L3 Physique EXAMEN Astrophysique Mardi 11/04/06

Durée 2 heure - Calculatrice autorisée
Documents interdits (une feuille de notes A4 autorisée)

π	=	3.1415926					
σ_S	=	$5.67\,10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}	Stefan	1 AU	=	$150\,10^6$ km	Unité Astronomique
k	=	$1.38\,10^{-23}$ J.K^{-1}	Boltzman	1 $M_\odot$	=	$2\,10^{30}$ kg	Masse solaire
h	=	$6.626\,10^{-34}$ J.s	Planck	1 $L_\odot$	=	$3.86\,10^{26}$ W	Luminosité Solaire
e	=	$1.6\,10^{-19}$ C	charge de l'électron	1 $R_\odot$	=	$7\,10^8$ m	Rayon Solaire
c	=	$3\,10^8$ m.s^{-1}	vitesse lumière (vide)	1 pc	=	$3.1\,10^{16}$ m	parsec
ϵ_o	=	$8.84\,10^{-12}$ F.m^{-1}	Permittivité du vide	1 an (moyen)	=	$3.16\,10^7$ s	année moyenne
G	=	$6.7\,10^{-11}$ J.m.kg^{-2}	Constante gravitation	1 AL	=	$9.5\,10^{15}$ m	Année Lumière
a	=	$7.56\,10^{-16}$ J.m^{-3}.K^{-4}	2e constante de Stefan	$T_\odot$	=	6000 K	T surface soleil

Partie 1 - Questions préliminaires

1- Calculer l'intensité de la pesanteur à la surface du soleil et comparer avec celle à la surface de la terre ($g_o \approx 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$).

2- Montrer que la dimension de la pression P est une énergie par unité de volume.

Partie 2 - Structure Stellaire

On souhaite intégrer les équations de la structure stellaire dans le cadre d'un modèle simple, pour une étoile de masse M et de rayon R. Un point de départ possible consiste à adopter une expression pour la masse volumique $\rho(r)$. On considère 3 modèles pour ρ :
1) $\rho(r) = \rho_c = Cst$
2) $\rho(r) = \rho_c(1 - r')$
3) $\rho(r) = \rho_c(1 - \sqrt{r'})$

où r' est la variable sans dimension $r' = r/R$.

1- Que représente ρ_c ? Quelle est la valeur de $\rho(R)$? Interprétation physique.

2- Tracer $\rho(r)$ de manière indicative pour les 3 modèles sur la figure 1 (fournie avec l'énoncé, à rendre avec votre copie) avec des limites de $(0-1)$ en x et $(0-\rho_c)$ en y. Lequel de ces 3 modèles vous parait le plus réaliste ?

3- Soit $\bar{\rho}$ la masse volumique moyenne de l'étoile ; exprimer $\bar{\rho}$ en fonction de M et R.

4- Exprimer ρ_c en fonction de $\bar{\rho}$ dans le cas du modèle 2).

On s'intéresse maintenant au modèle 3)

5- Calculer $M_r(r)$ la masse de gaz contenue dans la sphère de rayon r. En déduire la masse M de l'étoile en fonction de ρ_c et en déduire $\rho_c(M,R)$ pour le modèle 3). Montrer que dans ce cas, $\rho_c = 7\bar{\rho}$.

On rappelle la relation de l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-G\rho M_r(r)}{r^2} \qquad (1)$$

6- Intégrer l'équation (1) et calculer la pression au centre de l'étoile, en fonction de M^2/R^4 (pas d'application numérique).

Partie 3 - Cosmologie

La principale équation qui décrit l'expansion de l'univers en reliant le facteur d'expansion a à la masse volumique ρ et l'énergie totale (ou courbure) k est l'équation de Friedman :

$$\frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = (\frac{da}{dt})^2 + k \tag{2}$$

Cette équation peut être obtenue en physique Newtonnienne comme en relativité générale.

1- Quelle est la dimension de k ?

En relativité générale, les équations de l'expansion tiennent compte de la masse volumique ρ et d'un terme de pression p. On admettra sans démonstration qu'alors l'équation de conservation de l'énergie est :

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3\frac{p}{c^2}a^2 \tag{3}$$

2- Vérifier l'homogénéité de l'équation 3.

Dans toute la suite du problème, on se place dans un modèle d'univers à courbure nulle ($k = 0$), avec $\rho_o \approx 10^{-27}\,$kg.m^{-3} à l'époque actuelle (pour $a = 1$) et une constante de Hubble actuelle $H_o = 70\,\mathrm{km.s^{-1}}$.Mpc^{-1}.

Dans sa phase d'expansion, l'univers a connu deux époques : une phase initiale dominée par le rayonnement et une phase (que nous connaissons encore actuellement), dominée par la matière. La transition entre les deux phases correspond à l'époque de la recombinaison, au moment où les photons ont pratiquement cessé d'interagir notablement avec la matière ($t_r \simeq 300\,000\,\mathrm{ans}$).

On considère tout d'abord la phase *actuelle* dominée par la matière, et qui correspond à une *pression nulle* (pas de collisions entre les "particules" que sont les galaxies) : $p = 0$.

3- Reporter cette condition dans l'équation (3) et en déduire l'expression de $\rho(a)$. Interprétation physique.

4- En reportant $\rho(a)$ dans l'équation de Friedman, intégrer cette équation et montrer que $a \propto t^{2/3}$. Quelle hypothèse faites -vous sur la valeur $a(t = 0)$? Interprétation physique.

5- En déduire l'expression de $\rho(t)$.

6- Tracer l'évolution de $\rho(t)$ à partir de la recombinaison sur la figure 2. Cette figure est en coordonnées logarithmiques (décimal) et les puissances de 10 indiquées en ordonnée sont là uniquement pour guider le tracé.

On considère maintenant la première phase de l'univers dominé par le rayonnement. On a alors : $p/c^2 = \rho/3$.

7- En utilisant l'équation de conservation, montrer qu'alors $\rho(a)$ varie comme a^{-4}.

8- Intégrer alors l'équation de Friedman et montrer que lorsque l'univers est dominé par le rayonnement, $a \propto \sqrt{t}$. En déduire l'expression de la variation de $\rho(t)$ avant la recombinaison.

9- Tracer l'évolution de $\rho(t)$ avant la recombinaison sur la figure 2. Calculer la valeur de $\rho(t_r)$.

10- Tracer sur la figure 2 les variations de $a(t)$ et $T(t)$ (température de l'univers) pour les deux époques de l'expansion. Calculer $a(t_r)$.

Question subsidiaire :
11- Calculer la constante de Hubble à l'époque de la recombinaison $H(t_r)$, en km.s^{-1}.Mpc^{-1} ? Combien vaut approximativement $T(t_r)$?

Indiquer sur la page des figures un 'code' qui permette de raccorder la page à votre copie

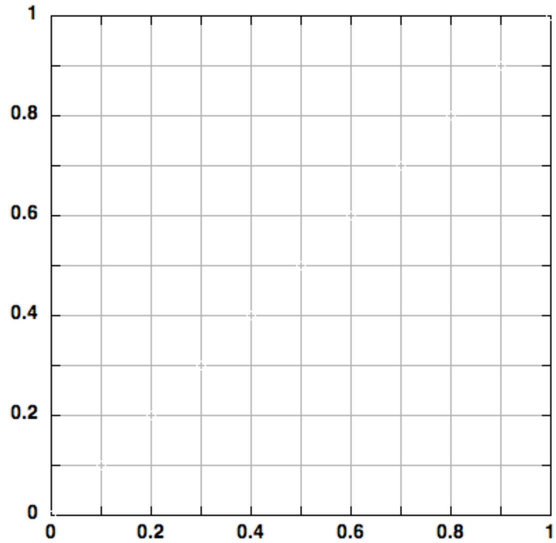

Figure 1:

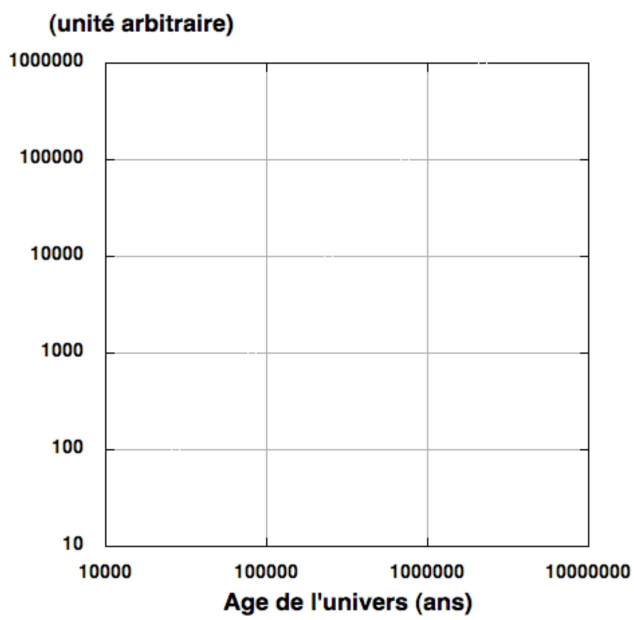

Figure 2: