Master-2 Astrophysique - INSTRUMENTATION

Examen 2005 - 2006 31 janvier 2006 Durée 2 Heures

Polycopié interdit - 1 page de notes A4 recto-verso autorisée - calculatrice autorisée

π	=	3.1415926					
σ_S	=	$5.67\,10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}	Stefan	1 AU	=	$150\,10^6$ km	Unité Astronomique
k	=	$1.38\,10^{-23}$ J.K^{-1}	Boltzman	1 M$_\odot$	=	$2\,10^{30}$ kg	Masse solaire
h	=	$6.626\,10^{-34}$ J.s	Planck	1 L$_\odot$	=	$3.86\,10^{24}$ W	Luminosité Solaire
e	=	$1.6\,10^{-19}$ C	électron	m$_p$	=	$1.67\,10^{-27}$	kg
c	=	$3\,10^8$ m.s^{-1}	lumière dans le vide	G	=	$6.67\,10^{-11}$	USI
ϵ_o	=	$8.84\,10^{-12}$ F.m^{-1}	Permittivité du vide				

Rapport signal / bruit en comptage de photons

Dans le cas d'observations de faible flux, les dispositifs photomultiplicateurs (PM) comptent les photons avec un bruit de lecture négligeable. La seule cause d'incertitude sur la mesure provient des incertitudes statistiques sur l'arrivée des photons.

A- Théorie

L'arrivée des photons sur le détecteur suit la statistique de Poisson. La probabilité de recevoir n photons pendant un intervalle de temps Δt est :

$$P(n,\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}$$

où $\alpha = \overline{n}$ est le nombre *moyen* de photons incidents reçus pendant Δt. On note qu'il y a une différence entre le nombre de photons n effectivement reçus pendant Δt (une mesure) et le nombre moyen $\overline{n}$ de photons reçus pendant Δt (moyenne de N mesures).

1) En utilisant l'expression de $P(n,\alpha)$ ci-dessus, calculer $\overline{n} = \Sigma_0^\infty n P(n,\alpha)$ et montrer que l'on a effectivement $\overline{n} = \alpha$. On utilisera le fait que :

$$e^x = \Sigma_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

2) Calculer de même $\overline{n^2}$. Montrer d'abord :

$$\Sigma_0^\infty n^2 P(n,\alpha) = e^{-\alpha} \Sigma_0^\infty \frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{n!}$$

Puis :

$$\Sigma_0^\infty \frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{n!} = \alpha^2 \Sigma_1^\infty \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha \Sigma_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!}$$

NB. les calculs ci-dessus utilisent souvent les changement de variable $n \to n-1$ (avec les changements de domaines de variation) et le fait que certains termes des sommes sur n ne contribuent pas à la somme globale (pour $n = 0$).

En déduire que $\overline{n^2} = \alpha^2 + \alpha$.

3) Exprimer alors l'écart-type σ de n en fonction de α et montrer que le rapport signal sur bruit SN$_p$ pour les photons s'exprime bien comme $\sqrt{\overline{n}}$.

Dans le processus de détection, chaque photon a une probabilité η de donner lieu à un électron, de sorte que le comptage des électrons suit aussi une loi de Poisson.

4) Si $\overline{n_e}$ est le nombre moyen d'électrons détectés, quel est le rapport signal sur bruit SN$_e$ des électrons ? Exprimer SN$_e$ en fonction de SN$_p$. Conclusion sur l'influence de η dans un détecteur moderne.

B- Mesures

Dans les questions 5 et 6, on considére un flux de photons incident de $10^4\, s^{-1}$. On utilise les photomultiplicateurs "bleu" et "rouge" dont les rendements quantiques sont donnés sur la figure (1).

NB. Lorsque les valeurs utilisée dans les calculs proviennent d'une mesure sur graphe, on indiquera l'incertitude sur la mesure.

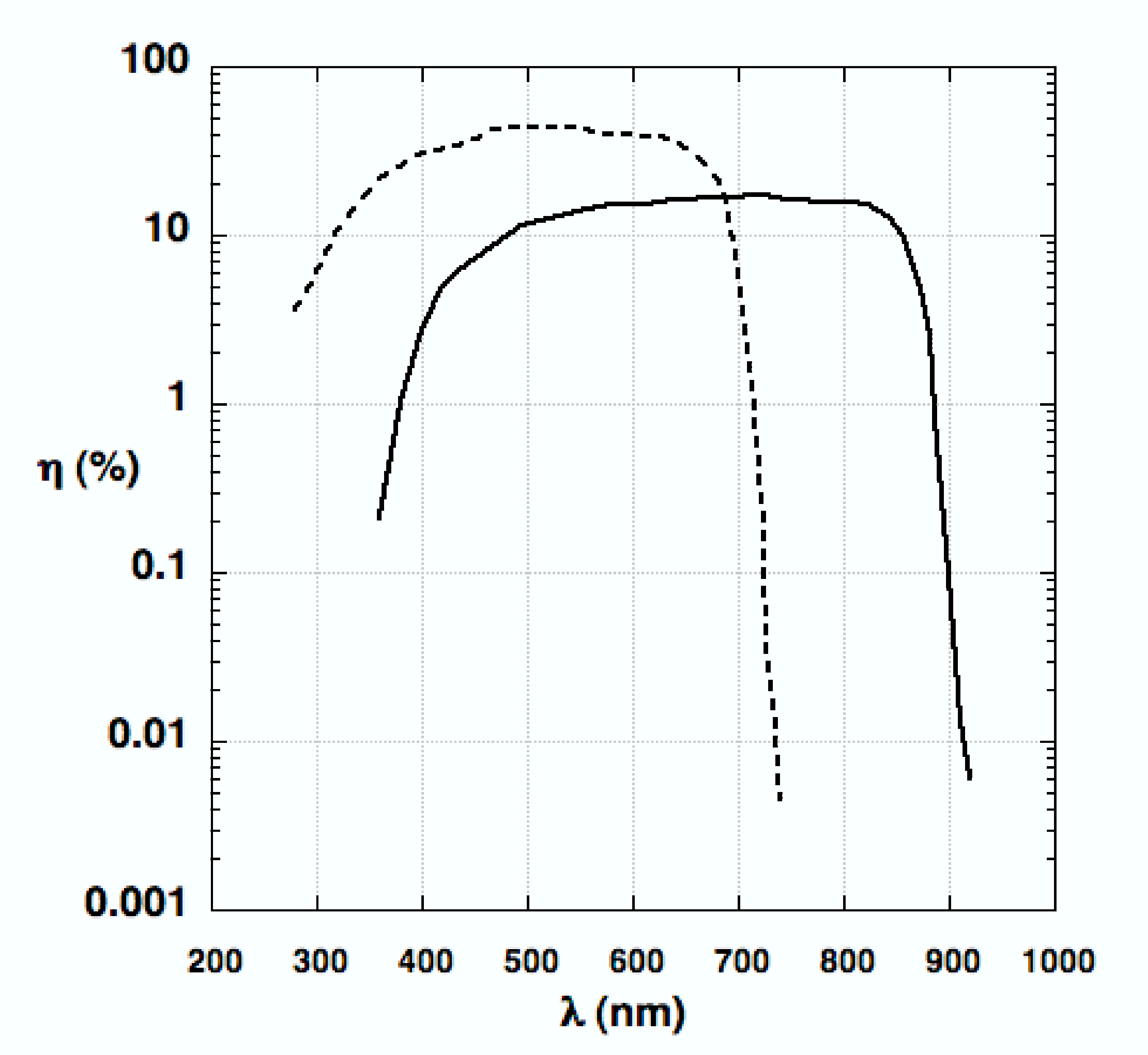

Figure 1: Rendement quantique de 2 PM en fonction de λ

5) Déterminer quel PM est 'bleu' et quel PM est 'rouge' en justifiant l'appellation des deux PM. Donner les longueurs d'onde de coupure de chaque PM. Calculer le rapport signal sur bruit SN_e obtenu si on pose 0.1 s avec le PM bleu à 500 nm.

6) Que devient le rapport signal sur bruit si on utilise le PM bleu à 725 nm ?

On va maintenant prendre en compte l'influence du courant d'obscurité. Aux photoélectrons n_e s'ajoutent des électrons parasites provenant du détecteur. On note $\overline{d}$ le nombre moyen d'électrons d'obscurité pendant une mesure. Une mesure s'effectue alors en 2 temps : a) mesure du signal total $A = \overline{n_e} + \overline{d}$; b) mesure du courant d'obscurité

$B = \overline{d}$. On obtient $\overline{n_e}$ par soustraction (A-B).

7) Montrer que le rapport signal sur bruit devient :

$$\mathrm{SN}_e = \frac{\overline{n_e}}{\sqrt{\overline{n_e} + 2\overline{d}}} \tag{1}$$

8) En déduire SN_e en fonction du nombre moyen de photons détectés $\overline{n}$

9) Calculer SN_e dans les conditions suivantes : $\overline{n} = 5\,10^4$ photons comptés en 1 seconde, avec le PM rouge à 880 nm ; on suppose que ce PM a un courant d'obscurité de 1.6 fA.

10) Que devient SN_e si le rendement quantique est doublé ? Si le courant d'obscurité est doublé ? Conclusion.

11) Rappelez la définition du NEP. Soit $\overline{n}$ le nombre de photons correspondant au NEP.

12) Si $\overline{n}$ est obtenu à la longueur d'onde λ pendant le temps de pose t_{int}, montrer que dans le cas étudié dans l'équation (1), le NEP correspond au terme $\eta\overline{n}$ solution de l'équation du second degré :

$$(\eta\overline{n})^2 - (\eta\overline{n}) - (2\overline{d}) = 0$$

13) On suppose $\overline{d} \gg 1/8$ (est-ce raisonnable ?) ; en ne prenant en compte que la solution positive, montrer que le terme $(\eta\overline{n})$ recherché vaut $\approx \sqrt{2\overline{d}}$.

14) Exprimer le NEP en fonction de $\overline{n}$, du temps de pose et de la longueur d'onde d'observation.

15) En déduire l'expression NEP(λ) pour un détecteur à comptage de photons ayant un courant d'obscurité $i_D = 1.6\,\mathrm{fA}$ et un rendement quantique de 10%. On présentera l'expression sous la forme NEP = Cst(W) /$\lambda(\mu\mathrm{m})$.

16) Tracer la courbe NEP(λ) pour le PM rouge dans la zone où son rendement quantique est > 10%, pour des poses de 1 seconde. Interpréter la forme de la courbe.

17) Le NEP dépend-il de t_{int} ? Si t_{int} est multiplié par 2, comment est modifé le NEP ? Interprétation.

18) Comment varie le NEP avec η ? Interprétation.

19) Tracer les courbe des réponses en courant (A/W) pour les deux PM, entre 350 et 650 nm pour le PM bleu et entre 500 et 800 nm pour le PM rouge.