L3 Physique Examen Astrophysique avril 2007

DURÉE DEUX HEURES - SANS CALCULATRICE NI DOCUMENTS
UNE PAGE A4 DE NOTES PERSONNELLES AUTORISEE

LA PRESENTATION SERA NOTEE SUR 2 POINTS

Toutes les données numériques nécessaires sont portées dans la table ci-dessous. Dans tous les cas, on déterminera d'abord une expression littérale du résultat demandé, puis on effectuera éventuellement le calcul de l'application numérique avec des approximations raisonnables qu'on explicitera.

π	=	3.1415926		$T_\odot$	=	6000 K	T surface soleil
σ_S	=	$5.67\,10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}	Stefan	1 $R_\odot$	=	$7\,10^8$ m	Rayon Solaire
k	=	$1.38\,10^{-23}$ J.K^{-1}	Boltzman	1 $M_\odot$	=	$2\,10^{30}$ kg	Masse solaire
h	=	$6.626\,10^{-34}$ J.s	Planck	1 $L_\odot$	=	$3.86\,10^{26}$ W	Luminosité Solaire
e	=	$1.6\,10^{-19}$ C	charge de l'électron	1 AU	=	$150\,10^6$ km	Unité Astronomique
c	=	$3\,10^8$ m.s^{-1}	vitesse lumière (vide)	1 pc	=	$3.1\,10^{16}$ m	parsec
ϵ_o	=	$8.84\,10^{-12}$ F.m^{-1}	Permittivité du vide	1 AL	=	$9.5\,10^{15}$ m	Année Lumière
G	=	$6.7\,10^{-11}$ J.m.kg^{-2}	Constante gravitation	1 an (moyen)	=	$3.16\,10^7$ s	année moyenne
a	=	$7.56\,10^{-16}$ J.m^{-3}.K^{-4}	2e constante de Stefan	H_o	=	60 km.s^{-1}.Mpc^{-1}	Constante Hubble

Partie 1- Transfert de rayonnement

Dans la première partie de l'exercice, on ne tient pas compte de la longueur d'onde ou de la fréquence du rayonnement. On rappelle l'équation du transfert de l'intensité spécifique I (en W.m^{-2}.Hz^{-1}.sr^{-1}) le long d'un chemin repéré par l'abcisse x dans un milieu ayant un coefficient d'absorption α et un coefficient d'émission j :

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I + j \tag{1}$$

1- Donner les dimensions de α et j. Sont-elles identiques ? Pourquoi ?

2- Ré-écrire l'équation du transfert en faisant intervenir la variable "profondeur optique" $d\tau = \alpha dx$. Quel est l'intérêt de ce changement de variable ?

3- Proposer une interprétation physique simplifiée du terme $1/\alpha$.

En ce qui concerne l'absorption, on utilise parfois la notion d'opacité $\kappa = \alpha/\rho$, en faisant intervenir la masse volumique ρ du milieu traversé.

4- Donner la dimension de κ. Interprétation physique.

On considère un rayonnement qui progresse dans un milieu d'opacité $\kappa = 10$ USI (unité déterminée à la question 4 ci-dessus). La masse volumique de ce milieu est $\rho_o = 10^{-15}$ kg.m^{-3}.

5- Calculer la distance d_1 correspondant à une profondeur optique $\tau_1 = 1$. Application numérique. Estimer cette distance en Unités Astronomiques.

On prend maintenant en compte la variation de κ avec la longueur d'onde du rayonnement (figure 1, extraite d'un article scientifique en anglais). On considère que le rayonnement se propage dans un nuage de poussière homogène constitué soit de graphite (atomes de carbone, figure de gauche), soit de Silicate (atomes de Silicium, figure de droite).

Attention : les unités utilisées sur la figure 1 ne sont pas standard.

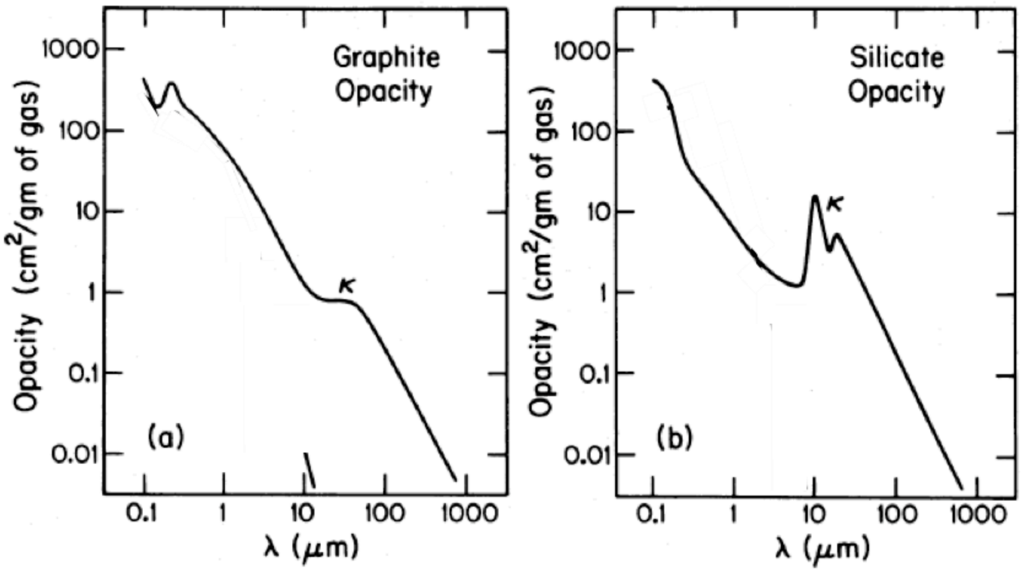

Figure 1: Opacité d'un milieu homogène constitué de grains de graphite (gauche) et de Silicates (droite).

6- Pour une même épaisseur de milieu traversée, quel est le milieu le plus transparent à $10\,\mu$m ? A $1\,\mu$m ? Déterminer l'opacité du graphite à $10\,\mu$m en $m^2.kg^{-1}$. Donner de même l'opacité du silicate à $1\,\mu$m.

On se propose de calculer quelle serait la profondeur optique du système solaire si on pulvérisait uniformément tout le matériau rocheux des planètes (supposé consitué uniquement de silicates), dans un cylindre aplati (un disque) de rayon $R = 50\,\mathrm{AU}$, et d'épaisseur $d = R/10$ (figure 3). On suppose pour simplifier que la masse totale M en jeu est égale à un dixième de la masse de Jupiter M_J, sachant que $M_J \approx 10^{-3}\,M_\odot$.

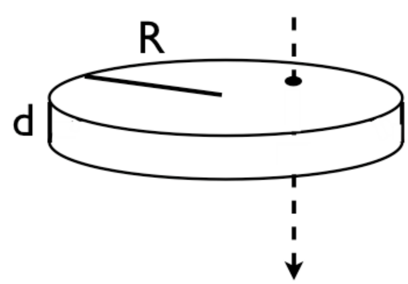

Figure 2: Géométrie du disque.

7- Calculer l'expression littérale de la masse volumique ρ du milieu obtenu en répartissant uniformément la masse M dans le cylindre aplati.

8- En déduire l'expression de la profondeur optique τ_1 du milieu pour un rayonnement traversant le disque de haut en bas (trait pointillé sur la figure 2), à la longueur d'onde $\lambda = 1\,\mu m$; on notera κ_1 l'opacité des silicates à $1\,\mu$m.

9- Que représente le terme M/S ? Est-ce que l'épaisseur d intervient dans le calcul de τ_1 ? Justifiez.

10- Calculer numériquement une valeur approchée de τ_1. Conclusion. (On prendra $\pi \approx 3$ et $7.5^2 \approx 55$).

Partie 2- Cosmologie : Etat stationnaire.

On rappelle l'équation de Friedman :

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G\rho a^2}{3} = -k$$

1- Rappelez l'interprétation "classique" de cette équation (en gravitation Newtonienne) et indiquez les trois types de modèles d'univers obtenus en fonction du signe de k.

On se place maintenant, et pour toute la suite de l'exercice, dans un modèle d'Einstein-de Sitter, pour $k = 0$. On considère de plus un modèle dit "d'état stationnaire", avec $H = H_0 =$ constante.

2- A partir de l'expression de H_o en fonction de a, montrer que $a(t)$ est une fonction exponentielle de t. Donner l'expression de $a(t)$ si $a_o = 1$.

3- En reportant l'expression de $a(t)$ dans l'équation de Friedman, établir l'expression de la masse volumique ρ.

4- Quelle est la particularité de la valeur de ρ trouvée ? Ce résultat vous parait-il compatible avec l'hypothèse de départ ?

Partie 3- Cosmologie : Expansion en relativité générale.

Les équations de la relativité générale amènent à considérer un terme supplémentaire P dans l'équation de conservation de l'énergie reliant ρ et a :

$$\frac{d}{da}(c^2\rho a^3) = -3Pa^2 \tag{2}$$

P est un terme de pression (en [N.m^{-2}]), essentiellement du aux photons, qui devient négligeable lorsque a est suffisamment grand (en pratique pour $a > 10^{-3}$, soit pour $t > 10^5$ ans), en particulier dans l'approximation Newtonienne.
c est la vitesse de la lumière.

Premier cas : approximation Newtonienne, $a > 10^{-3}$, $P = 0$

1- Justifiez le fait qu'on puisse prendre $P = 0$ à l'ère actuelle (age de l'univers = 10 milliards d'années).

2- Résoudre l'équation 2 dans le cas classique $P = 0$, et montrer qu'on obtient $\rho\, a^3$ =Constante. En déduire l'expression de $\rho(a)$ en faisant intervenir les valeurs actuelles de la masse volumique et du facteur d'expansion : ρ_o et $a_o = 1$.

3- A quelle équation de conservation correspond la solution $\rho\, a^3 =$ Constante ?

4- En reportant l'expression de $\rho(a)$ dans l'équation de Friedman, résoudre cette équation et en déduire l'expression de la variation de a en fonction de t.

5- En déduire l'expression de ρ en fonction de t.

Deuxième cas : Physique relativiste, $a < 10^{-3}$, $P = (\rho c^2)/3$

6- Vérifier que l'égalité $P = \rho c^2/3$ est bien homogène

7- Résoudre l'équation 2 lorsque $P = (\rho c^2)/3$ et déterminer l'expression de $\rho(a)$ sous la forme $\rho a^n =$ constante. Que vaut n ?

8- Reporter $\rho(a)$ dans l'équation de Friedman et déterminer l'expression de $a(t)$ sous la forme d'une constante que multiplie t^α. Que vaut α ?

9- En déduire l'expression de $\rho(t)$ sous la forme d'une constante que multiplie t^p. Que vaut p ? Commenter.

10- Tracer la variation de a(t) sur le diagramme log-log fourni avec le sujet (à rendre avec la copie). On prendra $a(t = 10^5 \text{ ans}) = 10^{-3}$. Montrer que par continuité de $a(t)$, on peut déterminer a pour tout instant depuis l'époque actuelle jusqu'au big bang. Que vaut $a(t = 100 \text{ ans})$?

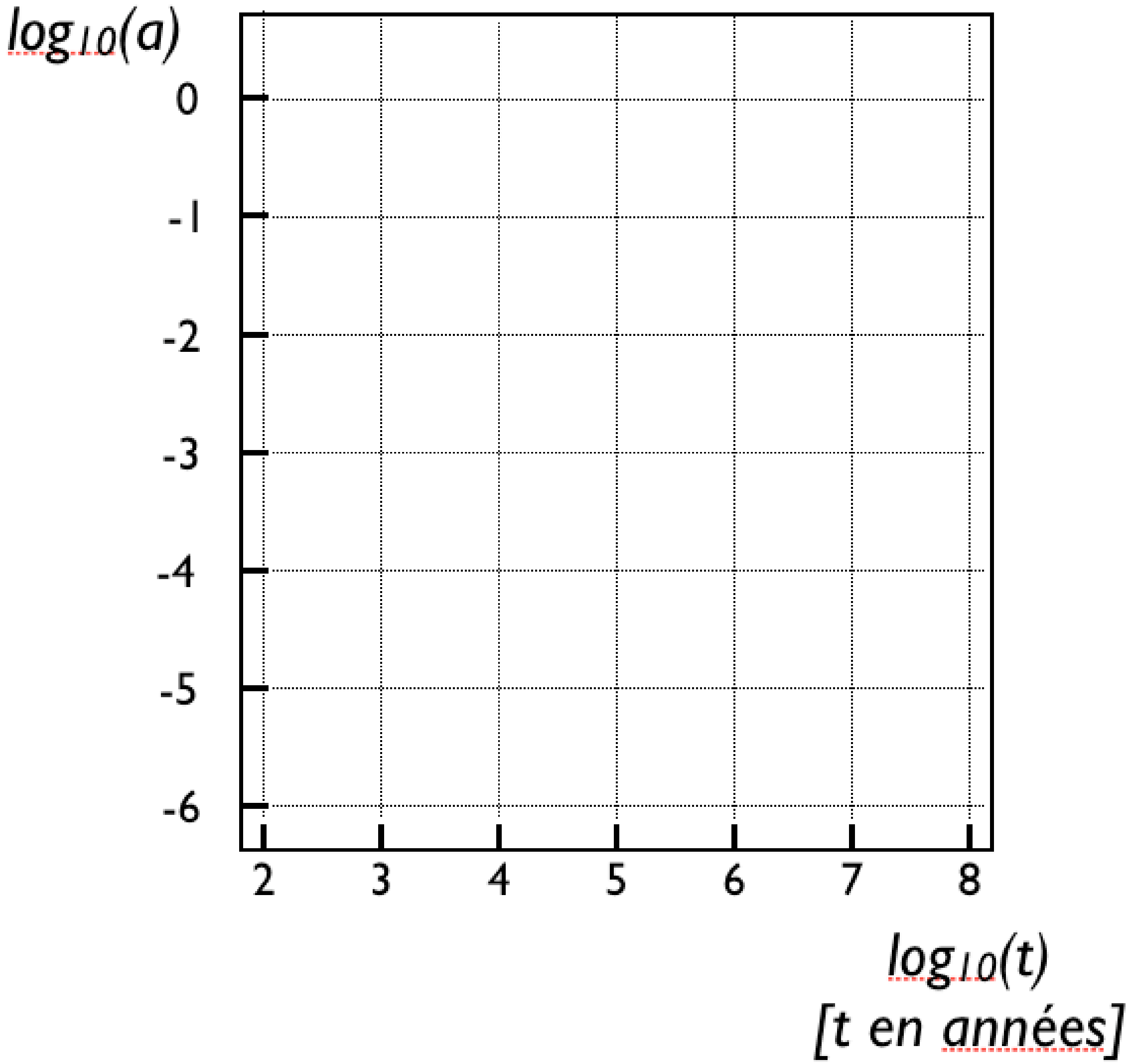

Figure 3: Diagramme log-log (base 10) de a en fonction de t (exprimé en années)