FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Fonctions hyperboliques

Définition :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Formules d'addition. Pour tout couple (a, b) de nombres réels,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b, \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}, \quad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \tfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)], \quad \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \tfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)]$$

$$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)].$$

Pour tout couple (p, q) de nombres réels,

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}, \quad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}, \quad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}, \quad \operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}.$$

Pour tout nombre réel a,

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 a + 1$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a,$$

$$\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}, \quad \operatorname{sh} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}, \quad \exp 2a = \frac{1 + \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th} a}$$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES (fin)

$$\text{th}\, a = \frac{\text{sh}\, 2\, a}{1 + \text{ch}\, 2\, a} = \frac{\text{ch}\, 2\, a - 1}{\text{sh}\, 2\, a}, \quad \text{si}\ a \neq 0$$

$$\text{ch}\, 3\, a = 4\, \text{ch}^3\, a - 3\, \text{ch}\, a\,, \quad \text{sh}\, 3\, a = 4\, \text{sh}^3\, a + 3\, \text{sh}\, a$$

$$\text{th}\, 3\, a = \frac{3\, \text{th}\, a + \text{th}^3\, a}{1 + 3\, th^2\, a}\,.$$

Pour tout entier rationnel n,

$$(\text{ch}\, a + \text{sh}\, a)^n = \text{ch}\, na + \text{sh}\, na\,, \quad (\text{ch}\, a - \text{sh}\, a)^n = \text{ch}\, na - \text{sh}\, na\,.$$

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\text{ch}\, na = \text{ch}^n\, a + C_n^2\, \text{ch}^{n-2}\, a\, \text{sh}^2\, a + \cdots + C_n^{2p}\, \text{ch}^{n-2p}\, a\, \text{sh}^{2p}\, a + \cdots$$

$$\text{sh}\, na = C_n^1\, \text{ch}^{n-1}\, a\, \text{sh}\, a + C_n^3\, \text{ch}^{n-3}\, a\, \text{sh}^3\, a + \cdots + C_n^{2p+1}\, \text{ch}^{n-2p-1}\, a\, \text{sh}^{2p+1}\, a + \cdots$$

$$\text{th}\, na = \frac{C_n^1\, \text{th}\, a + C_n^3\, \text{th}^3\, a + \cdots + C_n^{2p+1}\, \text{th}^{2p+1}\, a + \cdots}{1 + C_n^2\, \text{th}^2\, a + \cdots + C_n^{2p}\, \text{th}^{2p}\, a + \cdots}\,.$$

Formules de linéarisation. Pour tout entier naturel non nul p,

$$\text{ch}^{2p}\, a = \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\sum_{q=0}^{p-1} C_{2p}^q\, \text{ch}\, [(2\,p - 2\,q)\, a] + \frac{1}{2}\, C_{2p}^p \right]$$

$$\text{sh}^{2p}\, a = \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q\, C_{2p}^q\, \text{ch}\, [(2\,p - 2\,q)\, a] + \frac{(-1)^p}{2}\, C_{2p}^p \right].$$

Pour tout entier naturel p,

$$\text{ch}^{2p+1}\, a = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} C_{2p+1}^q\, \text{ch}\, [(2\,p + 1) - 2\,q)\, a]$$

$$\text{sh}^{2p+1}\, a = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q\, C_{2p+1}^q\, \text{sh}\, [(2\,p + 1 - 2\,q)\, a]\,.$$

Fonctions hyperboliques réciproques. Pour tout nombre réel x supérieur à 1,

$$\text{Arg ch}\, x = \log\, (x + \sqrt{x^2 - 1})\,.$$

Pour tout nombre réel x,

$$\text{Arg sh}\, x = \log\, (x + \sqrt{x^2 + 1})\,.$$

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-1, 1[$,

$$\text{Arg th}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}\,.$$