L3 Physique EXAMEN Astrophysique 28 mai 2009

DURÉE TROIS HEURES - SANS DOCUMENTS
CALCULATRICE ET PAGE DE NOTES A4 RECTO-VERSO AUTORISEES

Toutes les données numériques nécessaires sont portées dans la table ci-dessous. Elle peuvent être utilisées à la demande selon les besoins de tel ou tel exercice.
Les exercices sont totalement indépendants. A l'intérieur d'un exercice donné, les questions sont souvent très largement indépendantes. Il est conseillé de parcourir l'ensemble du sujet avant de démarrer.
Un barême approximatif est indiqué pour chaque exercice.
Les parties indiquées avec une étoile ($\star$) sont un peu plus difficile et pourront être traitées dans un deuxième temps.

La présentation sera noté sur 0.5 point supplémentaires

π	=	3.1415926		$T_\odot$	=	6000 K	T surface soleil
σ_S	=	$5.67\,10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}	Stefan	1 $R_\odot$	=	$7\,10^8$ m	Rayon Solaire
k	=	$1.38\,10^{-23}$ J.K^{-1}	Boltzman	1 $M_\odot$	=	$2\,10^{30}$ kg	Masse solaire
h	=	$6.626\,10^{-34}$ J.s	Planck	1 $L_\odot$	=	$3.86\,10^{26}$ W	Luminosité Solaire
e	=	$1.6\,10^{-19}$ C	charge de l'électron	1 AU	=	$150\,10^6$ km	Unité Astronomique
c	=	$3\,10^8$ m.s^{-1}	vitesse lumière (vide)	1 pc	=	$3.1\,10^{16}$ m	parsec
ϵ_o	=	$8.84\,10^{-12}$ F.m^{-1}	Permittivité du vide	1 AL	=	$9.5\,10^{15}$ m	Année Lumière
G	=	$6.7\,10^{-11}$ J.m.kg^{-2}	Constante gravitation	1 an (moyen)	=	$3.16\,10^7$ s	année moyenne
a	=	$7.56\,10^{-16}$ J.m^{-3}.K^{-4}	2e constante de Stefan	H_o	=	75 km.s^{-1}.Mpc^{-1}	Constante Hubble
m_H	=	$1.67\,10^{-27}$ kg	masse du proton	H_o^{-1}	=	13 milliards d'années	Temps de Hubble

1- Physique Stellaire, Formation stellaire [11]

Première partie
On s'intéresse à la variation de divers paramètres physiques lors de l'effondrement d'un nuage d'hydrogène moléculaire pour former une étoile. On considère un modèle de nuage sphérique homogène de rayon, masse et température initiaux R_o, M_o, et T_o (supposée uniforme).

1.1 Indiquer quels paramètres il faut comparer pour déterminer si le nuage va s'effondrer ou pas.

1.2 Calculer la valeur initiale de la masse volumique ρ (supposée uniforme dans le nuage) pour un nuage de 1 $M_\odot$ et de rayon 1 pc.

1.3 On suppose que le nuage s'effondre. Indiquer comment vont varier les paramètres R, M, ρ et T.

1.4 Indiquez de manière qualitative jusqu'à quand l'hypothèse de température uniforme peut tenir et pourquoi.

Les modèles numériques (eg. Larson 1969) montrent que lors de l'effondrement d'un nuage de gaz, le rayon R du nuage décroit mais la masse volumique reste *uniforme* au sein du nuage et croit comme le carré du temps : $\rho \propto t^2$. La table 1 donne un aperçu des résultats de ces simulations numériques. Le temps est en unité arbitraires.

1.5 Utilisez les valeurs de la table 1 et le graphe de la figure 2 pour montrer que la variation de la masse volumique est bien en t^2 (diagramme log-log, **figure 2 à rendre avec la copie**).

1.6 Utilisez la valeur initiale de ρ calculée précédemment pour indiquer sur la figure log-log le point de départ de la simulation pour ce nuage particulier.

temps	Masse volumique (kg.m^{-3})
0.1	10^{-20}
0.3	10^{-19}
0.5	$3\,10^{-19}$
1	10^{-18}
3	10^{-17}
10	10^{-16}

Table 1: Effondrement de nuage.

Lors de l'effondrement ρ et T augmentent et R diminue mais la masse de l'objet reste constante.

1.7 Si ρ varie comme t^2, montrer que R varie comme $t^{-\alpha}$. Calculer α.

1.8 Indiquez sur la même figure 2 que ρ, le domaine de variation de R (on portera l'échelle de R sur l'axe de droite de la figure). Si R vaut 1 pc au début de la simulation, quelle valeur atteint-il pour $t = 10$?

On s'intéresse maintenant à la variation de la profondeur optique τ du nuage en effondrement. τ est définie depuis le bord du nuage jusqu'au centre.

1.9 Si κ est l'opacité du matériau du nuage, donnez l'expression de τ en fonction de κ et des paramètres physiques pertinents du nuage.

1.10 Calculez la valeur initiale de τ si $\kappa = 200\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$. Le nuage est-il initialement optiquement mince ou épais ?

1.11 Montrer que τ varie comme t^{β}. Que vaut β ?

1.12 Calculer comment varie τ en fonction de R. Justifiez.

1.13 Utilisez une fois encore la figure log-log pour porter la variation de τ au cours du temps. En déduire la valeur de τ à la fin de la simulation (t=10). Conclusion sur l'état du nuage à la fin de la simulation ($t = 10$).

1.14 Sur la figure log-log, indiquez approximativement à quelle époque l'hypothèse de température uniforme cesse d'être valable.

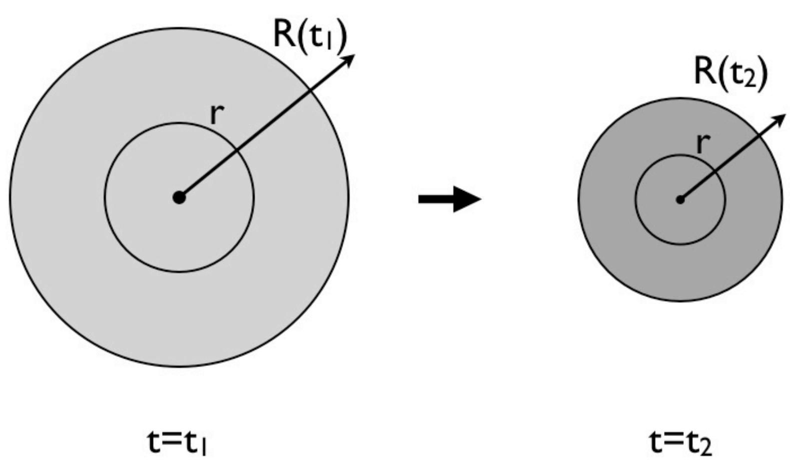

Figure 1: Effondrement d'un nuage sphérique homogène

Deuxième partie ($\star$)
On souhaite maintenant préciser comment la masse volumique du nuage peut rester uniforme lors de l'effondrement.

On distingue la valeur R du rayon externe du nuage $R = R(t)$ et la variable r qui sert à repérer la position à l'intérieur du nuage. Le problème est à symétrie sphérique. On note $u = dr/dt$ la vitesse d'effondrement du gaz à la coordonnée r l'instant t.

1.15 Calculez l'expression de u et du/dt pour tout r à l'instant t_o initial de l'effondrement. Que représente en fait du/dt ?

1.16 En utilisant la relation fondamentale de la dynamique et le théorème de l'énergie cinétique, montrer que u et du/dt sont proportionnelle au rayon r dans le nuage. En déduire que u reste proportionnelle à r au cours de l'effondrement.

Conclure.

2- Cosmologie [9]

Première partie
Les modèles cosmologiques standards peuvent être décrits à partir des variables r et t ainsi que le facteur d'expansion $a(t)$, mais aussi en fonction des paramètre cosmologiques que sont la constante de Hubble H et le facteur de décélération q.

2.1 Rappeler les expressions de H et q en fonction de $a(t)$. Montrer que q peut s'écrire comme :

$$-\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}$$

2.2 Dans le cas d'un modèle Einstein de Sitter (coefficient de courbure $k = 0$ et $\rho = \rho_o a^{-3}$), rappeler sans calcul l'expression de $a(t)$. En déduire l'expression de la constante de Hubble et du facteur de décélération. Comment interprétez-vous physiquement un facteur de décélération positif ?

2.3 Dans quel(s) type(s) de modèle(s) trouvera t-on des valeurs de $q < 0$? A quel comportement général de l'expansion de l'univers cela correspond-il ?

Le modèle de l'état stationnaire est aujourd'hui abandonné mais on exploite encore des modèles de cosmologie dits de "quasi état stationnaire" (*Quasi Steady State Cosmology*, ou QSSC, cf. Banerjee et al., 2000, AJ 119, 2583). Dans un tel modèle, l'univers est plat et on considère que les paramètre cosmologiques sont des constantes.

2.4 Si $H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ est constante égale à H_o, en déduire l'expression de $a(t)$ correspondante, en considérant que la valeur actuelle (à $t = t_o$) du facteur d'expansion est a_o.

2.5 Montrer qu'on obtient le même résultat à partir de l'équation de Friedman :

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G\rho a^2}{3}$$

en prenant $k = 0$ et $\rho = \rho_o = \text{Cst}$.
En déduire l'expression de la masse volumique ρ_o en fonction de H_o.

2.6 En déduire l'expression du facteur de décélération q. Un tel univers est-il en train d'accélérer ou de ralentir son expansion ?

Deuxième partie
On utilise la métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)dr^2$$

pour calculer la variation de r avec le redshift z dans un tel modèle.

2.7 Dans l'équation ci-dessus, indiquez quelle(s) sont les simplifications effectuées et pourquoi.

2.8 Utilisez l'expression de la métrique pour retrouver l'expression de la coordonnée r d'un point d'où est émis un photon reçu aujourd'hui. Montrez, en explicitant bien les hypothèses, qu'on obtient :

$$r = \int_{t_e}^{t_o} \frac{c\,dt}{a(t)} \tag{1}$$

2.9 En remplaçant $a(t)$ par son expression dans le modèle QSSC, exprimer r en fontion de t_e et t_o.

2.10 En déduire l'expression de r en fonction de z (rappel : $a_o/a = 1/a = 1 + z$).

2.11 Montrer qu'en prenant $a_o = 1$ si besoin, cette expression redonne la loi de l'expansion de Hubble à faible distance : $v = H.r$.

Troisième partie ($\star$)

2.12 Dans l'équation 1, effectuer un changement de variable $t \to a$ et montrer que r peut s'écrire :

$$r = \int_{a_e}^{a_o} \frac{c\,da}{a\dot{a}}$$

Intégrer cette expression et retrouver l'expression $r(z)$ obtenue à la question (2.10) ci-dessus.

On reprend la relation (a,$\dot{a}$) pour expliciter l'age de l'univers dans un tel modèle.

2.13 A partir de l'expression de H_o, montrer que l'age de l'univers peut s'écrire :

$$t_o = \frac{1}{H_o} \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

Conclure.

Figure à rendre avec la copie

No de place / carte étudiant : ______________

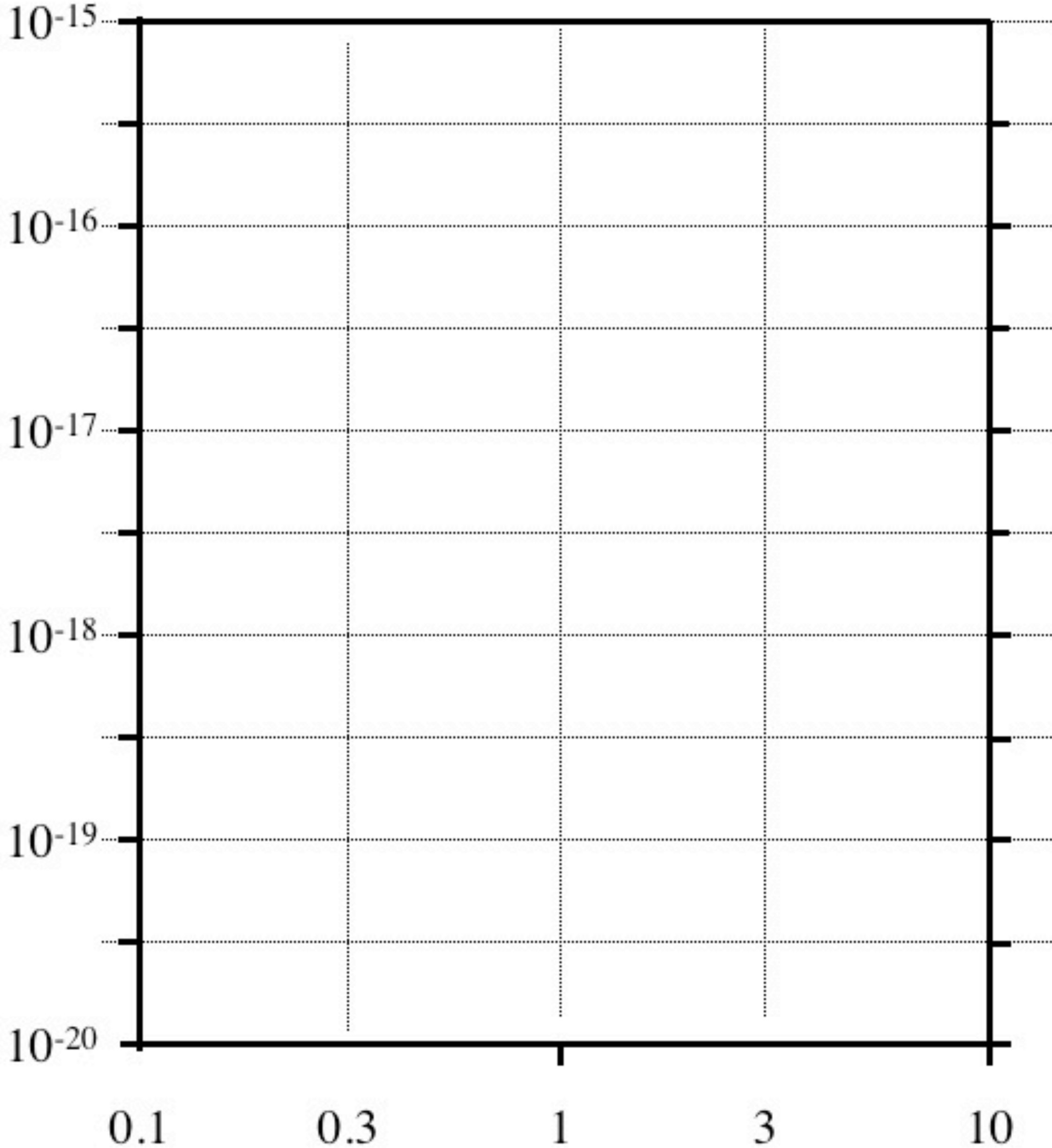

Figure 2: Diagramme log-log