L3 Physique EXAMEN Astrophysique Mardi 11/04/06
CORRECTION

Partie 1

1- le champ de pesanteur a la surface d'un astre de masse M et rayon R s'écrit : GM/R^2. Pour le soleil, on obtient : $g = 6.7\,10^{-11} \times 2\,10^{30}/(7\,10^8)^2 \approx 273\,\mathrm{m.s}^{-2} \approx 27g_o$

2- $P = F/S == N/m^2 == Jm^{-1}/m^2 == J/m^3$

Partie 2

1- ρ_c est la masse volumique au centre de l'étoile (pour $r = 0$). Dans les 3 modèles, $\rho(R) = 0$. Au dela du rayon de l'étoile, il n'y a plus de matière et la masse volumique tombe à 0.

2- Voir tracé sur la figure 1. Le modèle le plus réaliste est le modèle 3) : la masse volumique augmente vers le centre et du fait de la pression des couches externes de l'étoile, elle augmente plus vite que $(1 - r')$.

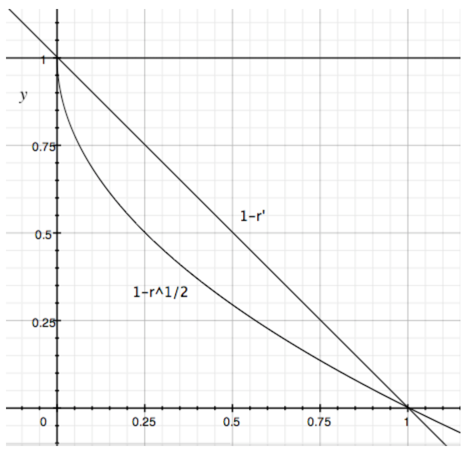

Figure 1:

3- Par définition :

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

4-

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_c (1 - \frac{r}{R}) dr = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_c - \pi R^3 \rho_c = \frac{\pi R^3 \rho_c}{3}$$

On en déduit que $\rho_c = 4\bar{\rho}$; la masse de l'étoile est plus concentrée vers le centre.

5-

$$M_r(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_c (1 - \sqrt{\frac{r'}{R}}) dr' = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c - \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_c \frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{R}} dr' = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c - \frac{8\pi}{7} \rho_c r^3 = \frac{1}{7} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c$$

On en déduit M pour $r = R$: $M = (1/7)(4\pi/3)R^3\rho_c$. En divisant M par $(4\pi/3)R^3$, on trouve bien $\rho_c = 7\bar{\rho}$.

6-

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-G}{r^2} \rho_c (1 - \sqrt{\frac{r}{R}}) \frac{4\pi r^3 \rho_c}{21} = \frac{-4\pi G \rho_c^2}{21} (r - \frac{r^{3/2}}{\sqrt{R}})$$

$$P(r) = \frac{-4\pi G \rho_c^2}{21} (\frac{r^2}{2} - \frac{2}{5} \frac{r^{5/2}}{\sqrt{R}}) + P(0)$$

$$P(0) = \frac{4\pi G R^2 \rho_c^2}{210} = \frac{21G}{40\pi} \frac{M^2}{R^4}$$

Partie 3

1- a n'a pas de dimension ; k a donc la dimension de l'inverse du carré d'un temps (s^{-2}). Si on effectue le calcul à partir des dimensions de G et ρ dans le terme de gauche, on retrouve ce résultat.

2- Puisque p a la dimension d'une densité d'énergie (J/m^3, voir partie 1), la division par c^2 donne une masse volumique ($\equiv$ kg.m^{-3}, puisque $E = mc^2$), et même si a avait une dimension la dérivée d/da ramène les deux termes de l'équation à la même puissance de a.

3- $p = 0$ entraine $d/da(\rho a^3) = 0$, donc $\rho a^3 = Cst$. Soit ρ_o la valeur de ρ pour $a = 1$ (à l'époque actuelle), on a donc $\rho = \rho_o a^{-3}$: lorsque l'univers se dilate, par conservation de la masse totale, sa masse volumique diminue.

4- Pour $k = 0$, l'équation de Friedman devient :

$$\frac{8\pi G}{3a}\rho_o = (\frac{da}{dt})^2 \rightarrow \sqrt{a}da = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_o}{3}}dt \rightarrow a \propto t^{2/3} \quad (a = [\frac{t}{t_o}]^{2/3})$$

à condition de choisir comme condition initiale $a(t = 0) = 0$ (hypothèse du *Big Bang*).

5- $\rho = \rho_o a^{-3} = \propto t^{-2}$. **6-** Voir tracé sur la figure 2.

7-

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = a^3\frac{d\rho}{da} + 3\rho a^2 = -\rho a^2 \rightarrow a\frac{d\rho}{da} = -4\rho \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a} \rightarrow \rho = \rho_o a^{-4}$$

8-

$$\frac{8\pi G}{3a^2}\rho_o = (\frac{da}{dt})^2 \rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\pi G\rho_o}{3}} \rightarrow ada = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_o}{3}}dt \rightarrow a(t) \propto \sqrt{t}$$

Comme $\rho(t) \propto a^{-4}$, $\rho(t)$ varie ici aussi en t^{-2}.

9- Voir figure 2 : en diagramme log-log, la variation de $\rho(t)$ est une droite de pente -2. Si $\rho_o = 10^{-30}$ g.cm^3, en prenant l'age de l'univers $t_o = 2/3H_o \approx 9\,10^9$ ans, on obtient $\rho(t_r) \approx 9.5\,10^8\rho_o \approx 9.5\,10^{-19}$ kg.m^{-3}.

10- Sur le diagramme log-log, le tracé de $a(t)$ est une droite (comme ρ et T) qui change de pente au changement de régime ($+1/2 \rightarrow +2/3$). Si a_o (actuel) vaut 1, $a(t_r) = a_o(t_r/t_o)^{2/3} \approx 10^{-3}$. T varie en $1/a$ et passe de la pente $-1/2$ à $-2/3$.
La recombinaison a lieu pour $T \approx 4000$ K.

11- Dans l'époque dominée par la matière (actuelle), $a(t)$ varie comme $t^{2/3}$. On en déduit $H(t) = 2/3t$, valable pour t_o (aujourd'hui) et pour t_r (recombinaison). Donc $H(t_r) = H_o(t_o/t_r) = 1/(300000 \text{ ans}) \approx 2.1$ Mkm.s^{-1}.Mpc^{-1}.

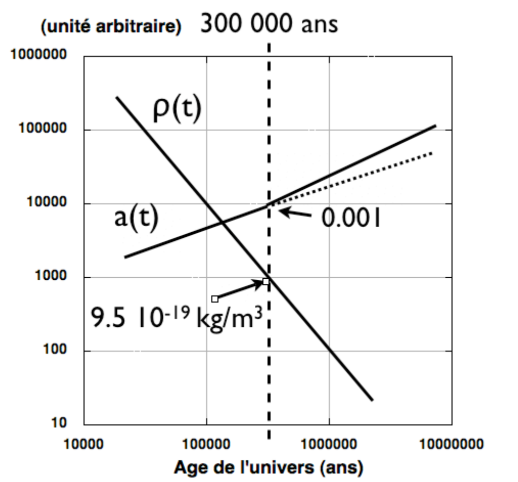

Figure 2: