}[1 + \frac{1}{(e^\beta - 1)}] = \frac{e^\beta}{(e^\beta - 1)^2} \quad \text{CQFD}$$

On obtient alors :

$$\text{SNR} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\overline{n_\nu}}}} \ll 1 \text{ pour } \overline{n_\nu} \ll 1 \ (h\nu \gg kT) \quad ; \quad \text{SNR} \approx \sqrt{\overline{n_\nu}} \quad : \text{visible, statistique de Poisson}$$

On obtient un SNR de l'ordre de 1 dans le domaine radio (fortes fluctuations statistiques).
Le terme $\overline{n_\nu}$ provient de l'aspect corpusculaire (SNR $\propto \sqrt{n}$), le terme $\overline{n_\nu}^2$ provient de l'aspect ondulatoire ($\sigma_\nu \approx \overline{n_\nu}$).
Calcul de séries classique. On utilise le fait que $S - 1 = p\,S$, puis on dérive par rapport à β.