

Notes générales : • La plupart des questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. • Un certain nombre de grandeurs et de constantes physiques sont rappelées explicitement ou par analogie. • Pour chaque question, on s'efforcera de conserver les notations de l'énoncé • On distinguera soigneusement les applications littérales et numériques • Lorsque certaines valeurs numériques manquent, fournir l'estimation qui vous semble la plus plausible.

CONSTANTES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

σ_S	$= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$	Constante de Stefan
k	$= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$	Constante de Boltzman
h	$= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$	Constante de Planck
e	$= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Charge de l'électron
c	$= 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$	Vitesse de la lumière dans le vide
$1 M_\odot$	$= 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	masse solaire

TRIGONOMÉTRIE

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

BANDES PHOTOMÉTRIQUES DU VISIBLE ET DU PROCHE IR

Bande	V	R	I	J	H	K	L	M
$\lambda_o(\mu\text{m})$	0.55	0.7	0.9	1.25	1.65	2.2	3.8	4.8
$\Delta\lambda(\mu\text{m})$	0.089	0.22	0.24	0.38	0.34	0.48	0.55	0.80
Flux ref (Jy)	3810	2880	2240	1520	980	620	280	153
Temps de cohérence (ms)						50	100	140
Paramètre r_o (cm)						30	50	70

LOI DU CORPS NOIR

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad ; \quad B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

On rappelle que pour une PSF gaussienne de largeur à mi-hauteur ϖ et d'amplitude A , le flux intégré sous la gaussienne est sensiblement égal au produit $A\varpi^2$.

On observe à la longueur d'onde λ sur un instrument de diamètre D et on s'intéresse à la façon dont varie le rapport signal sur bruit (S/N) dans diverses configurations d'observation à haute résolution angulaire dans le proche infrarouge.

1 Imagerie

- Donner l'expression littérale de l'échelle focale par pixel nécessaire à l'analyse d'une image à la limite de diffraction.

- Que devient cette contrainte si les observations sont limitées par le seeing ϖ ? Exprimer ϖ en fonction de λ et du paramètre de Fried r_o .

On rappelle que le diamètre des cellules de cohérence r_o ainsi que le temps de cohérence de la turbulence τ_c varient comme $\lambda^{6/5}$.

- En déduire le seeing dans la bande L si ϖ vaut 0.8'' dans le visible.
- On suppose qu'on observe une source ponctuelle de flux F sous un seeing ϖ . Comment variera le rapport $S/N(\lambda)$ sur le pixel central si la PSF est supposée gaussienne dans le cas où on est limité par le bruit de signal ? On effectuera le calcul pour un flux $F(\lambda)$ constant ; pour un flux de corps noir (dans le cas $h\nu \ll kT$).
- Déterminer la magnitude limite à 1σ en fonction du bruit de lecture (par pixel) σ et du seeing ϖ . Est-il nécessaire ici de faire l'hypothèse qu'on est limité par le bruit de lecture ? Pourquoi ?

2 Interférométrie

- Rappeler le principe de l'imagerie par interférométrie à deux télescopes. Quelle relation existe entre le contraste des franges et la visibilité ? Qu'appelle-t-on degré complexe de cohérence du rayonnement ? Comment est-il relié à la distribution d'intensité de la source observée ?

Lorsqu'on dispose d'un seul télescope, l'interférométrie par retournement de pupille consiste à faire interférer l'image de la pupille du télescope avec son image renversée de 180° , comme indiquée sur la figure 1.

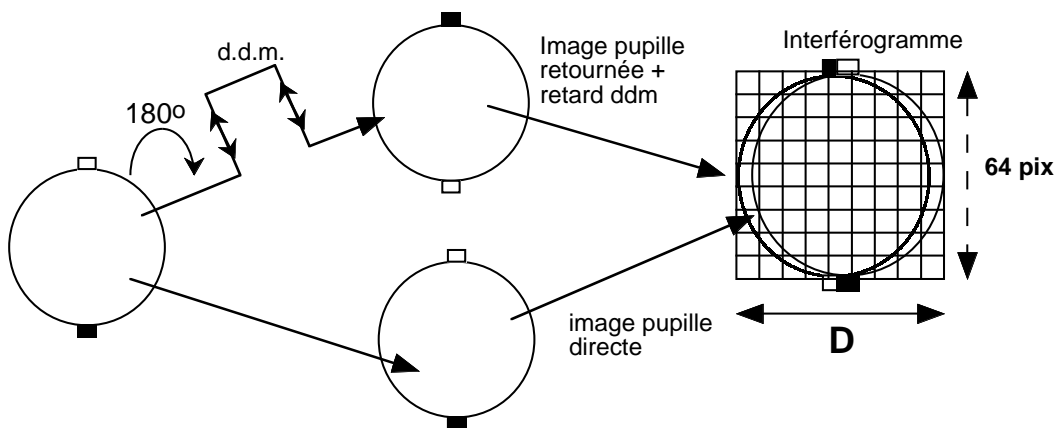


Figure 1: Schéma de principe de l'interférométrie à retournement de pupille.

Chaque partie de la pupille interfère ainsi avec la partie diamétralement opposée ; de plus, la pupille retournée subit un retard de marche réglable dans l'instrument. La superposition des deux pupilles est ensuite imagée sur un détecteur infrarouge à deux dimensions. On peut ainsi analyser les fréquences spatiales présentes dans le front d'onde incident sur la pupille du télescope, pixel par pixel, comme si on disposait d'un réseau de petits "télescopes".

On suppose qu'on travaille avec un détecteur de $N \times N$ pixels ($N = 64$) sur lequel on place exactement l'interférogramme formé de la pupille et de son image retournée (voir schéma de principe sur la figure 1).

- Pourquoi réalise-t-on l'interférogramme avant la détection ?
- Combien de cellules de turbulence indépendantes pourra-t-on ainsi analyser dans le front d'onde incident ? En déduire le seeing maximum *dans le visible* au delà duquel le front d'onde sera sous-échantillonné si on effectue les observations à la longueur d'onde $\lambda = 3.8\mu\text{m}$ (bande L) sur un télescope de diamètre $D = 4.20\text{ m}$ (télescope WHT). Quelle surface de la pupille voit chaque pixel ?

L'intensité de l'interférogramme ainsi détecté peut s'exprimer ainsi (pour chaque pixel xy du détecteur, et après intégration pendant un temps de pose donné) :

$$I_{xy} = C_{xy} + \eta B_{xy} + \eta P_{xy} [1 + |\gamma_{xy}| \cos(\phi_{xy} + \phi_{xy}^a + \phi_{\text{ddm}})] \quad (1)$$

- En quelle unité est exprimée I dans l'équation (1) ? Exprimer le facteur multiplicatif nécessaire pour relier cette unité à un flux (en Jy).

Par la suite, on omettra le repérage xy des pixels pour traiter les images dans leur ensemble. $|\gamma|$ et ϕ sont le module et la phase du degré complexe de cohérence $\vec{\gamma}$ dont la transformée de Fourier donne la distribution d'intensité de la source observée. L'équation (1) comprend d'autres termes pour tenir compte des conditions réelles d'observation : C est le terme de courant d'obscurité ; B l'émission de fond ciel ; η est le rendement quantique du détecteur ; P est le flux photométrique reçu de la source. ϕ^a est le terme de phase perturbatif dû à l'atmosphère et ϕ_{ddm} est le terme de phase introduit par la différence de marche entre la pupille directe et la pupille retournée.

Plusieurs méthodes permettent d'extraire $|\gamma|$ et ϕ dans l'équation (1) ; l'une d'elle consiste à moduler la ddm pour donner à ϕ_{ddm} plusieurs valeurs connues. Dans la méthode dite "ABCD", on mesure 4 poses (4 images de l'interférogramme) en utilisant 4 valeurs de ddm décalées de $\lambda/4$ (figure 2) ; cet ensemble s'appelle une "série".

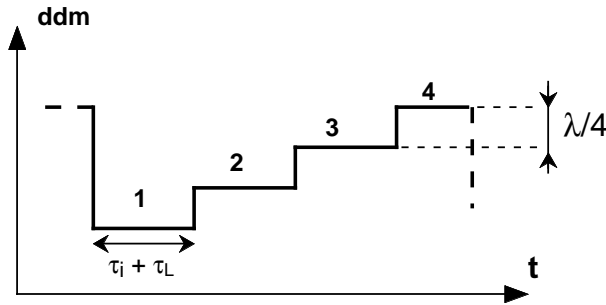


Figure 2: Modulation de la ddm dans la méthode ABCD.

Une contrainte essentielle de cette méthode est de mesurer les 4 poses ($i = 1, 2, 3, 4$) de la série pendant que la turbulence est "figée", c'est à dire que ϕ^a reste identique $\forall i$, pendant le temps de cohérence τ_c .

- Justifiez cette contrainte. Que se passerait-il si elle n'était pas respectée ?
- Montrer que pour un nombre de cellules de turbulence et un temps de cohérence fixés, la bande passante B_P (en pixel/sec) nécessaire pour analyser toutes les cellules de turbulence sur la pupille, varie comme $\lambda^{-18/5}$. Si r_o et τ_c valent respectivement 50 cm et 100 ms dans la bande L, calculer B_P dans la bande K et montrer que les conditions d'observation y sont plus de 5 fois plus difficiles qu'en L.
- On suppose que le détecteur fonctionne par intégration puis lecture. Si τ_i est le temps d'intégration par pose, et τ_L le temps de lecture, quelle relation doit-on respecter entre τ_i , τ_L et τ_c ? En déduire le temps de pose maximum qu'on pourra utiliser dans la bande L si le temps de lecture du détecteur est de 5 ms. En pratique, on utilisera $\tau_i = 20$ ms. Est-ce raisonnable ?
- En prenant la première pose comme origine, montrer que les 4 valeurs de ϕ_{ddm} peuvent s'écrire comme $\pi/2, \pi$ et $3\pi/2$. Dans la suite, on note I_i la pose correspondant à une ddm de $(i - 1)\pi/2$.

- Donner l'expression des 4 poses I_i à partir des termes intervenant dans l'équation (1). Montrer que la mesure des 4 poses permet d'accéder aux termes X et Y ci-dessous :

$$X = \frac{1}{2}(I_1 - I_3) = \eta P |\gamma| \cos(\phi + \phi^a) \quad (2)$$

$$Y = \frac{1}{2}(I_4 - I_2) = \eta P |\gamma| \sin(\phi + \phi^a) \quad (3)$$

$$(4)$$

- En déduire comment extraire le produit $\eta P |\gamma|$ à partir de la mesure des poses I_i . Pourquoi le terme de phase n'intervient-il plus ?

- Montrer que la mesure du terme $\frac{1}{4} \sum_1^4 I_i$ sur la source (P) et sur le fond de ciel voisin ($P = 0$) permet d'estimer indépendamment les termes ηP et $C + \eta B$. En déduire la méthode complète pour déterminer le module du degré complexe de turbulence $|\gamma|$.

Les caractéristiques du montage optique, du détecteur et de la chaîne électronique utilisée sont les suivantes :

Transmission optique (atmosphère + instrument) $\theta = 0.05$; capacité de stockage $N_{\text{STK}} = 10^6$ électrons ; bruit de lecture $\sigma = 100$ électrons ; conversion A/D sur 16 bits ; temps de conversion par pixel $t_{\text{adc}} = 1 \mu\text{s}$; taux d'écriture sur disque $T_T = 500$ Koctets/sec.

- En supposant la gamme d'entrée du convertisseur ADC calée sur toute la dynamique du détecteur, donner une estimation du gain du système en électron/ADU. Le bruit du détecteur est-il correctement échantillonné ?

- Vérifier que la bande passante d'acquisition du système permet bien d'observer en bande L comme calculé précédemment. Peut-on utiliser ce système en bande K ?

- On cherche maintenant à estimer les performances de la méthode. Donner l'expression de la magnitude limite en L à 1σ , en détaillant bien les étapes du calcul.

En pratique, les observations sur α Tau (L=-2.98) donnent un signal photométrique moyen par pixel de 3890 ± 10.3 ADU.

- Montrer que cette mesure est cohérente avec la détermination théorique précédente.

On s'intéresse maintenant à l'estimation de la phase.

- Montrer que X et Y permettent également d'évaluer un estimateur $\varphi + \varphi^a$ de $\phi + \phi^a$. Donner l'expression de $\varphi + \varphi^a$ en fonction de I_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Quelle est la différence entre $\phi + \phi^a$ et $\varphi + \varphi^a$?

ϕ est un terme constant qui dépend uniquement de la structure de la source observée tandis que ϕ^a est un terme de phase aléatoire à moyenne $\langle \phi^a \rangle$ nulle, d'une série de poses I_i à l'autre.

- Expliquer rapidement l'origine de ϕ^a . Pourquoi ne peut-on pas extraire ϕ par l'opération $\phi = \langle \varphi + \varphi^a \rangle$?

La figure 3 donne les fluctuations de la "vraie" phase $\phi + \phi^a$ du front d'onde sur la pupille du télescope (avant détection et extraction par la méthode que vous avez proposée ci-dessus) pour 5 séries successives. • A t-on $\phi = \langle \phi + \phi^a \rangle$?

- Indiquer quelles valeurs $\varphi + \varphi^a$ seront déterminées par l'expérience (à partir des X et Y) ; on pourra rendre la figure avec la copie en indiquant les valeurs demandées dessus. Proposer une

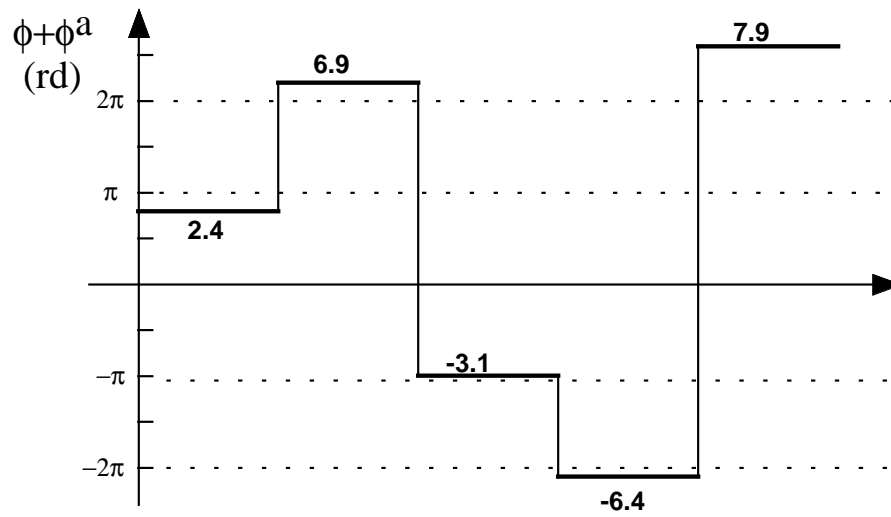


Figure 3: Valeurs de la “vraie” phase $\phi + \phi^a$ du front d’onde sur la pupille.

méthode pour “suivre” la phase de proche en proche malgré les discontinuités introduites par ϕ^a .
 Quelle condition doit-on respecter ? Quelle conséquence cela entrainera t-il sur le rapport S/N ?