1 Tension, Courant, Puissance active

$$\begin{aligned}
P &= \Re(VI^*) = \frac{1}{2}(VI^* + V^*I) && (1)\\
V &= v_x + jv_y && (2)\\
I &= i_x + ji_y && (3)\\
VI^* &= v_x i_x + v_y i_y + j(i_x v_y - v_x i_y) && (4)\\
V^*I &= v_x i_x + v_y i_y + j(v_x i_y - v_y i_x) && (5)\\
\Re(VI^*) &= \Re(V^*I) = v_x i_x + v_y i_y = \frac{1}{2}(VI^* + V^*I) && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}$$

La tension et le courant dans la ligne s'écrivent :

$$\begin{aligned}
V &= V_i + V_r = \sqrt{R_c}(a+b) && (8)\\
I &= I_i - I_r = \frac{a-b}{\sqrt{R_c}} && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}$$

et les variables réduites :

$$\begin{aligned}
v &= \frac{V}{\sqrt{R_c}} = a + b && (11)\\
i &= \frac{I}{\sqrt{R_c}} = a - b && (12)
\end{aligned}$$

2 Puissance incidente et réfléchie, coefficient de réflexion

La puissance mise en jeu est

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}(VI^* + V*I) && (13)\\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{R_c}(a+b)\frac{(a-b)^*}{\sqrt{R_c}}) + \sqrt{R_c}(a+b)^*\frac{(a-b)}{\sqrt{R_c}}) && (14)\\
&= \frac{1}{2}(aa^* - bb^* - ab^* + ba^* + aa^* - bb^* - a^*b + b^*a) && (15)\\
&= |a|^2 - |b|^2 && (16)
\end{aligned}$$

P se décompose en *puissance incidente* :

$$P_i = |a|^2 = \frac{V_i^2}{R_c}$$

à laquelle se soustrait la *puissance réfléchie* :

$$P_r = |b|^2 = \frac{V_r^2}{R_c}$$

Ce calcul est repris dans la section 3 ci-dessous avec les variables réduites.

Sur une impédance Z, le coefficient de réflexion est :

$$\rho = \frac{Z - R_c}{Z + R_c} \quad (17)$$

$$= \frac{z-1}{z+1} \quad (18)$$

3 Puissance injectée par un générateur

Sur la figure 1, on a placé un générateur réel (e_g, Z_g) qui débite une onde a_g dans un quadripôle [S], via une ligne d'impédance caractéristique R_c.

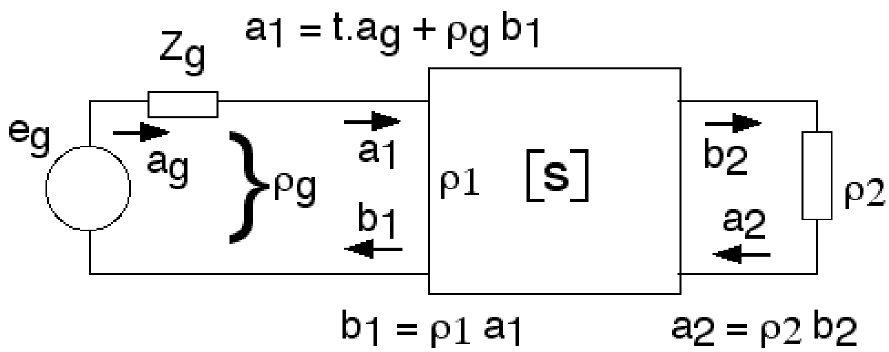

Figure 1:

L'onde a_1 injectée dans le quadripôle est la superposition de l'onde fournie par le générateur (avec un certain facteur de transmission t) et de l'onde réfléchie sur l'impédance Z_g (coefficient de réflexion $\rho_g = (Z_g - R_c)/(Z_g + R_c)$). Si le générateur est adapté ($Z_g = R_c$, le coefficient $\rho_g = 0$ et l'onde a_1 ne dépend que de a_g).

La puissance fournie au quadripôle s'obtient en écrivant l'expression de la tension et du courant à l'entrée (avec les variables réduites) :

$$p = \frac{1}{2}[v_1^* i_1 + v_1 i_1^*] \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2}[(a_1 + b_1)^*(a_1 - b_1) + (a_1 + b_1)(a_1 - b_1)^*] \quad (20)$$

$$= |a_1|^2 - |b_1|^2 \quad (21)$$

$$= |a_1|^2(1 - |\rho_1|^2) \quad (22)$$

On cherche à exprimer la puissance transmise en fonction de l'onde émise par le générateur. On calcule l'onde a_1 injectée dans le quadripôle :

$$a_1 = t a_g + \rho_g b_1 \quad (23)$$

$$
\begin{aligned}
&= ta_g + \rho_g \rho_1 a_1 && (24)\\
&= \frac{ta_g}{1-\rho_g\rho_1} && (25)\\
& && (26)
\end{aligned}
$$

Et la puissance injectée s'écrit alors en remplaçant l'expression de a_1 (equation 25) dans l'équation 22 :

$$
p = \frac{|ta_g|^2}{|1-\rho_g\rho_1|^2}(1-|\rho_1|^2) \tag{27}
$$

La puissance maximum transmissible par le générateur au quadripôle est obtenue pour $\rho_1 = \rho_g^*$ (adaptation) :

$$
p_{\max} = \frac{|ta_g|^2}{|1-|\rho_1|^2|^2}(1-|\rho_1|^2) = \frac{|ta_g|^2}{(1-|\rho_1|^2)^2}(1-|\rho_1|^2) = \frac{|ta_g|^2}{1-|\rho_1|^2} \tag{28}
$$

4 Transmission de puissance depuis le générateur

Sur la figure 1, on peut établir la relation entre l'onde a_g émise par le générateur et l'onde a_1 injectée dans le quadripole. Pour cela, on décompose l'impédance de sortie du générateur en deux partie : $Z_g = R_c + (Z_g - R_c)$ (cf. figure 2), autrement dit : $z_g = 1 + (z_g - 1)$ (en impédance réduite). On calcule le passage de a_g à a_1 en utilisant l'expression de la matrice S d'une impédance série. On effectue le calcul en notant les ondes incidentes et réfléchies du coté 1 et du coté 2 comme a'_1, b'_1, a''_1, b''_1. La correspondance avec le calcul précédent se fera en prenant $a'_1 \equiv a_g$, et $b''_1 \equiv a_1$:

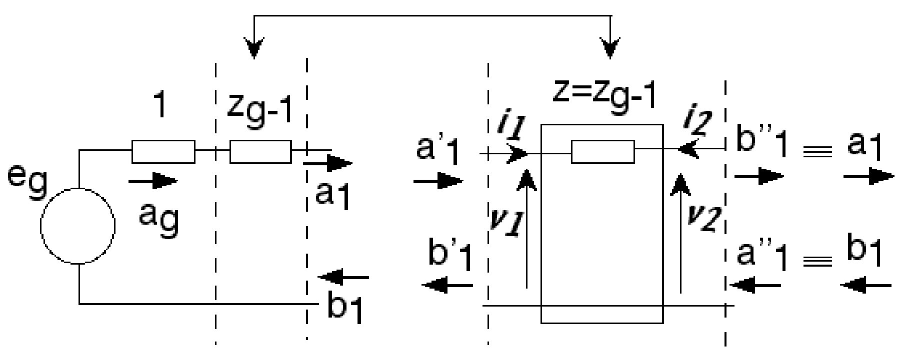

Figure 2:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a'_1 + b'_1 && (29)\\
v_2 &= a''_1 + b''_1 && (30)\\
i_1 &= a'_1 - b'_1 && (31)\\
i_2 &= a''_1 - b''_1 && (32)\\
i_1 &= -i_2 && (33)\\
v_1 &= v_2 + z i_1 && (34)
\end{aligned}
$$

d'où on tire :

$$b'_1(2+z) = za'_1 + 2a''_1 \quad (35)$$
$$b''_1(2+z) = za''_1 + 2a'_1 \quad (36)$$

Et la matrice S de l'impédance en série :

$$\begin{pmatrix} \frac{z}{z+2} & \frac{2}{z+2} \\ \frac{2}{z+2} & \frac{z}{z+2} \end{pmatrix}$$

avec $z = z_g - 1$, on obtient $a_1 = 2a_g/(z_g+1)$ (en remplaçant $b"_1 \equiv a_1$ et $a'_1 \equiv a_g$ dans l'équation 36). On en déduit que le coefficient de transmission est $t = 2/(z_g+1)$; on a une transmission maximum ($t = 1$) lorsque le générateur est adapté ($z_g = 1$).

5 Puissance délivrée à la charge

La charge reçoit la puissance p en fonction des variables réduites v_2 et i_2. Attention, pour la charge, les variables a_2 et b_2 (définies pour [S]) sont inversées par rapport au sens habituel : l'onde incidente sur la charge est b_2 et l'onde réfléchie est a_2. On a alors (avec des calculs indentiques aux équations 19 à 22 en inversant a et b :

$$p = \frac{1}{2}[v_2 i_2^* + v_2^* i_2] \quad (37)$$
$$= \frac{1}{2}[(b_2+a_2)(b_2^* - a_2^*) + (b_2^* + a_2^*)(b_2 - a_2)] \quad (38)$$
$$= |b_2|^2 - |a_2|^2 \quad (39)$$
$$p = |b_2|^2(1 - |\rho_2|^2) \quad (40)$$

où ρ_2 est le coefficient de réflexion sur la charge : $\rho_2 = (z_L - 1)/(z_L + 1)$. Le calcul de b_2 s'effectue à l'aide de la matrice de transfert du quadripole :

$$\begin{aligned} a_1 &= ta_g + b_1\rho_g \\ b_1 &= S_{11}a_1 \qquad \text{puisque } S_{12} \simeq 0 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\ a_2 &= \rho_2 b_2 \end{aligned}$$

Des deux dernières équation on tire :

$$b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22}\rho_2}a_1$$

Et des deux premières :

$$a_1 = ta_g + S_{11}\rho_g a_1 = \frac{ta_g}{1 - S_{11}\rho_g}$$

d'où on tire b_2 en fonction de a_g et la puissance transmise à la charge (équation 40) :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{S_{21}ta_g}{(1 - S_{11}\rho_g)(1 - S_{22}\rho_2)} \\ p &= \frac{|S_{21}|^2|ta_g|^2(1 - |\rho_2|^2)}{|1 - S_{11}\rho_g|^2|1 - S_{22}\rho_2|^2} \end{aligned} \tag{41}$$

6 Gain Transducique

A la sortie du quadripôle, le rapport entre la puissance transmise (equation 41) et la puissance maximum disponible (equation 28) est appelé le *gain transducique* :

$$\text{Gain Transducique} = \frac{\text{puissance transmise}}{\text{puissance maximum}} = |S_{21}|^2 \frac{(1 - |\rho_g|^2)(1 - |\rho_2|^2)}{|1 - S_{11}\rho_g|^2|1 - S_{22}\rho_2|^2} \tag{42}$$

Ce gain est maximum lorsque le quadripole est adapté *en entrée et en sortie* : $S_{11} = \rho_g^*$ et $S_{22} = \rho_2^*$ et vaut :

$$G_{\max} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |S_{11}|^2)(1 - |S_{22}|^2)}$$